УДК 681.5.015

Идентификация непрерывных многомерных систем. Дискретно-подобные системы

А.Р. Гайдук[1], И.А. Каляев[2], С.Г. Капустян[2], В.Н. Рябченко[3]
[1] Кисловодский гуманитарно-технический институт
[2] ФГАОУВП «Южный федеральный университет» г. Таганрог, Российская Федерация
[3] Магистральные электрические сети центра – филиал «ФСК ЕЭС» г. Москва, Российская Федерация
E-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Большинство известных методов идентификации ориентированы на одномерные управляемые системы и малоэффективны в многомерном случае. Поэтому актуальной является разработка эффективных методов идентификации многомерных систем, ориентированных на реализацию с помощью современных высокопроизводительных вычислительных систем с параллельной обработкой информации.
Материалы и методы: Используются аналитические соотношения между порядком, коэффициентами математической модели многомерной системы, ее марковскими параметрами и дискретными значениями ее реакции на ступенчатые воздействия.
Результаты: Разработан эффективный алгоритм идентификации многомерных непрерывных управляемых систем, в котором используются системные инварианты – марковские параметры.
Выводы: Полученные результаты могут найти применение в энергетической, космической, авиационной промышленности, робототехнике и приборостроении.

Ключевые слова: система управления, передаточная матрица, марковские параметры, идентификация, алгоритм идентификации, высокопроизводительная вычислительная система.

Identification of continuous multivariable systems. Discretely similar systems

A.R. Gaiduk[1], I.A. Kaliaev[2], S.G. Kapustyan[2], V.N. Ryabchenko[3]
[1] Kislovodskiy humanitarian-technical institute, Kislovodsk, Russian Federation
[2] Southern federal university, Taganrog, Russian Federation
[3] Main electricity transmission company «CENTER» – «ФGC UES», Moscow, Russian Federation
E-mail: gaiduk_2003@mail.ru, mvs@mvs.sfedu.ru

Abstract

Background: The majority of known identification methods are focused on one-dimensional controlled systems and are ineffective in multivariable ones. Therefore, it is urgent to develop effective identification methods for multivariable systems operating with the help of modern high-efficiency computing systems with parallel information processing.
Materials and Methods: The study employs the analytical relations of the order and coefficients of the mathematical model of a multivariable system, its Markov parameters and discrete values of its reaction to the step input.
Results: The authors have developed an effective algorithm for identifying multivariable continuous controlled systems using the system invariants – Markov parameters.
Conclusions: The obtained results can be used in power engineering, space, aviation industries, robotics and instrument making.

Key words: control system, transfer matrix, Markov parameters, identification, identification algorithm, high-performance computing system.

В тех случаях, когда математическая модель управляемой системы априори неизвестна, обычно применяется адаптивное управление. Наиболее совершенным является самоорганизующееся адаптивное управление [1, 2]. В традиционных методах адаптивного управления обычно предполагается, что порядок системы известен априори и не изменяется в процессе ее функционирования [3]. При самоорганизующемся управлении математическая модель системы, необходимая для создания алгоритма управления, формируется путем оперативной идентификации в процессе функционирования системы. Это приводит к необходимости оперативной обработки большого объема данных и решения значительного круга задач. Соответствующие операции могут быть выполнены за короткое время только вычислительными средствами с высокой производительностью, что требует разработки специальных методов идентификации, ориентированных на цифровую реализацию [2, 4].

К настоящему времени разработано достаточно много алгоритмов идентификации управляемых систем [4, 5, 6, 7]. Однако большая часть из них ориентирована на одномерные системы с одним входом и выходом, причем эти методы, как правило, не учитывают дискретность цифровых методов обработки информации.

Ниже на основе результатов, полученных в работах [1, 4, 8], разрабатывается эффективный алгоритм идентификации многомерных систем управления, который базируется на использовании марковских параметров, являющихся инвариантами динамических управляемых систем. В этом алгоритме учитывается дискретность цифровых алгоритмов идентификации, что существенно повышает его эффективность, в особенности при управлении сложными распределенными системами, такими как энергосистемы или группы мобильных роботов [9, 10]. Кроме того, он позволяет распараллелить алгоритм идентификации, что значительно уменьшает время идентификации [10, 11].

Постановка задачи. Предположим, неопределенная многомерная система управления (МСУ) описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx + Du, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния размерности n; $u \in R^q$ – вектор управлений; $y \in R^l$ – вектор выходных переменных системы; A, B, C, D – числовые матрицы соответствующих размерностей [1, 5, 12]. При этом как порядок системы, так и коэффициенты указанных матриц заранее неизвестны и могут претерпевать скачкообразные изменения, оставаясь затем неизменными в течение достаточно длительного интервала времени. Порядок МСУ (1) во всех случаях не превышает заранее известного значения $n_{\max}$, а сама система является полной [12]. Управляемые переменные y_i, $i = \overline{1,l}$, доступны прямому измерению.

Поставим задачу идентификации непрерывной МСУ (1) по результатам измерения ее реакции на некоторые управляющие воздействия при нулевых начальных условиях, предполагая, что изменение вектора управлений в целях идентификации допустимо.

Решение. В связи с поставленной задачей рассмотрим на интервале времени $t \in \overline{0 \div t_{idn}}$ вектор $y^j = y^j(t)$ управляемых переменных непрерывной системы (1), который является реакцией на пробное управление $u^j(t) = [0 \ldots 0\; u_{j0}\; 0 \ldots 0]^T 1(t)$, где $j \in [1, q]$, $u_{j0} = const$ – постоянное управление, допустимое для всех каналов $u_j \to y_i$, $i = \overline{1,l}$. На рис. 1 приведен график одной из переменных $y_i^j(t)$ и показаны ее отсчеты $y_{ik}^j = y_i^j(kT)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, взятые с периодом $T = 1$ с.

