

## Электромагнитная модель многокомпонентного высокотемпературного нагревателя

А.В. Юдин, канд. техн. наук

Получена матричная модель многокомпонентного высокотемпературного нагревателя, учитывающая электромагнитное взаимодействие элементов, представляющая собой аналог модели трансформатора с системой одновитковых обмоток, размещенных в различных плоскостях.

*Ключевые слова:* электромагнитное взаимодействие, высокотемпературный нагреватель, матричная модель.

## Electromagnetic Model of Multicomponent High-Temperature Heater

A.V. Yudin, Candidate of Engineering

The author considers the matrix model of a multicomponent high-temperature heater with electromagnetic interaction of elements, representing the analog of transformer model with the system of single windings in various planes.

*Key words:* electromagnetic interaction, high-temperature heater, matrix model.

На формирование монокристалла сапфира существенное влияние оказывает форма фронта кристаллизации, так как рост кристалла всегда происходит в направлении, перпендикулярном фронту кристаллизации. Форма фронта кристаллизации зависит от способа нагрева и отвода тепла от растущего монокристалла. При вытягивании кристалла из расплава тепло отводится через растущий кристалл, фронт кристаллизации при этом имеет выпуклую форму. Качество фронта кристаллизации принято оценивать по ряду параметров: максимальному прогибу, степени кривизны фронта, величине аксиального и радиального градиентов. Идеальным случаем является плоский фронт кристаллизации, ему соответствует нулевое значение прогиба, нулевое значение радиального градиента, бесконечный радиус кривизны. Таким образом, оптимальные условия для получения монокристалла создаются в том случае, когда обеспечивается плоский фронт роста в макроскопическом масштабе [1].

При проектировании теплового узла в конструкцию закладываются характеристики, обеспечивающие плоский фронт кристаллизации. При этом искажение теплового поля, возникающее за счет разброса параметров отдельных секций нагревателя, не учитывается, хотя изменения радиальной составляющей фронта кристаллизации при этом могут быть весьма значительными. В связи с этим возникает необходимость в моделировании процессов, происходящих в высокотемпературном нагревателе при воздействии на него электромагнитных полей с различным спектральным составом.

Высокотемпературный нагреватель, как правило, представляет собой решетчатую конструкцию из вольфрамовых прутков (обычно 7 штук), расположенных по наружной поверхности цилиндрического вольфрамового тигля (рис. 1).

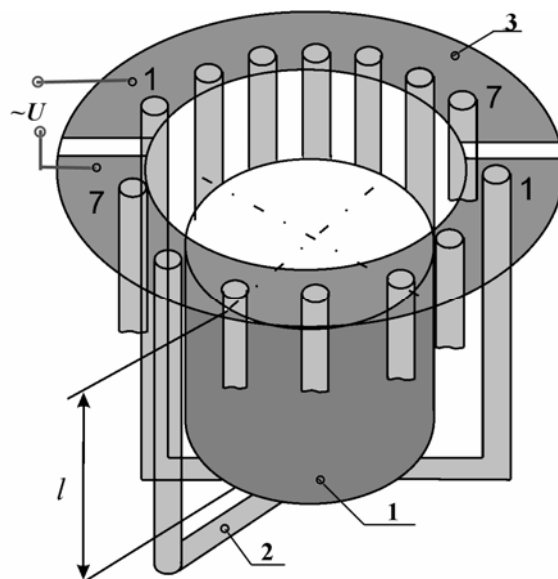


Рис. 1. Упрощенная конструкция высокотемпературного нагревателя: 1 – тигель; 2 – вольфрамовый пруток; 3 – медное полукольцо

Рассмотрим нагреватель, состоящий из  $n$  соосных П-образных вольфрамовых прутков, размещенных в различных плоскостях, образующих углы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ .

Для учета взаимного влияния вольфрамовых прутков эту конструкцию можно представить в виде трансформатора с системой из  $M$  одновитковых обмоток, размещенных в различных плоскостях.

Электромагнитное взаимодействие обмоток между собой определяется их ориентацией относительно друг друга. Степень взаимодействия, характеризуемая косинусом углов между плоскостями этих обмоток.

