

УДК 621.928

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ВОЛОКОН В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

АНАНЬЕВ С.С., студ., МИЗОНОВ В.Е., д-р техн. наук, проф.

Предложена математическая модель волокна, представляющая его совокупностью точек, подчиненных жестким связям. Модель позволяет описывать движение волокна в потоке вязкой жидкости или газа и прогнозировать эволюцию его формы и ориентации.

Задача прогнозирования поведения волокнистых материалов актуальна для довольно широкого спектра химических технологий и смежных отраслей. Несмотря на то, что задача моделирования движения одиночных частиц в потоке газа достаточно хорошо сформулирована, математических моделей движения волокнистых материалов практически не существует, что значительно усложняет проектирование соответствующих технологических процессов. Ниже рассмотрен один из возможных подходов к решению этой задачи.

Идеальную модель гибкого волокна можно представить в виде тонкой нерастяжимой нити. Будем считать, что волокно имеет постоянные по его длине линейную плотность λ и коэффициент изгибной жесткости w . Длина волокна равна l . Тогда его масса определится выражением $m=\lambda l$. Коэффициент изгибной жесткости w определим как потенциальную энергию свернутого в кольцо волокна единичной длины.

Несмотря на кажущуюся простоту этой модели, описать с ее помощью движение гибкого волокна в потоке вязкой жидкости или газа весьма затруднительно. Поэтому возникла идея рассматривать волокно как совокупность тонких, невесомых и нерастяжимых стержней, соединенных друг с другом посредством точечных шарниров, имеющих определенную массу. Будем при этом считать, что массы всех шарниров новой модели одинаковы, а длины соединяющих их стержней также равны. Это следует из условия постоянной линейной плотности идеального волокна.

Если число стержней, соединенных шарнирами, обозначить как n , то длина одного стержня равна $\Delta l=l/n$, а масса одного шарнира - $\Delta m=m/(n+1)$.

Положение i -го шарнира модели определяется радиус-вектором r_i . Каждый i -ый стержень модели можно представить в виде вектора, соединяющего i -й и $(i+1)$ -й шарнир: $\Delta r_i=r_{i+1}-r_i$

Эту модель волокна иллюстрирует рис. 1.

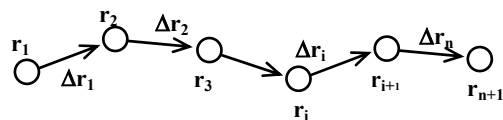


Рис. 1 Расчетная модель волокна

Очевидно, что модуль любого вектора Δr_i равен длине стержня Δl . Это значит, что имеет место равенство

$$\left(\frac{\Delta r_i}{\Delta l}\right)^2 = 1. \quad (1)$$

Это равенство является условием нерастяжимости идеального волокна.

Продифференцировав два раза по времени обе части этого равенства, получим

$$\frac{\Delta r_i}{\Delta l} \frac{\Delta \dot{r}_i}{\Delta l} + \left(\frac{\Delta \dot{r}_i}{\Delta l}\right)^2 = 0. \quad (2)$$

Для определения вектора ускорения i -го шарнира необходимо знать все действующие на него силы. При отсутствии изгибной упругости это внешние силы Q_i , а также силы реакции $(i-1)$ -го и i -го отходящих от него стержней. Обозначим величину силы реакции i -го стержня как N_i . Условимся, что если имеет место растяжение стержня, то $N_i > 0$, а если имеет место сжатие, то $N_i < 0$. Очевидно, что направление этой силы соответствует единичному вектору $\frac{\Delta r_i}{\Delta l}$.

Следовательно, на i -й шарнир со стороны этого стержня действует сила $N_i \frac{\Delta r_i}{\Delta l}$, а на $(i+1)$ -й

шарнир - сила $-N_i \frac{\Delta r_i}{\Delta l}$.