Как показано в [8], по результатам измерения реакции многомерной дискретной системы на скалярные дискретные управления вида $\tilde{u}_k^j = [0 \ldots 0\; \tilde{u}_{jk}\; 0 \ldots 0]^T$, $j = \overline{1,q}$, можно восстановить порядок и все коэффициенты передаточной матрицы этой дискретной системы.

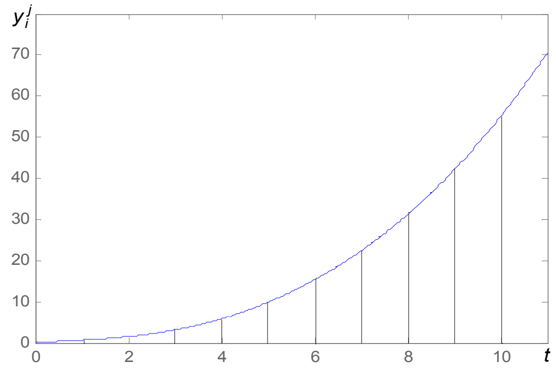

Рис. 1. График выходной переменной системы (18)

Имея это в виду, будем рассматривать указанные выше отсчеты $y_{ik}^j = y_i^j(kT)$, $i = \overline{1,l}$, $j = \overline{1,q}$, реакции непрерывной системы (1) как реакцию при нулевых начальных условиях на дискретное управляющее воздействие $\tilde{u}_k^j = [0 \ldots 0\; \tilde{u}_{jk}\; 0 \ldots 0]^T$, где $\tilde{u}_{jk} = u_{j0}$, некоторой *дискретной системы* с периодом T, уравнения которой имеют вид

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}\tilde{u}_k, \qquad \tilde{y}_k = \tilde{C}\tilde{x}_k + \tilde{D}u_k. \tag{2}$$

Здесь $\tilde{x}_k$ – вектор переменных состояния; $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$ – матрицы этой дискретной системы; $\tilde{u}_k$ и $\tilde{y}_k$ – векторы значений дискретных управляющих воздействий и выходных величин соответственно при $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Другими словами, примем, что при всех $t = kT$ и нулевых начальных условиях $x_0 = 0$ и $\tilde{x}_0 = 0$ выполняются условия

$$\tilde{u}_{jk} = u_{j0}, \ \tilde{y}_k = y_k, \ \tilde{y}_k^j = y_k^j, \ j = \overline{1,q}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

и введем следующее определение.

Определение. Система (2) называется *дискретно-подобной системой*, соответствующей непрерывной системе (1), если по отношению к системам (1) и (2) выполняются условия (3).

В определении дискретно-подобной системы, как видно, не фигурирует порядок n непрерывной системы. Следовательно, дискретно-подобных систем, соответствующих непрерывной системе, может быть несколько, и они могут иметь порядки.

Основным условием подобия систем является равенство выходных переменных дискретной и непрерывной систем при всех $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ и одних и тех же значениях управлений $\tilde{u}_{jk} = u_{j0}$, $j = \overline{1,q}$. Из приведенного определения следует, что при выполнении условий (3) дискретно-подобная система (2), порядок которой равен порядку непрерывной системы (1), имеет передаточную матрицу $\tilde{W}_{\tilde{y}\tilde{u}}(z)$, связанную с передаточной матрицей непрерывной системы (1) прямым Z_T-преобразованием [13], т.е.

$$\tilde{W}_{\tilde{y}\tilde{u}}(z) = Z_T\left\{W_{yu}(p)\right\}. \qquad (4)$$

Справедливо и обратное преобразование:

$$W_{yu}(p) = Z_T^{-1}\left\{\tilde{W}_{\tilde{y}\tilde{u}}(z)\right\}. \qquad (5)$$

Таким образом, для решения задачи идентификации непрерывной управляемой системы достаточно определить порядок n и передаточную матрицу $\tilde{W}_{\tilde{y}\tilde{u}}(z)$ соответствующей дискретно-подобной системы, а затем найти искомую матрицу $W_{yu}(p)$ по выражению (5). Перейдем к реализации этого подхода.

Порядок дискретно-подобных систем будем обозначать символом ν и, следуя А.А. Красовскому, называть его *пробным порядком*, дискретную систему (2) порядка ν – *пробной системой*, предполагая, что $\nu = \overline{1, n_{\max}}$, а управления $\tilde{u}_k^j = [0\ldots0\; u_{jk}\; 0\ldots0]^T$, $j = \overline{1, q}$ – *пробными управлениями* [2, 14].

В соответствии с результатами работы [8], для системы (2), как дискретной системы с периодом T, при нулевых начальных условиях и управлениях $\tilde{u}_k^j = [0\ldots0\; \tilde{u}_{jk}\; 0\ldots0]^T$ имеют место следующие выражения:

$$\tilde{y}_k^j = \sum_{\rho=0}^{k} \tilde{M}_{Tj}^{k-\rho}\tilde{u}_{j\rho}, \quad j = \overline{1, q}, \qquad (6)$$

где $\tilde{M}_{Tj}^0 = \tilde{D}_j$, $\tilde{M}_{Tj}^{\upsilon} = \tilde{C}\tilde{A}^{\upsilon-1}\tilde{B}^j$ – j-е столбцы матриц $\tilde{M}_T^{\upsilon}$, $\upsilon = 0, 1, 2, \ldots$, марковских параметров пробной дискретно-подобной системы (2) с периодом T. Наличие T в индексах матриц марковских параметров в (6) связано с тем, что результаты прямого и обратного Z_T-преобразований (4), (5) существенно зависят от значения периода T.

