

УДК 621.928

## Исследование формирования энергопотоков и скорости истирания материала при измельчении

А.Н. Беляков<sup>1</sup>, В.П. Жуков<sup>1</sup>, Н. Otwinowski<sup>2</sup>, Т. Wyleciał<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
Иваново, Российская Федерация

<sup>2</sup>Institute of Thermal Machinery, Czestochowa University of Technology, Poland  
E-mail: zhukov-home@yandex.ru

### Авторское резюме

**Состояние вопроса:** Измельчение материала истиранием традиционно моделируется отдельно от движения частиц. Однако именно характер движения частиц определяет подвод энергии к разрушаемому материалу.

**Материалы и методы:** Для описания процессов движения, передачи энергии и собственно измельчения материала предложено использовать кинетическое уравнение Больцмана.

**Результаты:** На основе уравнения Больцмана разработана математическая модель процессов движения, энергообмена и измельчения частиц истиранием.

**Выводы:** Сравнение экспериментальных и расчетных данных показало адекватное описание моделью реального процесса.

**Ключевые слова:** движение частиц, энергообмен, истирание, уравнение Больцмана.

## Research of Energy Flows Formation and Rate of Material Wear while Being Ground

A.N. Belyakov<sup>1</sup>, V.P. Zhukov<sup>1</sup>, H. Otwinowski<sup>2</sup>, T. Wyleciał<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation

<sup>2</sup>Institute of Thermal Machinery, Czestochowa University of Technology, Poland  
E-mail: zhukov-home@yandex.ru

### Abstract

**Background:** The materials being ground by means of attrition is traditionally designed separately from particles motion. However, it is the character of particles motion that determines the power supply towards the disturbing material.

**Materials and methods:** In order to describe the processes of particle motion, energy transfer and grinding of materials it is proposed to use the Boltzmann kinetic equation.

**Results:** A mathematical model of particles motion, energy transfer and size reduction in particle grinding by attrition based on the Boltzmann equation is developed.

**Conclusions:** Comparison of experimental and calculated data demonstrated the adequate description with the help of real process model.

**Key words:** particles motion, energy exchange, attrition, Boltzmann equation.

Идея практического применения псевдооживленного слоя для осуществления гетерогенных процессов не нова, но лишь в последнее время этот метод получил широкое распространение в энергетике, химической, горнорудной и других отраслях промышленности [1, 2]. Для создания псевдооживленного слоя обычно используется инертный материал, который получил название насадка или «флегма» [1–3]. Вопросы организации и поддержания оптимальных условий протекания процессов в слое напрямую связаны с поддержанием необходимого состояния насадки. Частицы насадки в процессе эксплуатации реактора могут изменять размеры за счет истирания или химических реакций. Ниже предлагается описание эрозии, или истирания, частиц в кипящем слое.

Для моделирования совмещенных процессов измельчения и движения частиц в слое используется известное кинетическое уравнение Больцмана [3, 4], определяющее измене-

ние во времени распределения плотности вероятности в выбранном фазовом пространстве. В качестве искомой функции при описании измельчения [3] рассматривается плотность распределения частиц по координатам, скоростям и размерам  $f(\vec{r}, \vec{v}, \delta, t)$ , где  $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$  – радиус-вектор,  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$  – вектор скорости,  $\delta$  – размер частицы,  $t$  – время.

Изменение функции распределения в фазовом объеме  $dV$  обусловлено, во-первых, физическим перемещением частиц  $div_r(\vec{v}f)$ , во-вторых, изменением скорости частиц  $div_v(\vec{a}f)$  и, в-третьих, источниками членами  $\dot{f}_c$ . В дифференциальной форме уравнение Больцмана для совмещенных процессов записывается в виде [3]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial v_k f}{\partial x_k} + \frac{\partial a_k f}{\partial v_k} = \dot{f}_c, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где повторение индекса « $k$ » сверху и внизу дроби показывает суммирование по этому индексу.

Ранее нами [3] для описания хрупкого измельчения частиц, при котором частица исходного материала раскалывается на множество более мелких осколков примерно одинаковых размеров, было предложено использовать источниковый член уравнения (1).

