УДК 666.86

Моделирование влагопереноса в многослойной пористой среде при неравномерной укладке слоев материала

В.Е. Мизонов[1], В.В. Костарев[2], В.А. Зайцев[2]
[1] ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
г. Иваново, Российская Федерация
[2] ФГБОУВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: mizonov46@mail.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Укладка влажной ткани слой за слоем является типичной технологической операцией в текстильной промышленности. Распределение содержания влаги по растущему числу слоев и ее конечное распределение является важным для последующей обработки ткани. В настоящее время отсутствует надежная математическая модель, которая позволяла бы рассчитывать этот переходный процесс и отыскивать пути управления им и его оптимизации. В связи с этим разработка такой модели является актуальной задачей.
Материалы и методы: Предлагаемая математическая модель процесса основана на численном ячеечном решении нелинейного уравнения конвективной диффузии для двух разных направлений действия на влагу массовой силы.
Результаты: Предложена математическая модель для расчета распределения содержания влаги в многослойном материале при неравномерной укладке слоев, а также алгоритм ее численной реализации.
Выводы: Результаты численных экспериментов показывают, что модель работает и не противоречит физической сущности процесса. Предложенная математическая модель процесса и алгоритм ее численной реализации позволяют повысить точность расчетных прогнозов нестационарного распределения содержания влаги в многослойной ткани при ее обработке.

Ключевые слова: пористый материал, слой, неравномерная укладка, ячеечная модель, распределение содержания влаги.

Modeling of moisture transfer in multilayer porous medium at uneven stacking of material layers

V.E. Mizonov[1], V.V. Kostarev[2], V.A. Zaitzev[2]
[1] Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation
[2] Ivanovo State University of Chemical Technology, Ivanovo, Russian Federation
E-mail: mizonov46@mail.ru

Abstract

Background: Stacking of a humid fabric layer by layer is a typical technological operation in textile industry. The process of moisture content distribution over the growing number of layers and its final distribution is very important for further treatment of the fabric. At present there is no reliable mathematical model that would allow calculating this transient process and finding possible ways to control and optimize it. Therefore, developing such model is an urgent task.
Materials and methods: The proposed mathematical model is based on the cell solution of non-linear convection diffusion equation for two different directions of the mass force acting on moisture.
Results: The proposed model is a mathematical tool to calculate moisture content distribution in multilayer material at uneven stacking of layers and algorithm of its numerical realization.
Conclusions: The results of numerical experiments show that the model works and does not contradict to the physical sense of the process. The proposed mathematical model and algorithm of its numerical realization allow improving the accuracy of computational prognosis of unsteady moisture content distribution in multilayer fabric during its treatment.

Key words: porous material, layer, uneven stacking, cell model, moisture content distribution.

Укладка тканей в многослойные паковки является распространенным операционным переходом в отделочных производствах текстильной промышленности, причем укладываемая ткань часто бывает влажной. Наличие массовой силы приводит к перераспределению влаги по слоям ткани. При этом, если укладка происходит на горизонтальную поверхность, массовая сила (сила тяжести) направлена в сторону уже уложенных слоев, а если ткань наматывается на барабан с достаточно большой скоростью, то массовая сила (центробежная сила инерции) направлена в сторону укладываемых слоев. Неравномерность распределения влаги по слоям эквивалентна неравномерности ее распределения по длине ткани, что может отрицательно сказаться на последующих технологических операциях. Поэтому актуальной является задача разработки простой, но информативной математической модели этого процесса в целях прогнозирования кинетики распределения влаги в такой системе с последующей ее оптимизацией.

В терминах дифференциальных уравнений этот процесс описывается уравнением нелинейной конвективной диффузии влаги на отрезке с подвижной границей (задача Стефана) и перемещающемся вместе с границей источником влаги, поступающей вместе с вновь появляющимися слоями. Нелинейность обусловлена ограничением на предельное содержание влаги, соответствующее полному заполнению пор материала. Аналитическое решение задачи в такой постановке не представляется возможным. На наш взгляд, наиболее наглядным и доступным в инженерной практике является численный метод, использующий ячеечные модели и связанный с ними математический аппарат теории цепей Маркова (например, [1, 2]).

Расчетная схема процесса распределения содержания влаги по слоям ткани показана на рис. 1. Полная ожидаемая высота слоя разбита на m ячеек идеального перемешивания высотой Δy. Состояние процесса фиксируется через малые промежутки времени Δt, т. е. в дискретные моменты времени $t_k = (k - 1)\Delta t$, где номер состояния k может рассматриваться как целочисленный аналог текущего времени. Распределение содержания влаги по всем m ячейкам в k-м состоянии представлено вектором-столбцом $\mathbf{S^k} = \{S_j^k\}$. Процесс развивается следующим образом. При неравномерной по времени укладке слои материала появляются через K_{0j} временных переходов, j = 1,…, m. Эта последовательность может быть представлена вектором $\mathbf{K_0}$. Весь процесс укладки занимает $N = \Sigma K_{0j}$ временных переходов, причем процесс может продолжаться и после окончания укладки до $n > N$ временных переходов. Моменты появления очередного слоя определяются как кумулятивная сумма элементов вектора $\mathbf{K_0}$ и представлены вектором $\mathbf{K}$.