При $\tilde{u}_{jk} = u_{j0}$, последовательных значениях $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $j = \overline{1, q}$ выражение (6) приводит к следующей системе рекуррентных уравнений:

$$\tilde{y}_0^j = \tilde{M}_{Tj}^0 u_{j0}, \quad \tilde{y}_1^j = \left[\tilde{M}_{Tj}^1 + \tilde{M}_{Tj}^0\right]u_{j0},$$

$$\tilde{y}_2^j = \left[\tilde{M}_{Tj}^2 + \tilde{M}_{Tj}^1 + \tilde{M}_{Tj}^0\right]u_{j0}, \ldots,$$

$$\tilde{y}_k^j = \left[\tilde{M}_{Tj}^k + M_{Tj}^{k-1} + \ldots + \tilde{M}_{Tj}^1 + \tilde{M}_{Tj}^0\right]u_{j0}.$$

При $\upsilon = 1, 2, \ldots$ и $j = \overline{1, q}$ выводим

$$\tilde{M}_{Tj}^0 = \frac{\tilde{y}_0^j}{u_{j0}}, \quad \tilde{M}_{Tj}^{\upsilon} = \frac{\tilde{y}_{\upsilon}^j}{u_{j0}} - \sum_{\rho=0}^{\upsilon-1}\tilde{M}_{Tj}^{\rho}. \qquad (7)$$

Полученные рекуррентные соотношения (7), очевидно, позволяют по соответствующему числу дискретных значений векторов управляемых переменных $\tilde{y}_k^j$ и значениям u_{j0}, $j = \overline{1, q}$, найти любое число N_μ матриц $\tilde{M}_T^{\upsilon} = [\tilde{M}_{T1}^{\upsilon}\, \tilde{M}_{T2}^{\upsilon} \ldots \tilde{M}_{Tq}^{\upsilon}]$, $\upsilon = 0, 1, 2, \ldots, N_\mu - 1$, марковских параметров $\tilde{\mu}_{ij}^{\upsilon}(T)$ пробных дискретно-подобных систем (2) независимо от значения пробного порядка $\nu = \overline{1, n_{\max}}$.

С другой стороны, как показано в [8], на основе найденных $N_\mu = 2n_{\max} + 4$ матриц $\tilde{M}_T^{\upsilon}$ марковских параметров $\tilde{\mu}_{ij}^{\upsilon}(T)$, $\upsilon = \overline{0, N_\mu - 1}$, можно найти передаточные матрицы $\tilde{W}_{\tilde{y}\tilde{u}}(z, \nu, T)$ всех пробных дискретно-подобных систем (2) порядков $\nu = \overline{1, n_{\max}}$ следующего вида:

$$\tilde{W}_{\tilde{y}\tilde{u}}(z, \nu, T) = \tilde{A}^{-1}(z, \nu, T)\left\{\tilde{B}_{\nu T}^{\nu}z^{\nu} + \tilde{B}_{\nu T}^{\nu-1}z^{\nu-1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \tilde{B}_{\nu T}^1 z + \tilde{B}_{\nu T}^0\right\}, \qquad (8)$$

$$\text{где } \tilde{B}_{\nu T}^{\rho} = \sum_{\eta=\rho}^{\nu}\tilde{\alpha}_{\nu\eta}\tilde{M}_T^{\eta-\rho}, \quad \rho = \overline{0, \nu-1}; \qquad (9)$$

$$\tilde{A}(z, \nu, T) = \tilde{\alpha}_{\nu,\nu}z^{\nu} + \tilde{\alpha}_{\nu,\nu-1}z^{\nu-1} + \ldots + \tilde{\alpha}_{\nu,1}z + \tilde{\alpha}_{\nu,0}, \qquad (10)$$

где $\tilde{\alpha}_{\nu\nu} = 1$.

В выражениях (9), (10) коэффициенты $\tilde{\alpha}_{\nu\rho}$ определяются решением систем уравнений

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{ij}^{s+1} & \tilde{\mu}_{ij}^{s+2} & \ldots & \tilde{\mu}_{ij}^{s+\nu} \\ \tilde{\mu}_{ij}^{s+2} & \tilde{\mu}_{ij}^{s+3} & \ldots & \tilde{\mu}_{ij}^{s+\nu+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mu}_{ij}^{s+\nu} & \tilde{\mu}_{ij}^{s+\nu+1} & \ldots & \tilde{\mu}_{ij}^{s+2\nu-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{\nu,0} \\ \tilde{\alpha}_{\nu,1} \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_{\nu,\nu-1} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{ij}^{s+\nu+1} \\ \tilde{\mu}_{ij}^{s+\nu+2} \\ \vdots \\ \tilde{\mu}_{ij}^{s+2\nu} \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

$\nu = \overline{1, n_{\max}}$,

при различных значениях $s = 0, 1, 2, \ldots$.

Подчеркнем, что в равенствах (9) – (11) при всех пробных порядках $\nu = \overline{1, n_{\max}}$ фигурируют одни и те же марковские параметры $\tilde{\mu}_{ij}^{\upsilon}$ и соответствующие им матрицы $\tilde{M}_T^{\upsilon}$, $\upsilon = 0, 1, 2, \ldots, N_\mu - 1$, определяемые по формулам (7) при некотором значении периода дискретизации T [7, 8].