При измельчении истиранием от большой частицы откалываются мелкие осколки, а исходная частица плавно уменьшается в размере. При этом размеры осколков много меньше размера исходной частицы, а истирание представляется как «движение» частицы вдоль координаты ее размера. Для моделирования измельчения истиранием уравнение (1) может быть представлено следующим образом. Координата крупности частиц представляется как четвертая геометрическая координата  $x_4 = \delta$ , а скорость истирания определяется по аналогии со скоростью движения в механике – через производную координаты по времени:

$$v_4 = d\delta/dt = dx_4/dt. \quad (2)$$

Скорость изменения скорости, соответственно, определяется как ускорение  $a_4 = dv_4/dt$ . Физическое перемещение частиц  $div_r(\vec{v}f)$  с учетом истирания описывается уравнением (1) в четырехмерном пространстве координат  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Образование мелких осколков при этом учитывается источниковым слагаемым в правой части:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial v_k f}{\partial x_k} + \frac{\partial a_k f}{\partial v_k} = \dot{f}_c, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (3)$$

Дальнейшее обобщение постановки задачи может быть выполнено для случая учета формы частиц введением для частиц трех размеров  $x_4, x_5, x_6$ , которые соответствуют длине, ширине и высоте частицы. Вид уравнения (3) при этом остается прежним, но индекс суммирования принимает новые значения:  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

Решение уравнения (3) предваряется исследованием скорости истирания. Процесс измельчения истиранием в кипящем слое обуславливается взаимодействием частиц друг с другом и с элементами конструкций. Как было отмечено выше, размер исходной частицы при истирании уменьшается за счет откалывания от нее небольших осколков, размеры которых существенно меньше размера исходного зерна. Скорость уменьшения размера исходной частицы, или скорость истирания, определяется согласно (2) как первая производная от размера частицы по времени. В случае наблюдения только за одним характерным размером частиц скорость истирания зависит от подвода энергии ( $e$ ) и от этого размера частиц  $v_4 = v_4(x_4, e)$ . В теории измельчения считается, что зависимость скорости измельчения, или селективной функции измельчения [5], от энергоподвода и размера частиц может представляться произведением двух функций. Один из

сомножителей этого произведения определяется энергоподводом, второй – размером зерен. С учетом степенной зависимости скорости измельчения от размера [5] выражение для скорости истирания записывается в виде

$$v_4 = dx_4/dt = -\alpha(e)x_4^n, \quad (4)$$

где  $e$  – величина энергоподвода;  $\alpha(e)$  – функция энергоподвода к материалу;  $n$  – параметр зависимости.

Ниже рассматриваются некоторые частные случаи решения дифференциального уравнения (4) для постоянного значения энергоподвода ( $\alpha = \text{const}$ ).

1. При нулевом показателе степени ( $n = 0$ ) скорость истирания частиц любого размера остается постоянной  $v_4 = -\alpha = \text{const}(x_4)$ . Решение дифференциального уравнения (4) при начальных условиях  $x_4|_{t=0} = x_{40}$  имеет вид

$$x_4 = x_{40} - \alpha t. \quad (5)$$

Из решения (5) следует, что при  $t = x_{40}/\alpha$  размер частицы обращается в нуль. Однако мелкие частицы уносятся из слоя потоком газа (рис. 1) раньше, чем достигнут нулевого размера. Максимальный размер частицы, уносимой газом, будем называть критическим. Время пребывания частицы, за которое ее размер уменьшится до критического, находится согласно выражения

$$t_{кр} = (x_{40} - x_{4кр})/\alpha,$$

где индекс « $кр$ » относится к критическим значениям параметров.

