© «Вестник ИГЭУ» Вып. 2 2012 г.

УДК 519.622.2

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЖЕСТКОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЯВНЫМИ МЕТОДАМИ

С.Н. ЧАДОВ
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
Иваново, Российская Федерация
E-mail: sergei.chadov@gmail.com

Авторское резюме

Состояние вопроса: Модель электромеханической системы с центробежным регулятором рассматривается в литературе с конца XIX в., однако вопросы численного интегрирования получаемой системы уравнений в случае ее высокой жесткости рассмотрены недостаточно подробно. В последние два десятилетия разработано множество эффективных методов интегрирования жестких систем, применимость которых к классической модели представляет как теоретический, так и практический интерес.
Материалы и методы: Для численного интегрирования полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений используются как общеизвестные методы (Рунге-Кутты 4-го порядка, неявный метод Эйлера), так и набор современных методов для интегрирования систем умеренной жесткости (методы с автоматическим анализом жесткости, проекционные методы).
Результаты: Проведено исследование эффективности решения жесткой системы различными методами. Показано, что специализированные методы значительно превосходят классические.
Выводы: Установлено, что как минимум для некоторого набора параметров использование специализированных методов дает существенный прирост производительности.

Ключевые слова: центробежный регулятор, жесткая система ОДУ, численные методы, проекционные методы решения ОДУ.

INTEGRATION OF RIGID MODEL OF ELECTROMECHANICAL SYSTEM WITH EXPLICIT METHODS

S.N. CHADOV
Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation
e-mail: sergei.chadov@gmail.com

Abstract

Background: The model of electromechanical systems with centrifugal regulator has been studied since the 19th century. Nevertheless, the issues of numerical integration of the equations system in case of its high rigidity are rarely described. Many effective integration methods of rigid systems have been developed for the last 20 years, and their application to the classical model has not only theoretical but also practical significance.
Materials and methods: For the numerical integration of the simple differential equations system the author uses both a variety of classical methods (Runge-Kutta 4, implicit Euler method) and a set of modern ones for integration of moderate rigidity system (methods with automatic determination of rigidity, projection method).
Results: The author researches the efficiency of solving the rigid system with different methods. The results indicate that the specific methods indeed have a much greater efficiency on the system than classical ones.
Conclusions: It is shown that at least in some cases the special methods provide a great efficiency boost for the model system.

Key words: centrifugal regulator, rigid system ODE, numerical analysis, projective methods of ODE solving.

Введение. При моделировании различных систем реального мира, в частности электрических и электромеханических, часто возникает ситуация, когда полученная система дифференциальных уравнений недостаточно хорошо решается распространенными методами. Это может быть связано с большой размерностью системы, ее жесткостью, повышенными требованиями к точности, а также рядом других факторов. Обычной практикой для решения подобного рода проблем является либо уменьшение шага, либо, в случае жестких систем, переход на специальные жесткие методы интегрирования, большинство из которых являются неявными. Для систем большой размерности такое решение может оказаться непригодным в силу того, что затраты машинного времени на решение становятся неприемлемыми. Ниже рассматривается модель электромеханической системы. Показано, что использование специальных жестких явных методов способно значительно снизить вычислительные затраты.

1. **Модель электромеханической системы.** Для исследования возьмем модель системы, рассмотренной в [1]. Система состоит из турбогенератора, центробежного регулятора и некоторой нагрузки.

Вращение турбины происходит под действием крутящего момента Q, момента сопротивления, зависящего от квадрата угловой скорости вращения турбины, и момента, создаваемого нагрузкой. Для расчета угловой скорости вращения уравнение будет иметь вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \gamma Q - \eta\omega\left|\omega\right| - \xi\omega I,$$

где ω – угловая скорость вращения турбины; I – сила тока, проходящего через нагрузку; η, ξ, γ – некоторые коэффициенты.

Состояние регулятора описывается следующим уравнением:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \omega^2\rho - \alpha\frac{d\rho}{dt} - k^2\left(\rho - \rho_0\right),$$

где ρ – уровень регулирования (т. е. отклонение регулятора от оси вращения); k^2 – отношение жесткости пружины к центробежной массе; α – коэффициент, учитывающий действие вязких сил; ρ_0 – значение ρ в состоянии покоя.