Далее, подвергая обратному Z_T-преобразованию (5) найденные передаточные матрицы $W_{\tilde{y}\tilde{u}}(z, \nu, T)$ (8), получим соответствующие передаточные матрицы $W_{yu}(p, \nu, T)$, которые для дальнейшего удобно представить следующим образом:

$$W_{yu}(p, \nu, T) = A^{-1}(p, \nu, T)\left\{B_{\nu T}^{\nu}p^{\nu} + B_{\nu T}^{\nu-1}p^{\nu-1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + B_{\nu T}^1 p + B_{\nu T}^0\right\}, \qquad (12)$$

$$A(p, \nu, T) = \alpha_{\nu T}^{\nu}p^{\nu} + \alpha_{\nu T}^{\nu-1}p^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu T}^1 p + \alpha_{\nu T}^0, \qquad (13)$$

где $\nu = \overline{1, n_{\max}}$, $\alpha_{\nu T}^{\nu} = 1$.

Отметим, что преобразование (5) легко реализуется программным путем. В частности, в широко распространенном в настоящее время пакете MATLAB это преобразование реализуется функцией D2C с расширением «hold».

По коэффициентам передаточных матриц $W_{yu}(p, \nu, T)$ (12), (13) легко определяются соответствующие матрицы $M_{\nu T}^{\upsilon}$ марковских параметров $\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T)$ виртуальных непрерывных систем различных порядков по следующим формулам:

$$M_{\nu T}^{0}=B_{\nu T}^{0}, \quad M_{\nu T}^{1}=B_{\nu T}^{\nu-1}-\alpha_{\nu T}^{\nu-1}M_{\nu T}^{0},$$

$$M_{\nu T}^{2}=B_{\nu T}^{\nu-2}-\alpha_{\nu T}^{\nu-2}M_{\nu T}^{0}-\alpha_{\nu T}^{\nu-1}M_{\nu T}^{1}, \ \ldots$$

или $M_{\nu T}^{0}=B_{\nu T}^{0}$,

$$M_{\nu T}^{\rho}=B_{\nu T}^{\nu-\rho}-\sum_{\eta=0}^{\rho-1}\alpha_{\nu T}^{\nu-\rho+\eta}M_{\nu T}^{\eta}, \quad \rho=\overline{1,\nu}; \tag{14}$$

$$M_{\nu T}^{\rho}=\sum_{\eta=0}^{\nu-1}\alpha_{\nu T}^{\eta}M_{\nu T}^{\rho-\nu+\eta}, \ \rho=\nu,\nu+1,\nu+2,\ldots. \tag{15}$$

Полученные путем обратного Z_T-преобразования (5) передаточные матрицы $W_{yu}(p,\nu,T)$ еще нельзя считать решением задачи идентификации системы (1), так как искомой является лишь одна из них – порядка $n \le n_{\max}$.

Для определения неизвестного порядка n системы (1) используется оригинальный метод, основанный на исследовании влияния периода квантования T на значения марковских параметров пробных непрерывных систем различных порядков $\nu=\overline{1,n_{\max}}$.

Применение соотношений (7)–(15) к реакциям систем (1) с известными параметрами свидетельствует, что найденные с их помощью передаточные матрицы $W_{yu}(p,\nu,T)$ и значения марковских параметров $\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T)$ существенным образом зависят как от порядка ν пробной системы, так и от периода дискретизации T. Причем существует некоторое *оптимальное* значение T° периода T, при котором зависимость значений марковских параметров $\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T)$ от T *минимальна*.

Определение оптимального периода дискретизации. Для этой цели используется величина

$$R(\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T))=\left(1-\frac{\min\left\{\left|\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T)\right|,\left|\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T+\tau)\right|\right\}}{\max\left\{\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T),\left|\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T+\tau)\right|\right\}}\right)100\,\%, \tag{16}$$

где $\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T)$ и $\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T+\tau)$ – значения марковского параметра μ_{ij}^{υ}, определяемые соотношениями (7)–(15) при T и $T+\tau$ соответственно [14].

Согласно (16), величина $R(\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T))$ характеризует относительное изменение марковского параметра $\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T)$ при изменении периода дискретизации с T на $T+\tau$, т.е., фактически, влияние изменения периода дискретизации T на значение марковского параметра $\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T)$.

Аналитически оптимальное значение периода дискретизации T° определяется следующим выражением:

$$T^{\circ}(\nu,\mu_{ij}^{\upsilon})=\arg\left\{T\left|\min_{T}R\left(\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T)\right)\right.\right\}. \tag{17}$$

Рассмотрим влияние периода дискретизации на значения марковских параметров $\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T)$ на численном примере определенной системы третьего порядка, уравнения которой имеют вид

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0,1\\0&1&-0,9\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1&-0,2\\-0,3&1,93\\0,98&0,7\end{bmatrix}u, \tag{18}$$

$$y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}x.$$

Передаточная матрица системы (18) имеет вид

$$W_{yu}(p)=\begin{bmatrix}\dfrac{0,98p^2-0,3p+1}{p^3+0,9p^2-0,1p} & \dfrac{0,7p+2}{p^2+p}\end{bmatrix} \tag{19}$$

или в форме (12):

$$W_{yu}(p)=A^{-1}(p)\left\{B^3p^3 \quad B^2p^2 \quad B^1p \quad B^0\right\}, \tag{20}$$

где полином и матрицы имеют вид

$A(p)=p^3+0,9p^2-0,1p$, $B^3=[0 \quad 0]$, $B^2=[0,98 \quad 0,7]$, $B^1=[-0,3 \quad 1,93]$, $B^0=[1 \quad -0,2]$.