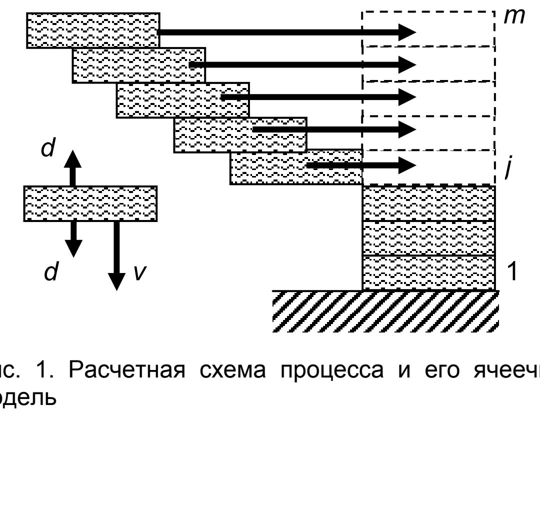

Рис. 1. Расчетная схема процесса и его ячеечная модель

Эволюция распределения содержания влаги по ячейкам описывается рекуррентным матричным равенством

$$\mathbf{S^{k+1} = P(S^k + S_f^k)}, \quad (1)$$

где $\mathbf{S_f^k}$ – вектор поступления влаги, вносимой с вновь появляющимися слоями, в цепь ячеек; $\mathbf{P}$ – матрица конвективной диффузии, являющаяся аналогом матрицы переходных вероятностей для цепи Маркова.

Рассмотрим построение $\mathbf{P}$ и $\mathbf{S_f^k}$ для случая, когда конвективный перенос направлен вниз в сторону первой ячейки.

Матрица $\mathbf{P}$ является трехдиагональной матрицей размера $m \times m$, элементы которой рассчитываются по следующим формулам:

$$p_{j-1,j}^{\,k} = d + v(1 - S_{j-1}^{\,k}/S_{\max}),\ j = 2,..., m; \quad (2)$$

$$p_{j+1,j}^{\,k} = de_{j,k},\ j = 1,..., m–1; \quad (3)$$

$$p_{j,j}^{\,k} = 1 - p_{j+1,j}^{\,k} - p_{j-1,j}^{\,k}, \quad (4)$$

где $d = D\Delta t/\Delta y^2$ (D – коэффициент влагопроводности); $v = V\Delta t/\Delta y$ (V – размерная скорость конвективного переноса).

По сравнению с традиционной ячеечной моделью [2], построение матрицы имеет две особенности. В равенстве (2), описывающем переходы влаги в сторону конвективного переноса, множитель в круглых скобках учитывает затрудненность конвективного переноса в ячейки, уже содержащие влагу (если ячейка заполнена влагой полностью, конвективный перенос в нее прекращается). Это делает переходную матрицу зависящей от текущего вектора состояния, т. е. модель становится нелинейной. В равенстве (3), описывающем переходы влаги вверх, множитель $e_{j,k}$ запрещает переходы в ячейки, относящиеся к области, еще не заполненной слоями материала. Этот множитель является элементом матрицы, которая строится по следующему алгоритму. Первоначально создается нулевая матрица размера $m \times n$. Затем в ней размещаются единичные элементы по правилу

$$e_{j,k} = 1,\ k = K_j + 1,…,n;\ j = 1,…, m–1. \quad (5)$$

Ниже приведен пример матрицы $e_{j,k}$ для трехслойной среды с возрастающим интервалом появления слоев $\mathbf{K_0}$ = [1 2 3] переходов, когда вектор моментов появления слоев равен $\mathbf{K}$ = [1 3 6], а построенная по правилу (5) матрица имеет вид