2. При  $n = 1$  и аналогичных начальных условиях решение уравнения (4) получается в виде экспоненциальной зависимости от времени:

$$x_4 = x_{40} \exp(-\alpha t).$$

Нулевой размер частицы в этом случае достигается лишь при бесконечном времени. Время пребывания частицы в реакторе до достижения критического размера находится из выражения

$$t_{кр} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{x_{40}}{x_{4кр}}.$$

3. Решение уравнения (4) при произвольном, но не равном единице ( $n \neq 1$ ) значении показателя степени записывается в виде

$$x_4 = \left[ x_{40}^{1-n} - \alpha t(1-n) \right]^{1/(1-n)}. \quad (6)$$

Для случая  $n = 0$  решение (6) переходит в полученное ранее выражение (5). Объединяя найденные решения уравнения (4), получим

$$x_4 = \begin{cases} \left[ x_{40}^{1-n} - \alpha t(1-n) \right]^{1/(1-n)} & \text{при } n \neq 1, \\ x_{40} \exp(-\alpha t) & \text{при } n = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Для шарообразной частицы изменение ее массы во времени с учетом (7) записывается в виде

$$m = \frac{\pi}{6} \rho x_4^3 = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \rho [x_{40}^{1-n} - \alpha t(n-1)]^{\frac{3}{1-n}} & \text{при } n \neq 1, \\ \frac{\pi}{6} \rho x_{40}^3 \exp(-3\alpha t) & \text{при } n = 1, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\rho$  – плотность материала.

Подставляя в выражение (8) массу исходной частицы ( $m_0 = \frac{\pi}{6} \rho x_{40}^3$ ), получаем

$$m = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \rho \left[ \left( \frac{6m_0}{\pi \rho} \right)^{\frac{1}{3(1-n)}} - \alpha t(n-1) \right]^{\frac{3}{1-n}}, & n \neq 1, \\ m_0 \exp(-3\alpha t), & n = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Зависимость (9) описывает убыль массы исходной частицы от времени и позволяет определить вероятность перехода частицы в мелочь при истирании.

Найденная зависимость для скорости истирания (4) и полученные аналитические решения (5)–(9) позволяют перейти непосредственно к решению кинетического уравнения (3).

Для расчетного исследования процессов движения и истирания частиц в кипящем слое рассматривается трехмерное фазовое пространство (рис. 1). Для исключения индексов из обозначений переменных в качестве новых координат фазового пространства выбраны:  $z$  – вертикальная геометрическая координата;  $v$  – скорость вдоль этой координаты;  $x$  – размер частиц.

Для решения уравнения (3) необходимо задать поле ускорений или сил, действующих на частицу вдоль вертикальной оси. В газовом потоке вдоль вертикальной оси  $z$  на частицу действуют сила тяжести  $mg$ , сила аэродинамического сопротивления  $F_c$  и сила  $F_\mu$ , обусловленная столкновениями частиц в потоке. Согласно второму закону Ньютона, проекция ускорения частицы на ось  $z$  записывается в виде

$$a_i = -g + \frac{(F_c)_i}{m_i} + \frac{(F_\mu)_i}{m_i}, \quad (10)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения;  $m$  – масса частицы; индекс  $i$  – номер класса крупности частиц.

Структура выражений для сил, действующих на частицу в слое, рассматривается в [4] и здесь подробно не анализируется. Скорость истирания частиц описывается степенной зависимостью (4). Величина энергоподвода к частицам при измельчении определяется в ходе численного решения (3). Таким образом, уравнения (3) и (4) решаются совместно. Для численного решения системы уравнений (3), (4) использован разработанный ранее вычислительный метод [6]. Многомерное фазовое пространство (рис. 1,б) представляется одномерным вектором состояния системы  $\mathbf{f}$ , каждое значение которого показывает содержание вещества в ячейке. Для каждой ячейки вектора определяются адреса ячеек, с кото-

рыми она может взаимодействовать, и вероятности перехода вещества в эти ячейки. Эволюция вектора состояния системы описывается выражением

$$\mathbf{f}_i^{k+1} = \sum_j \mathbf{f}_j^k \mathbf{p}_{ij}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{p}_{ij}$  – вероятность перехода из  $j$ -й ячейки в  $i$ -ю; верхний индекс  $k$  соответствует номеру шага по времени.