Подчеркнем, что определение именно передаточной матрицы $W_{yu}(p)$ в виде (19) или (20) и является целью идентификации неопределенных управляемых многомерных систем типа (1).

График выходной переменной $y_1^1(t)$ канала $u_1 \to y_1$ системы (18) при управлении $u^1(t)=[1 \quad 0]^T 1(t)$, построенный в MATLAB с дискретностью $\tau=0,01\,c$, и ее отсчеты $y_{1k}^1=y_1^1(kT)$ при $T=1\,c$ и $k=\overline{1,10}$ показаны на рис. 1. В рассматриваемом случае пробный порядок дискретноподобных систем изменялся в пределах от 1 до 4.

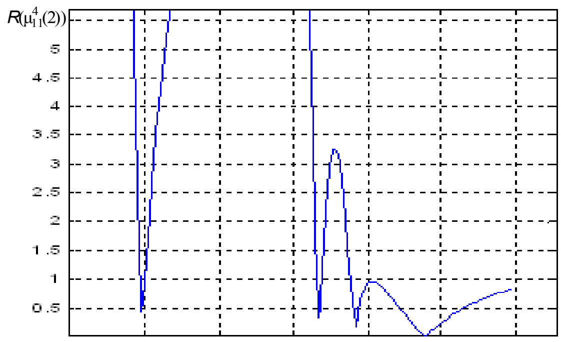

Рис. 2. Зависимость величины $R(\mu_{11}^4(2,T))$ от периода T

При построении зависимости $R(\mu_{11}^{\upsilon}(\nu,T))$ от T с применением соотношений (7)–(16) по отсчетам выходной переменной $y_1^1(t)$ канала $u_1 \to y_1$ системы (18) период дискретизации T изменялся в пределах от 0,3 до 2 с шагом $\tau = 0{,}01$. Для наглядности на рис. 2 приведена лишь та часть полного графика зависимости $R(\mu_{11}^{\upsilon}(\nu,T))$ от T при $\nu = 2$, $\upsilon = 4$, которая соответствует значениям периода T от 0,8 до 2 с и $R(\mu_{11}^{4}(2,T)) \le 5{,}7$.

Аналогичный вид имеют зависимости $R(\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T))$ и при других значениях i, j, υ, ν. Эти зависимости наглядно свидетельствуют о наличии оптимального периода дискретизации T° выходной переменной непрерывной системы. При этом значение T° зависит как от пробного порядка ν, так и от самих марковских параметров, т.е. $T^{\circ} = T^{\circ}(\nu, \mu_{ij}^{\upsilon})$. Например, определенный по выражению (17) при $\nu = 2$ $T^{\circ}(2, \mu_{11}^{2}) = 1{,}55$, а $T^{\circ}(2, \mu_{11}^{4}) = 1{,}76$ (рис. 2).

Оценивание марковских параметров $\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T^{\circ})$ непрерывных систем с определением оптимального периода $T^{\circ} = T^{\circ}(\nu, \mu_{ij}^{\upsilon})$, безусловно, усложняет процедуру идентификации неопределенных управляемых систем, но позволяет исключить влияние вспомогательного параметра T на результат идентификации.

Влияние пробного порядка. Для исследования влияния пробного порядка ν на результат оценивания марковских параметров непрерывной системы рассматривалась зависимость от ν величины $R(\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T^{\circ}))$, т.е. при $T = T^{\circ}$.

Результаты определения $T^{\circ}(\nu, \mu_{11}^{\upsilon})$, значений марковских параметров $\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T^{\circ})$, а также величины $R(\mu_{ij}^{\upsilon}(\nu,T^{\circ}))$ для канала $u_1 \to y_1$ системы (18) по соотношениям (7)–(17) при $\upsilon = \overline{1,\ 7}$ представлены в таблице, где для сравнения приведены и действительные значения марковских параметров μ_{11}^{υ} этого канала.

Анализ данных таблицы показывает, что если пробный порядок ν дискретно-подобной системы не совпадает с действительным порядком n_{11} полной части канала $u_1 \to y_1$ системы (18), то оптимальное значение $T^{\circ} = T^{\circ}(\nu, \mu_{ij}^{\upsilon})$ для каждого марковского параметра μ_{ij}^{υ} при этом значении ν различно. При этом получаемые значения марковских параметров существенно отличаются от действительных значений этих параметров. Если же пробный порядок ν дискретно-подобной системы (2) совпадает с действительным порядком n_{11} полной части канала $u_1 \to y_1$ неопределенной непрерывной системы, то оптимальное значение $T^{\circ} = T^{\circ}(\nu, \mu_{ij}^{\upsilon})$ для всех марковских параметров μ_{ij}^{υ} этого канала практически одинаково, а значения марковских параметров мало отличаются от точных значений. В этом случае и передаточная функция $W_{ij}(p,\nu,T^{\circ})$, очевидно, мало отличается от действительной передаточной функции $W_{ij}(p) = y_i(p)/u_j(p)$ этого канала.