Вследствие этого, с помощью метода объединенных матриц [1] может быть составлена следующая модель многокомпонентного высокотемпературного нагревателя:

$$M \frac{dl(t)}{dt} + Rl(t) = E(t), \quad (1)$$

где  $E(t)$  и  $l(t)$  – вектор-столбец ЭДС, подводимых к пруткам нагревателя, и вектор токов, протекающих в них, соответственно;

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_n \end{pmatrix} \text{ – матрица активных сопротивлений контуров обмоток, включающая как сопротивление самих П-образных вольфрамовых прутков, так и сопротивление источников ЭДС;}$$

т.е. контуров обмоток, включающая как сопротивление самих П-образных вольфрамовых прутков, так и сопротивление источников ЭДС;

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \text{ – матрица взаимных индуктивностей.}$$

Если учесть, что все П-образные вольфрамовые прутки имеют практически одинаковые размеры, то для элементов матрицы взаимных индуктивностей можно записать

$$M = L_0 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{11}) & \cos(\varphi_{12}) & \dots & \cos(\varphi_{1n}) \\ \cos(\varphi_{21}) & \cos(\varphi_{22}) & \dots & \cos(\varphi_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\varphi_{n1}) & \cos(\varphi_{n2}) & \dots & \cos(\varphi_{nn}) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $L_0$  – индуктивность одного витка;  $\varphi_{jk} (j, k = 1, 2, \dots, n)$  – углы между плоскостями витков.

Для регулярной структуры равномерного размещения прутков нагревателя

$\varphi_{jk} = \varphi_0(k - j)$ , где  $\varphi_0 = \frac{\pi}{n}$  – шаг регулярной структуры, определяющий угол между смежными плоскостями П-образных прутков.

В соответствии с этим, из (2) получим

$$M = L_0 \begin{pmatrix} 1 & \cos(\varphi_0) & \dots & \cos(n-1)\varphi_0 \\ \cos(\varphi_0) & 1 & \dots & \cos(n-2)\varphi_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(n-1)\varphi_0 & \cos(n-2)\varphi_0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Воспользуемся принятым в MATLAB соглашением о расширении применимости функции  $\cos$  для векторного и матричного аргументов (поэлементные операции), тогда из (3) получим

$$M = L_0 \cos \begin{pmatrix} 0 & \varphi_0 & \dots & (n-1)\varphi_0 \\ \varphi_0 & 0 & \dots & (n-2)\varphi_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)\varphi_0 & (n-2)\varphi_0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Введем вспомогательный вектор  $N = (0 \ 1 \ \dots \ n-1)$  и преобразуем (4) к виду

$$M = L_0 \cos(\varphi_0 To(N)), \quad (5)$$

где  $To$  – функция построения матрицы Теплица.

Подставив (5) в уравнение (1), получим детализированную матричную модель нагревателя, учитывающую электромагнитное взаимодействие элементов:

$$L_0 \cos[\varphi_0 To(N)] \frac{dl(t)}{dt} + Rl(t) = E(t). \quad (6)$$

Для случая воздействия на нагреватель гармонического напряжения с частотой  $\omega$ , представленного комплексной формой записи  $E(t) = \dot{E}e^{j\omega t}$ , выражение (6) приобретает вид

$$(R + j\omega L_0 \cos[\varphi_0 To(N)])i = \dot{E}. \quad (7)$$

Из (7) следует

$$i = (R + j\omega L_0 \cos[\varphi_0 To(N)])^{-1} \dot{E}, \quad (8)$$

где «-1» – функция обращения матрицы.

С помощью (8) можно произвести оценку влияния электромагнитного взаимодействия элементов нагревателя на различных гармониках спектра.

Токи  $k$ -й гармоники при учете взаимодействия определяются соотношением

$$i_k = (R + jk\omega L_0 \cos[\varphi_0 To(N)])^{-1} \dot{E}. \quad (9)$$

Следует отметить, что при отсутствии учета взаимного влияния соотношения (8) и (9) вырождаются в соотношение  $i_k = R^{-1} \dot{E}$ , которое представляет собой закон Ома в матричной форме.

Оценим взаимодействие отдельных витков нагревателя для типовой конструкции. Индуктивность одного витка прямоугольной формы (рис. 2) может быть найдена согласно выражению [2]

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \sum_{p=\pm 1} \left\{ \int_{x_1=0}^{b_2+d/2} \int_{x_2=-b_2}^{b_2} \left( \frac{p dx_1 dx_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (b_3 - pb_3 + d/2)^2}} \right) + \int_{y_1=0}^{b_3+d/2} \int_{y_2=-b_3}^{b_3} \left( \frac{p dy_1 dy_2}{\sqrt{(y_1-y_2)^2 + (b_2 - pb_2 + d/2)^2}} \right) \right\}.$$