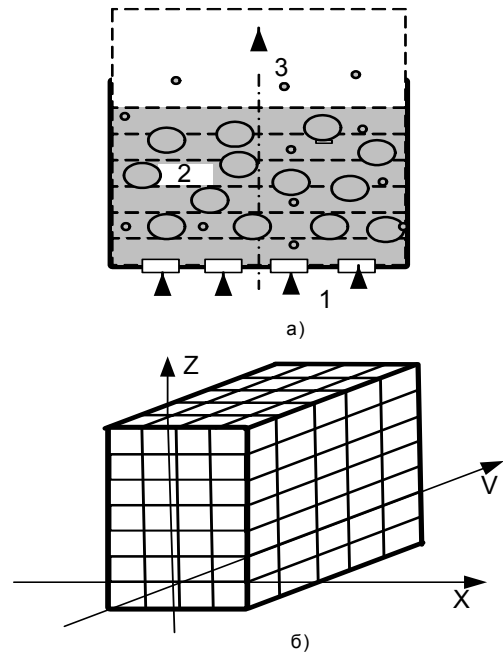


Рис. 1. Эскиз (а) и расчетное фазовое пространство (б) аппарата кипящего слоя: 1 – подача воздуха; 2 – кипящий слой; 3 – унос мелких частиц потоком газа

При проведении расчетных исследований фазовое пространство представлено трехмерным массивом ячеек, дискретные значения фазовых координат которого задаются векторами:  $z = [0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, 0, 8]$ , м;  $v = [-2, 8, -2, 1, -1, 4, -0, 7, 0, 0, 1, 0, 7, 1, 4, 2, 1, 2, 8, 3, 5]$ , м/с;  $x = [1, 35, 0, 8, 0, 45, 0, 25, 0, 165, 0, 125, 0, 05]$ , мм. Подача исходного материала плотностью  $2000 \text{ кг/м}^3$  осуществляется в точку фазового пространства с координатами  $z_0 = 0,5$  м,  $v_0 = 0,7$  м/с. Скорость вентилирующего газа при этом составляет  $3,5$  м/с.

Порядок определения вероятностей переходов, энергии разрушения и функции разрушения рассматривается применительно к дискретному фазовому пространству (рис. 1) и подробно изложен в [4]. Там же приводится оценка энергетического потока между частицами, который идет на истирание. Вероятность перехода частиц в мелочь и в соседний класс при истирании определяется с учетом (9) для выбранного шага по времени  $\Delta t$ . На рис. 2 приводятся полученные расчетным путем распределения энергии и вещества по выбранному фазовому пространству.

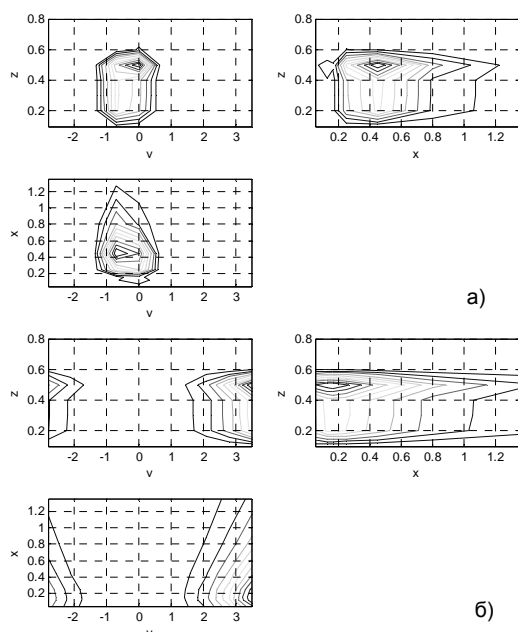


Рис. 2. Три проекции изолиний распределения вещества (а) и энергии (б) по фазовым координатам  $x, z, v$

На рис. 3 приведены результаты экспериментальных исследований истирания песка в реакторе с кипящим слоем. Точками на рис. 3 показаны гранулометрические составы исходного продукта и порошка после истирания. При проведении идентификации определялось значение параметра скорости истирания  $n$ . Анализ показал, что экспериментальные данные наилучшим образом соответствуют расчетным результатам при  $n = 2$ . Данный факт свидетельствует о том, что скорость истирания пропорциональна квадрату размера или поверхности частиц истираемого материала.