Параметры μ_{11}^{υ} пробных систем

ν	μ_{11}^{υ}	μ_{11}^{1}	μ_{11}^{2}	μ_{11}^{3}	μ_{11}^{4}	μ_{11}^{5}	μ_{11}^{6}	μ_{11}^{7}
	Действительные значения	0,98	-1,182	2,162	-2,064	2,074	-2,073	2,073
2	$T^{\circ}(2,\mu_{11}^{\upsilon})$	1,48	1,55	1,55	1,76	1,64	1,61	1,86
	$\mu_{11}^{\upsilon}(2,T^{\circ})$	0,467	0,222	0,107	0,057	0,026	0,013	-0,005
	$R(\mu_{11}^{\upsilon}(2,T^{\circ}))$	0,009	0,005	0,095	0,03	0,031	0,371	0,041
3	$T^{\circ}(3,\mu_{11}^{\upsilon})$	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99
	$\mu_{11}^{\upsilon}(3,T^{\circ})$	0,995	-1,197	2,146	-2,04	2,04	-2,029	2,019
	$R(\mu_{11}^{\upsilon}(3,T^{\circ}))$	0,005	0,011	0,0114	0,018	0,024	0,03	0,036
4	$T^{\circ}(4,\mu_{11}^{\upsilon})$	0,92	1,08	1,01	1,09	1,18	1,28	1,38
	$\mu_{11}^{\upsilon}(4,T^{\circ})$	1,267	-1,713	2,339	-1,927	1,591	-1,256	0,958
	$R(\mu_{11}^{\upsilon}(4,T^{\circ}))$	0,002	0,002	0,0004	0,011	0,013	0,010	0,032

К аналогичному выводу приводит исследование зависимости величины $R(\mu_{11}^{\upsilon}(\nu,T^{\circ}))$ от ν и для канала $u_2 \to y_1$ управляемой системы (18). Это позволяет для определения оценки $\hat{n}_{ij}$ – степени знаменателя передаточной функции канала $u_j \to y_i$ использовать выражение

$$\hat{n}_{ij} = \arg\{\nu \,|\, \min D(\nu, T_{ij}^{\circ})\}, \tag{21}$$

где

$$D(\nu,T_{ij}^{\circ}) = \sum_{k=1}^{N_{\mu}} [T_{ij}^{\circ}(\nu,\mu_{ij}^{\upsilon}) - \bar{T}_{ij}^{\circ}(\nu,\mu_{ij}^{\upsilon})]^2 / N_{\mu},$$

$$\bar{T}_{ij}^{\circ}(\nu,\mu_{ij}^{\upsilon}) = \sum_{k=1}^{N_{\mu}} T_{ij}^{\circ}(\nu,\mu_{ij}^{\upsilon}) / N_{\mu}. \tag{22}$$

Отдельные каналы даже полной многомерной системы (1) могут быть неполными [4, 5, 12]. Поэтому в общем случае оценку $\hat{n}$ порядка идентифицируемой многомерной системы целесообразно определять по степени ее характеристического полинома $A(p)$, пользуясь следующими соотношениями:

$$\hat{A}(p) = \text{НОК}\{A_{ij}(p)\}, \quad \hat{n} = \deg \hat{A}(p), \tag{23}$$

где НОК – наименьшее общее кратное; $A_{ij}(p)$ – знаменатели полученных по (5) передаточных функций каналов системы

$$\hat{W}_{ij}(p,\hat{n}_{ij},T^{\circ}) = \frac{B_{ij}(p)}{A_{ij}(p)} = \left.\frac{\hat{B}_{ij}(p,\nu,T^{\circ})}{\hat{A}_{ij}(p,\nu,T^{\circ})}\right|_{\nu=\hat{n}_{ij}}. \tag{24}$$

Тогда передаточную матрицу $W_{yu}(p)$ неопределенной системы (1) можно оценить, пользуясь следующим выражением:

$$\hat{W}_{yu}(p)=\left[\frac{B_{ij}(p)Q_{ij}(p)}{A_{ij}(p)Q_{ij}(p)}\right], \tag{25}$$

где $Q_{ij}(p)=A(p)/A_{ij}(p)$, $i=\overline{1,l}$, $j=\overline{1,q}$.

Подчеркнем, что оценки $\hat{n}_{ij}$ (21) порядка и $\hat{W}_{ij}(p,\hat{n}_{ij},T^{\circ})$ (24) передаточной функции канала, согласно данным таблицы, фактически осуществляются в процессе определения по (5)–(17) оптимального периода дискретизации $T^{\circ}(\nu,\mu_{ij}^{\upsilon})$.

Например, реализация соотношений (5)–(17) для системы (18) приводит к следующим оценкам (21) и (24):

$\hat{n}_{11}=3$, $\hat{n}_{12}=2$,

$$\hat{W}_{11}(p)=\frac{0{,}9881p^2-0{,}3073p+0{,}978}{p^3+0{,}898p^2-0{,}0998p},$$

$$\hat{W}_{12}(p)=\frac{0{,}6999p+2{,}001}{p^2+p}. \tag{26}$$

Полученные оценки (26) мало отличается от точных передаточных функций (19).

Из изложенного выше вытекает следующий алгоритм идентификации непрерывных многомерных систем управления.

Алгоритм идентификации МСУ. Исходные данные: допустимые управляющие воздействия $u_k^j=[0\ldots0\,u_{jk}\,0\ldots0]^T$, $j=\overline{1,q}$; максимально возможный порядок $n_{\max}$ идентифицируемой системы; t_m – длительность интервала фиксации реакции исследуемой системы. Величина t_m выбирается эмпирически, но так, чтобы она превышала на 15–20 % максимальную длительность затухающих переходных процессов каналов идентифицируемой системы, вызванных ступенчатыми воздействиями.