Для i -го и $(i+1)$ -го шарниров в соответствии со вторым законом Ньютона имеем:

$$\ddot{r}_i = \frac{1}{\Delta m} \left(Q_i + N_i \frac{\Delta r_i}{\Delta l} - N_{i-1} \frac{\Delta r_{i-1}}{\Delta l} \right); \quad (3)$$

$$\ddot{r}_{i+1} = \frac{1}{\Delta m} \left(Q_{i+1} + N_{i+1} \frac{\Delta r_{i+1}}{\Delta l} - N_i \frac{\Delta r_i}{\Delta l} \right). \quad (4)$$

Вычтем из уравнения (4) уравнение (3), поделим обе части получившегося равенства на Δl и, используя обозначение $\Delta \mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_i$, получим

$$\frac{\Delta \ddot{\mathbf{r}}_i}{\Delta l} = \frac{1}{\Delta m} \left(\frac{\Delta \mathbf{Q}_i}{\Delta l} + \frac{1}{\Delta l} \left(N_{i-1} \frac{\Delta \mathbf{r}_{i-1}}{\Delta l} - 2N_i \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta l} + N_{i+1} \frac{\Delta \mathbf{r}_{i+1}}{\Delta l} \right) \right). \quad (5)$$

Это уравнение справедливо для всех i в интервале от 2 до $(n-1)$. При $i=1$ в уравнении отсутствует член $N_{i-1} \frac{\Delta \mathbf{r}_{i-1}}{\Delta l}$, а при $i=n$ - член

$$N_{i+1} \frac{\Delta \mathbf{r}_{i+1}}{\Delta l}.$$

Подставив в уравнение (2) вместо $\frac{\Delta \ddot{\mathbf{r}}_i}{\Delta l}$ правую часть уравнения (5), после преобразований получим

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta l} \frac{\Delta \mathbf{r}_{i-1}}{\Delta l} N_{i-1} - 2N_i + \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta l} \frac{\Delta \mathbf{r}_{i+1}}{\Delta l} N_{i+1} = \\ & = - \left[\frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta l} \frac{\Delta \mathbf{Q}_i}{\Delta l} + \left(\frac{\Delta \ddot{\mathbf{r}}_i}{\Delta l} \right)^2 \Delta m \right] \Delta l \end{aligned} \quad (6)$$

При $i=1 \dots n$ последнее уравнение превращается в систему n линейных алгебраических уравнений с неизвестными N_1, N_2, \dots, N_n . Решение этой системы дает неизвестные силы реакции стержней. Подставляя значения этих сил в соотношение (3), получаем уравнение движения i -го шарнира.

В шарнирно-стержневой модели не абсолютно гибкого волокна на каждый шарнир, кроме внешних сил и сил реакции стержней, действуют также силы, обусловленные изгибной жесткостью волокна.

В идеальной модели волокна коэффициентом изгибной жесткости w мы называли потенциальную энергию свернутого в кольцо волокна единичной длины. Это же определение можно распространить и на шарнирно-стержневую модель волокна. Однако, используя это определение, невозможно вычислить внутренние силы, возникающие в волокне из-за изгибной жесткости.

Поэтому для шарнирно-стержневой модели целесообразно ввести еще один коэффициент изгибной жесткости, который позволит вычислить величины этих сил. Обозначим его буквой k и определим его как коэффициент пропорциональности между изгибающим моментом, возникающим в i -ом шарнире, и углом между векторами $\Delta \mathbf{r}_{i-1}$ и $\Delta \mathbf{r}_i$. Между величинами w и k можно установить связь:

$$w = 2\pi^2 k \Delta l. \quad (7)$$

Вектор изгибающего момента, возникающего в i -ом шарнире, направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат отходящие от него стержни, то есть перпендикулярно векторам $\Delta \mathbf{r}_{i-1}$ и $\Delta \mathbf{r}_i$. Как было сказано, величина этого момента прямо пропорциональна углу между этими векторами. Однако, если число стержней в модели достаточно велико ($n \rightarrow \infty, \Delta l \rightarrow 0$), то этот угол достаточно мал ($\phi_i \rightarrow 0$), и можно записать, что $\phi_i \approx \sin \phi_i$. Тогда величина момента равна $M_i \approx k \sin \phi_i$.