Примем, что Q зависит от ρ следующим образом:

$$Q = Q_{\max}\frac{e^{-\vartheta}}{1+e^{-\vartheta}},$$

где

$$\vartheta = \frac{\rho - \rho_{\min}}{\rho_{\max} - \rho_{\min}}\upsilon_1 - \upsilon_2.$$

Коэффициенты υ_1, υ_2 выберем таким образом, чтобы обеспечить достаточно плавное изменение Q в зависимости от ρ на всей области определения, например: $\upsilon_1 = 4$, $\upsilon_2 = 2$.

Сила тока вычисляется из уравнения

$$(r + R)I = \psi\omega = \varepsilon,$$

где r – внутреннее сопротивление генератора; R – сопротивления нагрузки; ε – ЭДС генератора.

Обобщим полученную модель на случай нескольких различных турбогенераторов, подсоединенных к общей нагрузке. Уравнения для ω и ρ не изменятся, за исключением того, что в системе теперь будет по паре таких уравнений для каждого генератора. Уравнение связи, используемое для вычисления силы тока, найдем из закона Ома:

$$R\sum I_i = \varepsilon,$$

и упрощенного предположения, что ЭДС генератора прямо пропорциональна скорости вращения ротора:

$$\psi_i\omega_i = \varepsilon_i.$$

Выразим I_i и проведем рад алгебраических преобразований. В результате получим следующее выражение:

$$I_i = \frac{\frac{\psi_i}{r_i}\omega_i\left(\sum\frac{R}{r_j} - 1\right) - \frac{R}{r_i}\sum\frac{\psi_j}{r_j}\omega_j}{1 - \sum\frac{R}{r_j}}.$$

При определенных значениях коэффициентов описанная выше система уравнений может представлять трудность для решения классическими методами. Так, при коэффициентах, приведенных в табл. 1, интегрирование методом Рунге-Кутты 4-го порядка возможно только с достаточно малым шагом $h = 0{,}04$. С другой стороны, размерность системы может представлять проблему для неявных методов.

Таблица 1. **Параметры системы**

Параметр	Значение (m – номер генератора)
γ	9,31 + 0,1m
η	0,00323
ξ	0,0001
α	80
k^2	520
ρ_0, $\rho_{\max}$, $\rho_{\min}$	5, 10, 50
$Q_{\max}$	1
ψ	20
R	100
r	10

Метод интегрирования. Как уже было сказано, использование жестких неявных методов приводит к сильному росту вычислительных затрат, ввиду необходимости решения на каждом шаге системы нелинейных алгебраических уравнений. Однако существуют модификации явных методов, подходящие для решения жестких задач. Рассмотрим несколько подходов к построению таких методов.

Один из подходов [3] предполагает использование метода Рунге-Кутты с оценкой локальной жесткости на каждом шаге и выбором соответствующих параметров метода, обеспечивающих приемлемую точность и более высокую, чем обычные методы, устойчивость.

Рассмотрим метод Рунге-Кутты:

$$K_i = y_n + h\sum\nolimits_{j=1}^{s} a_{ij} f\left(t_n + c_j h, K_j\right),$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum\nolimits_{j=1}^{s} b_j f\left(t_n + c_j h, K_j\right).$$

Имея набор значений $\{K_j\}$, можем воспользоваться методом степеней для оценки наибольшего по модулю собственного значения матрицы Якоби системы и таким образом оценить жесткость системы на текущем шаге. Известно, что область устойчивости методов Рунге-Кутты определяется полиномом устойчивости [2]. Манипулируя видом полинома устойчивости, можем за счет уменьшения точности добиться увеличения устойчивости жестких компонент решения.

Существует другой подход, состоящий в использовании проекционных методов [4]. Идея его в следующем:

1. Сначала сделать несколько шагов некоторым заведомо устойчивым внутренним методом. Устойчивость можно обеспечить выбором очень малого шага по времени.

2. Используя полученную внутренним методом аппроксимацию, экстраполировать значение функции на следующем шаге. Эта процедура будет являться внешним методом интегрирования.