Алгоритм идентификации непрерывных систем включает следующие шаги:

Шаг 1. Найти значения векторов $y_k^j=y(k\tau)$, $k=\overline{1,N_{\max}}$, вызванных ступенчатыми воздействиями $u_k^j=[0\ldots0\,u_{jk}\,0\ldots0]^T$, $j=\overline{1,q}$, при нулевых начальных условиях непрерывной системы (1). Здесь $\tau=t_m/N_{\max}$, $N_{\max}=1500\div2000$.

Шаг 2. Получить N_{μ} отсчетов $u_k=u(kT)$ и $y_k=y(kT)$ с периодом $T=m_1\tau$. Здесь $N_{\mu}=2n_{\max}+4$ – максимальное число подлежащих определению марковских параметров идентифицируемой системы, $m_1=20\div250$.

Шаг 3. По формулам (7) найти значения оценок марковских параметров $\tilde{\mu}_{11}^{\upsilon}(\nu,T)$, $\upsilon=\overline{0,N_{\mu}}$ дискретно-подобных систем.

Шаг 4. Путем решения алгебраических систем (11) вычислить оценки коэффициентов знаменателей, а по формулам (9) – оценки матриц коэффициентов числителей передаточных функций $\tilde{W}_{11}(z,\nu,T)$ дискретно-подобных систем пробных порядков $\nu=1,2,\ldots,n_{\max}$ и записать оценки этих функций по выражениям (8), заменяя коэффициенты и матрицы их оценками.

Шаг 5. К каждой полученной на шаге 4 оценке $\tilde{W}_{11}(z,\nu,T)$ применить Z_T^{-1}-преобразование (5) и найти оценку соответствующей передаточной функции $\hat{W}_{11}(p,\nu,T)$ канала $u_1\to y_1$ виртуальной непрерывной системы пробного порядка $\nu=1,2,\ldots,n_{\max}$.

Шаг 6. По коэффициентам каждой оценки $\hat{W}_{11}(p,\nu,T)$, полученной на шаге 5, вычислить N_{μ} оценок $\hat{\mu}_{11}^{\upsilon}(\nu,T)$ марковских параметров $\mu_{11}^{\upsilon}(\nu,T)$, пользуясь соотношениями (14) и (15), при всех $\nu=1,2,\ldots,n_{\max}$.

Шаг 7. Выполнить шаги с 3 по 6 для различных значений $T=m_1\tau$, изменяя значения m_1 от 31 до $m_{1,\max}$. Пользуясь соотношениями (16), (17), (21), (22), найти оптимальное значение оценки $T^{\circ}(\nu,\mu_{ij}^{\upsilon})$, а также оценку $\hat{n}_{11}$. По формуле (24) записать оценку $\hat{W}_{11}(p,\hat{n}_{11},T^{\circ})$.

Шаг 8. Выполнить шаги с 3 по 7 для значений $i=2,3,\ldots,l$ и $j=1,2,\ldots,q$ и записать соответствующие оценки $\hat{W}_{ij}(p,\hat{n}_{ij},T^{\circ})$.

Шаг 9. По формулам (23)–(25) найти оценки характеристического полинома, порядка и передаточной матрицы идентифицируемой МСУ.

Шаг 10. Выход.

Результаты, приведенные в таблице, а также выражения (19), (26) позволяют утверждать, что предложенный алгоритм идентификации является достаточно точным. Данный алгоритм предназначен для идентификации непрерывных систем. Однако, на основе результатов работы [4], его легко модифицировать для проведения идентификации полных дискретных систем.

Если непрерывная система является одномерной, то для ее идентификации выполняются только шаги с первого по седьмой разработанного алгоритма, причем однократно [14]. Если же идентифицируемая система является многомерной и имеет q входов и l выходов, то для ее идентификации шаги алгоритма со второго по восьмой должны быть повторены $(l\times q-1)$ раз. Другими словами, для идентификации многомерной системы необходимо выполнить довольно большой объем вычислений. С другой стороны, нетрудно видеть, что операции шагов со второго по восьмой разработанного алгоритма могут выполняться параллельно для каждого канала $u_j\to y_i$ многомерной системы. Именно эта особенность данного алгоритма позволяет для идентификации многомерных систем применять вычислительные системы с программируемой структурой, ориентированной на параллельные вычисления [9, 10].

Заключение

Разработанный алгоритм позволяет осуществить в реальном времени оперативную идентификацию полных непрерывных многомерных систем управления. В нем используются системные инварианты – марковские параметры, что существенно повышает его идентификационные возможности и позволяет оценить не только параметры, но и порядок системы. В случае непрерывных многомерных систем реализация данного алгоритма приводит к необходимости численной обработки довольно большого объема данных. Поэтому его реализация в реальном времени, в составе самоорганизующейся (адаптивной) системы управления сложными техническими системами, возможна только при использовании высокопроизводительных вычислительных систем, ориентированных на параллельные вычисления.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (гранты № 12-08-90050-Бел_а и № 13-08-00249).

Список литературы

1. **Марковские** параметры многомерных динамических систем управления / И.А. Каляев, А.Р. Гайдук, С.Г. Капустян, В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ. – 2013. – Вып. 1. – С. 2–7.

2. **Красовский А.А., Наумов А.И.** Аналитическая теория самоорганизующихся систем управления с высоким уровнем искусственного интеллекта // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2001. – № 1. – С. 69–75.

3. **Александров А.Г.** Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высш. шк., 1976.

4. **Гайдук А.Р.** Алгоритмическое обеспечение самоорганизующихся регуляторов с экстраполяцией // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2002. – № 3. – С. 56–63.

5. **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971.