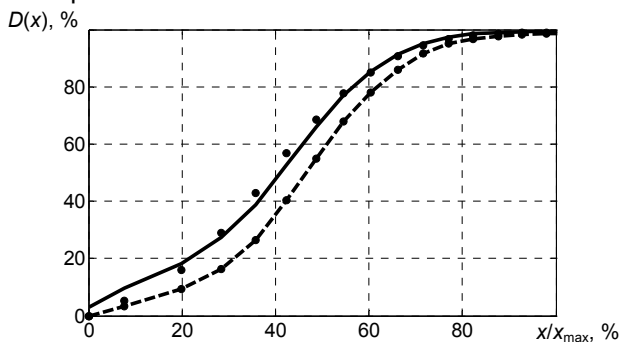


Рис. 3. Сопоставление расчетных (сплошная линия) и экспериментальных (точки) гранулометрических составов ( $D(x)$  – проход через контрольное сито) измельченного материала

**Беляков Антон Николаевич**,  
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
кандидат технических наук, докторант кафедры прикладной математики,  
телефон (4932) 26-97-45.

**Жуков Владимир Павлович**,  
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики,  
телефон (4932) 26-97-45.

На основе уравнения Больцмана разработана математическая модель процессов движения, энергообмена и измельчения частиц истиранием. Сравнение экспериментальных и расчетных данных показало адекватное описание моделью реального процесса. Полученные зависимости для определения времени пребывания частиц в реакторе до достижения критического размера и сопоставление расчетных и экспериментальных данных показали адекватное описание моделью реального процесса. При этом показано, что скорость истирания частицы пропорциональна ее поверхности.

#### Список литературы

1. Гильперин Н.И., Айнштейн В.Г., Кваша В.Б. Основы техники псевдоожижения. – М.: Химия, 1967. – 664 с.
2. Milioli F.E., Foster P.J. A model for particle size distribution and elutriation in fluidized beds // Powder Technology. – 1995. – 83. – P. 265–280.
3. Беляков А.Н., Жуков В.П., Otwinowski H., Wyleciał T. Формирование фракционных и энергетических потоков в струйных мельницах кипящего слоя // Вестник ИГЭУ. – 2012. – № 1. – С. 48–51.
4. Вулис Л.А. Теория и расчет магнитогазодинамических течений в каналах. – М.: Атомиздат, 1971. – 384 с.
5. Mizonov V., Zhukov V., Bernotat S. Simulation of Grinding: New approaches. – Ivanovo, 1997. – 108 p.
6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Расчет многомерных совмещенных процессов измельчения, классификации в сыпучих средах» №2010612671 от 19 апреля 2010 года / А.Н. Беляков, В.П. Жуков, А.А. Власюк, А.Е. Барочкин.

#### References

1. Gil'perin, N.I., Aynshteyn, V.G., Kvasha, V.B. *Osnovy tekhniki psevdoozhizheniya* [Foundations of Fluidization Technology]. Moscow, Khimiya, 1967. 664 p.
2. Milioli, F.E., Foster, P.J. A model for particle size distribution and elutriation in fluidized beds. *Powder Technology*, 1995, no. 83, pp. 265–280.
3. Belyakov, A.N., Zhukov, V.P., Otwinowski, H., Wylecia, T. *Vestnik IGEU*, 2012, no. 1, pp. 48–51.
4. Vulis, L.A. *Teoriya i raschet magnetogazodinamicheskikh techeniy v kanalakh* [Theory and Calculation of Magnetogasdynamical flows in channels]. Moscow, Atomizdat, 1971. 384 p.
5. Mizonov, V., Zhukov, V., Bernotat, S. *Simulation of Grinding: New approaches*. Ivanovo, 1997. 108 p.
6. Belyakov, A.N., Zhukov, V.P., Vlasyuk, A.A., Barochkin, A.E. *Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM «Raschet mnogomernykh sovmeshchennykh protsessov izmel'cheniya, klassifikatsii v sypuchikh sredakh №2010612671 ot 19 aprelya 2010 goda»* [State Registration Certificate for Software Program «Calculation of Polydimensional Integrated Processes of Refining, and Classification in Granular Medium №2010612671, April 19, 2010»].

*Henryk Otwinowski,*  
Institute of Thermal Machinery, Częstochowa University of Technology, Poland,  
e-mail: zhukov@home.ivanovo.ru

*Tomasz Wyleciał,*  
Department of Industrial Furnaces and Environment Protection, Częstochowa University of Technology, Poland,  
e-mail: zhukov@home.ivanovo.ru