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что при малом угле ϕ_i вектор изгибающего момента, возникающего в i -ом шарнире, равен произведению коэффициента изгибной жесткости k на векторное произведение единичных векторов $\Delta \mathbf{r}_{i-1}/\Delta l$ и $\Delta \mathbf{r}_i/\Delta l$. Тогда моменты, действующие на $(i-1)$ -й и i -й стержни со стороны i -го шарнира, определяются, соответственно, по формулам:

$$\mathbf{M}_{i,j-1} = k \frac{\Delta \mathbf{r}_{i-1}}{\Delta l} \times \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta l}; \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_{i,j} = k \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta l} \times \frac{\Delta \mathbf{r}_{i-1}}{\Delta l}.$$

Эти моменты обуславливают возникновение на концах каждого стержня пары сил. Эти силы приложены к шарнирам. Обозначим одну из этих сил, приложенную к j -тому шарниру со стороны i -го шарнира, как $\mathbf{P}_{i,j}$, причем $j = \pm 1$. Так как каждая из сил $\mathbf{P}_{i,i-1}, \mathbf{P}_{i,i+1}$, имеет пару, то на i -ый шарнир со стороны его же самого действуют силы $-\mathbf{P}_{i,i-1}$ и $-\mathbf{P}_{i,i+1}$. Сказанное иллюстрирует рис. 2.

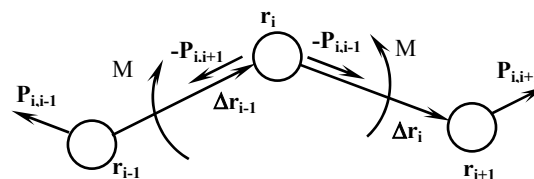


Рис. 2. Силы, обусловленные изгибной жесткостью волокна

Величины и направления изгибающих сил таковы, что

$$\mathbf{M}_{i,j-1} = \mathbf{P}_{i,j-1} \times \Delta \mathbf{r}_{i-1} = - \frac{\Delta \mathbf{r}_{i-1}}{\Delta l} \times \mathbf{P}_{i,j-1} \Delta l; \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_{i,j+1} = \Delta \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_{i,j+1} = - \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta l} \times \mathbf{P}_{i,j+1} \Delta l.$$

Сравнивая уравнения (8) и (9), с учетом (7) можно записать

$$P_{i,j-1} = -\frac{k}{\Delta l} \frac{\Delta r_i}{\Delta l} = -\frac{w}{2\pi^2 \Delta l^2} \frac{\Delta r_i}{\Delta l}, \quad (10)$$

$$P_{i,j+1} = \frac{k}{\Delta l} \frac{\Delta r_{i-1}}{\Delta l} = \frac{w}{2\pi^2 \Delta l^2} \frac{\Delta r_{i-1}}{\Delta l}.$$

Так как на *i*-ый шарнир действуют силы $P_{i-1,i}$, $P_{i+1,i}$, $-P_{i,i-1}$, $-P_{i,i+1}$, то суммарная сила, обусловленная изгибной жесткостью, действующая на *i*-й шарнир, равна

$$P_i = P_{i-1,i} - P_{i,i-1} - P_{i,i+1} + P_{i+1,i} = \frac{w}{2\pi^2 \Delta l^2} \left(\frac{\Delta r_{i-2}}{\Delta l} - \frac{\Delta r_{i-1}}{\Delta l} + \frac{\Delta r_i}{\Delta l} - \frac{\Delta r_{i+1}}{\Delta l} \right). \quad (11)$$

При $i=1$ в последнем уравнении присутствует только последнее слагаемое, при $i=n+1$ - присутствует только первое, при $i=2$ - отсутствует первое, при $i=n$ - отсутствует последнее.