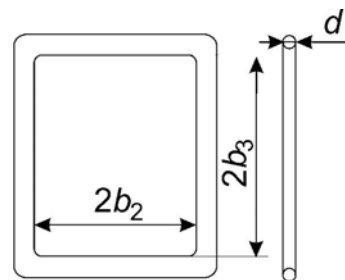


Рис. 2. Геометрическая модель индуктивности одного витка

Примем высоту тигля равной 0,5 м, а диаметр 0,3 м при диаметре прутка 5 мм. В этом случае  $b_3/b_2 = 0,5/0,3 = 1,67$ , а  $d/b_2 = 0,005/0,15 = 0,033$ . Из таблицы [2], составленной на основании выше приведенной формулы, получим, что индуктивность одного витка, отнесенная к геометрическому размеру

$b_2$ , составляет около 10 мкГн/м, т. е. собственная индуктивность витка  $L_0 = 10 \cdot 0,15 = 1,5$  мкГн.

Для рассматриваемой конструкции, содержащей семь витков, вектор  $N$  содержит значения от 0 до 6. Примем напряжение на нагревателе равным 8 В при величине активного сопротивления одиночного П-образного нагревателя 0,0112 Ом. Такие параметры характерны для установок для выращивания лейкосапфира класса Апекс-М.

Листинг программы на внутреннем языке системы инженерных расчетов Matlab приведен в таблице.

**Листинг программы анализа токов высокотемпературного нагревателя**

```
N=0:6;
L0=1.5e-6;
F=50;
fi0=pi/7;
Omega=2*pi*F;
E=8*ones(7,1);
R=diag([0.0112 0.0112 0.0112 0.0112 0.0112
0.0112 0.0112]);
I=inv(R+j*Omega*L0*cos(fi0*toeplitz(N)))*E;
plot(abs(I),'-o');grid
```

Полученная в результате расчетов по данной программе матрица токов имеет вид

```
709,953911024593 – 29,4155904643844i
702,148271264297 – 82,4206529431396i
696,746600950362 – 119,101294283533i
694,818767135603 – 132,192463609556i
696,746600950362 – 119,101294283533i
702,148271264297 – 82,4206529431396i
709,953911024593 – 29,4155904643844i.
```

*Публикация выполнена по итогам научно-исследовательской работы в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.*

**Юдин Алексей Викторович**,  
Рыбинская государственная авиационная технологическая академия,  
кандидат технических наук, доцент кафедры электротехники и промышленной электроники,  
e-mail: JudinAV@mail.ru

На рис. 3 приведено распределение модуля тока по пруткам одиночного П-образного нагревателя.

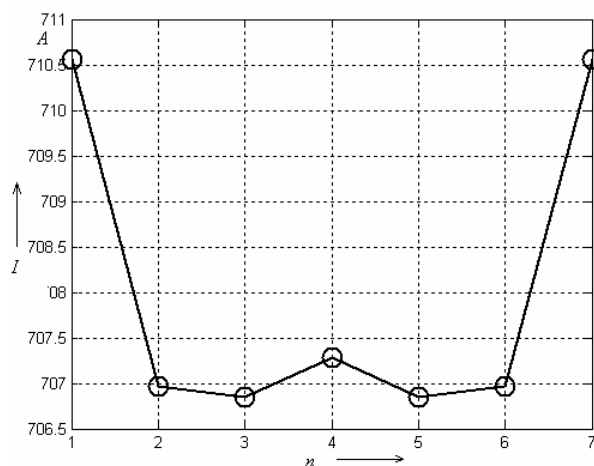


Рис. 3. Распределение токов по пруткам нагревателя

**Заключение**

Наличие электромагнитной связи искажает равномерность распределения токов. И хотя искажение не велико и не превышает 0,4 %, оно способно исказить тепловое поле внутри тигля с расплавом. Подобное обстоятельство необходимо учитывать при проектировании высокотемпературных нагревателей. Необходимость этого обусловлена тем, что процесс формирования монокристалла крайне чувствителен к изменению температуры и изменение на 0,5 градуса (при температуре порядка 2000 градусов) способно привести к появлению дефектов.

**Список литературы**

1. **Монокристаллы** никелевых жаропрочных сплавов / Р.Е. Шалин, И.Л. Светлов, Е.Б. Качанов и др. – М.: Машиностроение, 1997. – 336 с.
2. **Немцов М.В.** Справочник по расчету параметров катушек индуктивности. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 192 с.