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

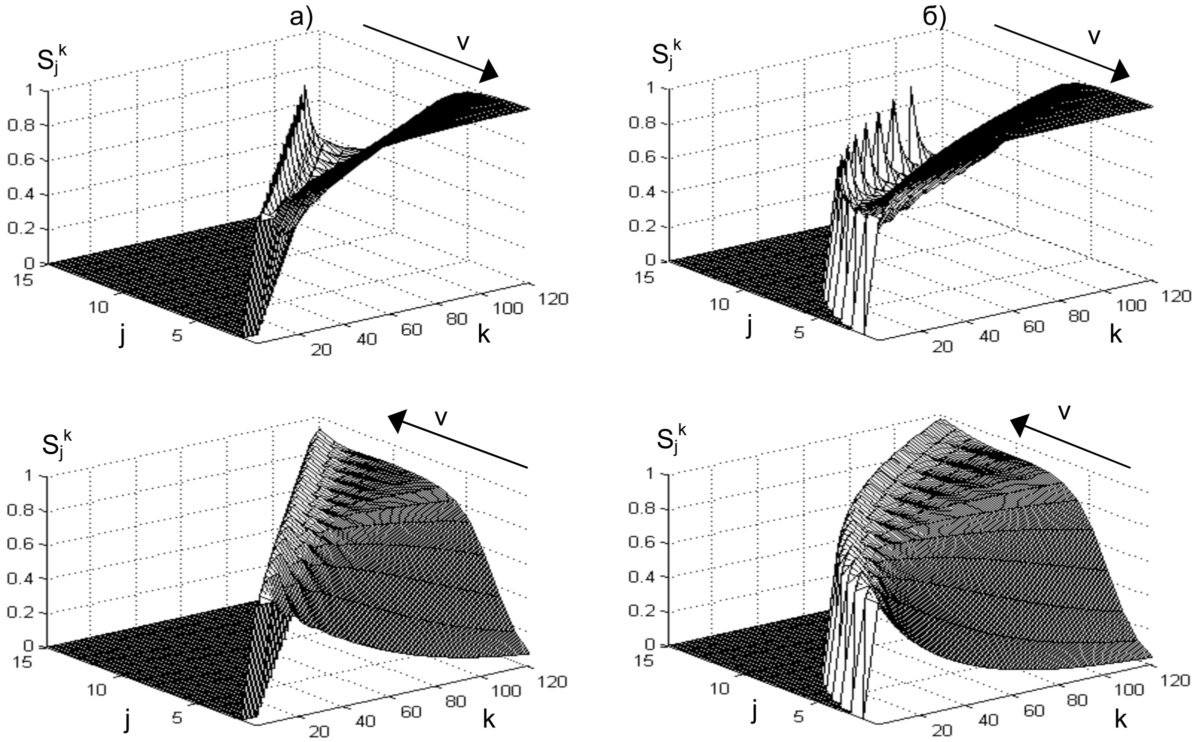

Рис. 2. Формирование распределения содержания влаги при различном направлении конвективного переноса при равномерной (а) и неравномерной (б) укладке слоев

Вектор $\mathbf{S_f^k}$ поступления влаги, вносимой с вновь появляющимися слоями, в цепь ячеек удобно извлекать из матрицы $\mathbf{Sm_f}$, которая также первоначально строится как нулевая матрица размера $m \times n$, а затем вводятся ненулевые элементы по правилу

$$(Sm_f)_{1,1} = S_0;\ (Sm_f)_{j,k} = S_0,\ k = K_{j-1} + 1,\ j = 2,\dots, m, \quad (7)$$

где S_0 – содержание влаги во вносимом слое материала.

Для рассмотренного выше примера эта матрица имеет вид

$$\mathbf{Sm_f} = \begin{bmatrix} S_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Если массовая сила и вызываемый ею конвективный перенос направлены в сторону появляющихся слоев, то примыкающие к главной диагонали матрицы **P** меняются местами:

$$p_{j+1,j}^{k} = d + v(1 - S_{j-1}^{k}/S_{\max})e_{j,k},\ j = 1,\dots, m-1; \quad (9)$$

$$p_{j-1,j}^{k} = d,\ j = 2,\dots, m, \quad (10)$$

а все остальные операторы модели остаются неизменными.

На рис. 2 показан пример расчета изменения распределения содержания влаги при различном направлении конвективного переноса для равномерной с периодом K_0 = 8 и неравномерной с периодом $K_0 = j$ укладкой слоев в паковку из 15 слоев. Содержание влаги дано в относительных (по отношению к максимально возможному содержанию) единицах. Расчеты выполнены для d = 0,1 и v = 0,2. Естественно, что, если продержать материал после окончания укладки достаточно долго, установится стационарное асимптотическое распределение, не зависящее от истории укладки. Однако переходный процесс при неравномерной укладке заметно отличается от такового при равномерной укладке, особенно для конвективного переноса, направленного в сторону уложенных слоев.

При обратном процессе разделения слоев на однослойный материал поперечная неравномерность распределения влаги перейдет на неравномерность распределения влаги по длине материала, что может негативно сказаться на качестве последующих технологических операций.

Таким образом, предложенная модель позволяет на основе универсального вычислительного алгоритма рассчитывать эволюцию распределения содержания влаги в многослойном материале при неравномерно меняющемся числе слоев и любом из направлений постоянного конвективного переноса.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-08-97528 р_центр_а.

Список литературы

1. **Berthiaux H., Mizonov V., Zhukov V.** Application of the theory of Markov chains to model different processes in particle technology // Powder Technology. – 2005. – 157. – P. 128–137.

2. **Mizonov V., Zaitsev V., Volynskii V., Leznov V.** Modeling the Moisture Content Distribution over a Rotating Porous Cylinder using Markov Chains // Chemical Engineering & Technology. – 2011. – 34. – P. 1185–1190.

Мизонов Вадим Евгеньевич,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики,
e-mail: mizonov46@mail.ru

Костарев Валерий Валерьевич,
Ивановский государственный химико-технологический университет,
аспирант,
e-mail: lord291189@gmail.com

Зайцев Виктор Александрович,
Ивановский государственный химико-технологический университет,
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой экономики и финансов,
e-mail: z_victor_a@mail.ru