При вычислении сил реакции стержней в системе (6) векторы Q_i заменяются векторами $Q_i + P_i$. Уравнение движения для *i*-го шарнира получается из уравнения (3) путем такой же замены.

Сумма внешних сил Q_i , действующих на *i*-ый шарнир, складывается из двух составляющих: силы тяжести F_{Ti} и силы сопротивления среды F_{Ci} .

Если масса одного шарнира - Δm , а g - ускорение свободного падения, то сила тяжести, действующая на каждый из шарниров, равна $F_{Ti} = \Delta m g$.

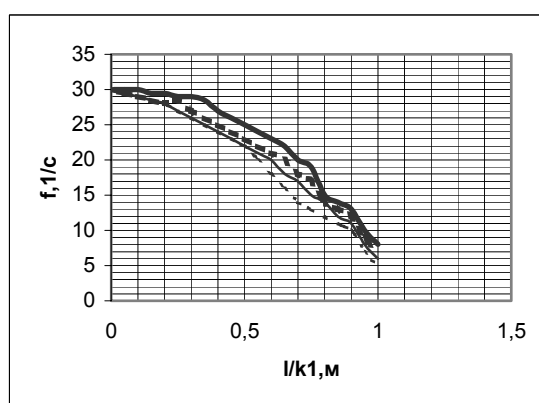
Определим теперь силу сопротивления среды. Пусть скорость газа или жидкости в каждой точке пространства r равна $U(r)$. Тогда скорость движения *i*-го шарнира относительно среды равна $v_{отнi} = \dot{r}_i - U(r_i)$. Если коэффициент сопротивления шарнира среде обозначить как c , то силу сопротивления можно найти по формуле $F_{Ci} = -c v_{отнi}$.

Однако, если учитывать только поперечную составляющую силы сопротивления, пренебрегая продольной, то эта сила действует только в направлении, перпендикулярном ориентации волокна в данной точке. Поэтому, вычитая из предыдущего результата продольную составляющую силы сопротивления, получаем окончательную формулу:

$$F_{Ci} = -c \left[v_{отнi} - \frac{1}{2} \left(v_{отнi} \frac{\Delta r_{i-1}}{\Delta l} \right) \frac{\Delta r_{i-1}}{\Delta l} - \frac{1}{2} \left(v_{отнi} \frac{\Delta r_i}{\Delta l} \right) \frac{\Delta r_i}{\Delta l} \right]. \quad (12)$$

Описанная модель волокна была запрограммирована на языке Turbo Pascal, а также в системе Matlab. Было рассчитано движение волокна в восходящем течении Пуазейля.

Особенно интересные результаты были получены, когда скорость этого течения менялась во времени по синусоидальному закону. Было замечено, что волокно конкретной длины и с конкретной изгибной жесткостью при определенной частоте изменения скорости течения двигалось быстрее волокон, имеющих ту же линейную плотность и коэффициент сопротивлению среды, но другую длину и изгибную жесткость. Будем называть эту частоту резонансной. В результате проведения вычислительных экспериментов получены графики зависимостей резонансной частоты потока от длины волокна и его изгибной жесткости (рис. 3). Величина изгибной жесткости меняется от нуля до практически бесконечности.



- - $w/k_2=0$
- - $w/k_2=0,001 \text{ м}^4/\text{с}$
- · — · — · - $w/k_2=0,01 \text{ м}^4/\text{с}$
- - $w/k_2=1 \text{ м}^4/\text{с}$

Рис. 3. Графики зависимостей резонансной частоты потока от длины волокна и его изгибной жесткости

На рис. 3 $k_1 = hg\lambda/cU_{\max}$, $k_2 = U_{\max}\lambda/h$, где h - ширина трубы, U_{\max} - максимальная скорость потока.

Полученные данные могут быть использованы для разработки принципиально нового способа разделения волокон по их длине и жесткости путем регулирования скорости потока, в котором они находятся.