Выбор внутреннего метода существенной роли не играет. Важно, чтобы он обеспечивал порядок точности не ниже первого и устойчивость при выбранном значении внутреннего шага. Разумно выбрать метод Эйлера, как наиболее вычислительно эффективный. Выбор же внешнего метода во многом определяет общую точность и устойчивость проекционного метода в целом. Простейший вариант – использование линейной интерполяции для двух последних точек, полученных внутренним методом, что аналогично использованию метода Эйлера в качестве внешнего:

$$y_M = y_{n+k} + \frac{y_{n+k} - y_{n+k-1}}{h_{\text{int}}} h_{ext},$$

где y_M – результирующее значение y на шаге; k – количество внутренних шагов; h_{int}, h_{ext} – внутренний и внешний шаги по времени соответственно.

Такой метод известен как проекционный метод Эйлера(Projective Forward Euler Method, PFE). Можно показать, что он имеет первый порядок точности. Более высокой точности можно добиться, выбрав другой внешний интегратор. Так, в [5] приводятся варианты проекционных методов Рунге-Кутты и Адамса-Башфорта второго порядка точности. Можно пойти дальше, используя несколько шагов выбранного проекционного метода в качестве внутреннего интегратора другого проекционного метода (носящего в литературе название телепроекционного), что позволяет в определенных случаях еще увеличить шаг интегрирования.

Результаты. Рассмотрим результаты решения приведенной выше системы для 20 генераторов с использованием различных методов: метода Рунге-Кутты 4-го порядка, неявного метода Эйлера, метода Скворцова 2-го порядка и проекционного метода Эйлера (табл. 2).

Таблица 2. **Результаты численного эксперимента**

Метод	h	Fn	T
Рк-4	0,04	100000	270
НЯМЭ	4	32186	197
Skvortsov2	0,2	20000	62
PFE	0,25	16000	47

Примечание: h – максимальный шаг, обеспечивающий точность, Fn – количество вычислений правой части, T – время вычислений в миллисекундах.

Анализ полученных результатов (табл. 2) позволяет сделать вывод, что для рассмотренной системы наиболее распространенный метод Рунге-Кутты 4-го порядка оказывается наименее эффективным, а устойчивый неявный метод Эйлера сохраняет достаточную точность даже для больших значений шага, однако по причине неявности требует для системы из 60 уравнений достаточно больших вычислительных затрат. Лучше всего себя показывают стабилизированные явные методы. В частности, проекционный метод позволил уменьшить время вычислений, по сравнению с методом Рунге-Кутты, почти в 10 раз. Что касается выбора между явными методами, то, на наш взгляд, к полученным результатам следует отнестись с осторожностью, поскольку введение, например, переменной длины шага способно значительно изменить относительную эффективность методов этой группы.

Список литературы

1. **Чадов С.Н.** Численное исследование модели энергетической системы // Вестник ИГЭУ. – 2009. – Вып. 4. – С. 49–52.
2. **Hairer E., Wanner G.** Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential-algebraic problems. – Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 612 p.
3. **Скворцов Л.М.** Простые явные методы численного решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычислительные методы и программирование. – 2008. – № 9. – С. 154–162.
4. **Gear C.W., Kevrekidis I.G.**. Projective Methods for Differential Equations, NECI Technical Report NECI-TR 2001-029, Apr. 2001, also SIAM J. Sci. Comp. 24(4), pp1091–1106 (2003).
5. **Lee S.L., Gear C.W.** Second-order accurate projective integrators for multiscale problems // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1 April 2007. – Vol. 201. – Issue 1. – P. 258–274.

References

1. Chadov, S.N. *Vestnik IGEU,* 2009, issue 4, pp. 49–52.
2. Hairer, E., Wanner, G. Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential-algebraic problems, Berlin: Springer-Verlag, 1996, 612 p.
3. Skvortsov, L.M. *Vychislitel'nye metody i programmirovanie*, 2008, no. 9, pp. 154–162.
4. Gear, C.W., Kevrekidis, I.G. Projective Methods for Differential Equations, NECI Technical Report NECI-TR 2001-029, Apr. 2001, also SIAM J. Sci. Comp. 24(4), pp.1091–1106 (2003).
5. Lee S.L., Gear C.W. Second-order accurate projective integrators for multiscale problems, in Journal of Computational and Applied Mathematics, 1 April 2007, vol. 201, issue 1, pp. 258–274.

Чадов Сергей Николаевич,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
соискатель кафедры высокопроизводительных вычислительных систем,
e-mail: sergei.chadov@gmail.com