6. **Льюнг Л**. Идентификация систем. Теория для пользователя: пер. с англ. / под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1991.

7. **Ефимов М.В., Шурыгин В.Н.** Идентификация и диагностика систем: учеб. пособие для вузов. – М.: Изд-во МГПУ, 2002.

8. **Марковские** параметры и передаточные матрицы многомерных управляемых систем / А.Р. Гайдук, И.А. Каляев, С.Г. Капустян, В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ. – 2013. – Вып. 3. – С. 36–41.

9. **Каляев И.А., Капустян С.Г.** Проблемы группового управления роботами // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2009. – № 6. – С. 33–40.

10. **Реконфигурируемые** мультиконвейерные вычислительные структуры / И.А. Каляев, И.И. Левин, Е.А. Семерников, В.И. Шмойлов; под общ. ред. И.А. Каляева. – Ростов н/Д: Изд-во ЮНЦ РАН, 2008.

11. **Хорошевский В.Г.** Распределенные вычислительные системы с программируемой структурой // Вестник СибГУТИ. – 2010. – № 2. – С. 3–41.

12. **Гайдук А.Р.** Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2012.

13. **Ким Д.П.** Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2007.

14. **Дрокин Д.С., Гайдук А.Р.** Идентификация дискретных систем по марковским параметрам // Наука и образование на рубеже тысячелетий: сб. НИР. Вып. 1. – М.: Учлитвуз, 2011. – С. 35–42.

References

1. Kalyaev, I.A., Gayduk, A.R., Kapustyan, S.G., Ryabchenko, V.N. Markovskie parametry mnogomernykh dinamicheskikh sistem upravleniya [Markov parameters of multivariable dynamic control systems]. *Vestnik IGEU*, 2013, issue 1, pp. 2–7.

2. Krasovskiy, A.A., Naumov, A.I. Analiticheskaya teoriya samoorganizuyushchikhsya sistem upravleniya s vysokim urovnem iskusstvennogo intellekta [Analytical theory of self-organizing control systems with a high intellect level]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2001, no. 1, pp. 69–75.

3. Aleksandrov, A.G. *Optimal'nye i adaptivnye sistemy* [Optimal and adaptive systems]. Moscow: Vysshaya shkola, 1976.

4. Gayduk, A.R. Algoritmicheskoe obespechenie samoorganizuyushchikhsya regulyatorov s ekstrapolyatsiey [Algorithmic support of self-organizing controllers with extrapolation]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2002, no. 3, pp. 56–63.

5. Kalman, R., Falb, P., Arbib, M. *Ocherki po matematicheskoy teorii sistem* [Essays on mathematical systems theory]. Moscow, Mir, 1971.

6. L'yung, L. *Identifikatsiya sistem. Teoriya dlya pol'zovatelya* [System Identification. Theory for the User]. Moscow, Nauka, 1991.

7. Efimov, M.V., Shurygin, V.N. *Identifikatsiya i diagnostika sistem* [System Identification and Diagnostics]. Moscow, Izdatel'stvo MGPU, 2002.

8. Gayduk, A.R., Kalyaev, I.A., Kapustyan, S.G., Ryabchenko, V.N. Markovskie parametry i peredatochnye matritsy mnogomernykh upravlyaemykh sistem [Markov parameters and transfer matrixes of multivariable controlled systems]. *Vestnik IGEU*, 2013, issue 3, pp. 36–41.

9. Kalyaev, I.A., Kapustyan, S.G. Problemy gruppovogo upravleniya robotami [Problems of group control of robots]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2009, no. 6, pp. 33–40.

10. Kalyaev, I.A., Levin, I.I., Semernikov, E.A., Shmoylov, V.I. *Rekonfiguriruemye mul'tikonveyernye vychislitel'nye struktury* [Configurable multiconveyor computing structures]. Rostov n/D, Izdatel'stvo YuNTs RAN, 2008.

11. Khoroshevskiy, V.G. Raspredelennye vychislitel'nye sistemy s programmiruemoy strukturoy [Distributed computer systems with programmed structure]. *Vestnik SibGUTI*, 2010, no. 2, pp. 3–41.

12. Gayduk, A.R. *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyy podkhod)* [Theory and methods of synthesis-through analysis of automatic control systems (polynomial approach)]. Moscow, Fizmatlit, 2012.

13. Kim, D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Theory of automatic control]. Moscow, Fizmatlit, 2007.

14. Drokin, D.S., Gayduk, A.R. Identifikatsiya diskretnykh sistem po markovskim parametram [Identification of discrete systems by Markov parameters]. *Sbornik NIR «Nauka i obrazovanie na rubezhe tysyacheletiy», t. 1* [Collected Scientific Research Works «Science and Education at the Turn of Millenia», vol. 1]. Moscow, Uchlitvuz, 2011, pp. 35–42.

Гайдук Анатолий Романович,
Кисловодский гуманитарно-технический институт,
профессор, зав. кафедрой систем автоматического управления,
e-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Каляев Игорь Анатольевич,
Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем имени академика А.В. Каляева ФГАОУ ВПО «Южного федерального университета»,
член корреспондент РАН, директор,
e-mail: kaliaev@mvs.sfedu.ru

Капустян Сергей Георгиевич,
Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем имени академика А.В. Каляева ФГАОУ ВПО «Южного федерального университета»,
доктор технических наук, заведующий отделом,
e-mail: kap@mvs.sfedu.ru

Рябченко Владимир Николаевич,
ОАО «Федеральная Сетевая Компания ЕЭС»,
доктор технических наук, референт генерального директора,
e-mail: rvn@mes-centra.ru