УДК 681.5.015

Марковские параметры и передаточные матрицы многомерных управляемых систем

А.Р. Гайдук[1], И.А. Каляев[1], С.Г. Капустян[1], В.Н. Рябченко[2]
[1]ФГАОУВПО «Южный федеральный университет», г. Таганрог, Российская Федерация
[2]ОАО «Федеральная сетевая компания ЕЭС», г. Москва, Российская Федерация
E-mail: gaiduk_2003@mail.ru, mvs@mvs.sfedu.ru, rvn@mes-centra.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Аналитические соотношения, описывающие связь марковских параметров, в особенности, многомерных систем с их порядком, передаточными матрицами и с измеряемыми входными и выходными величинами, в известной литературе в объеме, необходимом для проведения идентификации, практически не представлены. В связи с этим актуальной является задача получения аналитических соотношений, которые в явной форме отражают связь количественных характеристик управляемой системы с измеряемыми величинами, а также находить такие количественные характеристики неопределенной системы, которые в полной мере отражают ее свойства и дают возможность синтезировать эффективные алгоритмы управления этой системой.
Материалы и методы: Искомые математические соотношения для непрерывных и дискретных многомерных систем выводятся на основе разложения в ряд присоединенной матрицы характеристической матрицы и соотношений, определяющих значения выходных переменных дискретных динамических систем.
Результаты: Получены аналитические соотношения, которые связывают марковские параметры полной непрерывной или дискретной многомерной системы с ее порядком и с коэффициентами передаточной матрицы. Установлена связь марковских параметров дискретных управляемых систем со значениями выходных переменных при дискретных управлениях.
Выводы: Полученные соотношения могут применяться при идентификации управляемых непрерывных или дискретных динамических систем. Они позволяют найти как порядок системы, так и коэффициенты передаточной матрицы по результатам измерения скалярных управлений и реакций полной многомерной управляемой дискретной системы.

Ключевые слова: управляемая система, марковские параметры, порядок системы, передаточная матрица, значение переменной, идентификация.

Markov Parameters and Transfer Matrixes of Multidimensional Control Systems

A.R. Gaiduk[1], I.A. Kalyaev[1], S.G. Kapustyan[1], V.N. Ryabchenko[2]
[1] Southern Federal University, Taganrog, Russian Federation
[2]Public Corporation «Federal Grid Company of Unified Energy System», Moscow, Russian Federation
E-mail: gaiduk_2003@mail.ru, mvs@mvs.sfedu.ru

Abstract

Background: The analytical correlations describing the connection of Markov parameters, in particular, of multidimensional systems with their order, transfer matrixes and measured input and output sizes are almost not considered in the known literature to the extent which is necessary for carrying out the identification. Thus, the urgent problem is to get analytical correlations, which demonstrate the relations between the quantative characteristics of the controllable system and measured values as well as to determine such quantative characteristics of indefinite system, which entirely have all its features and allow to synthesize the effective algorithms of controlling this system.
Materials and methods: The required mathematical correlations for continuous and discrete multidimensional systems are determined on the basis of decomposition in series of the attached matrix of a characteristic matrix and the expressions, determining values of output variables of discrete dynamic systems.
Results: The analytical correlations which connect Markov parameters of the full continuous or discrete multidimensional system with their order and with the factors of a transfer matrix are received. Connection between Markov parameters of discrete controlled systems with values of output variables is established at discrete control input.
Conclusions: The received correlations can be applied to identify the controlled continuous or discrete dynamic systems. They allow to find both the system order and the transfer matrix coefficient by measurement results of scalar control input and reactions of the full multidimentional controlled discrete system.

Key words: controlled system, Markov parameters, system order, transfer matrix, identification, variable value.

Введение. В самоорганизующихся алгоритмах управления сложными неопределенными системами часто используются процедуры оперативной (в реальном времени) идентификации этих систем [1, 2, 3]. Для формирования таких процедур необходимы соотношения, которые в явной форме отражают связь количественных характеристик управляемой системы с измеряемыми величинами. Более того, эти соотношения должны давать возможность по результатам измерений находить такие количественные характеристики неопределенной системы, которые в полной мере отражают ее свойства и дают возможность в дальнейшем синтезировать эффективные алгоритмы управления этой системой. К таким количественным характеристикам многомерных управляемых систем относятся, в частности, марковские параметры [2].

В работе [4] построены виртуальные математические модели в переменных состояния многомерных управляемых систем, которые в явной форме содержат марковские параметры этих систем. Там же установлено, что каждая полная, многомерная управляемая система имеет неограниченное число марковских параметров, которые являются ее структурными инвариантами и однозначно определяют структуру системы, а также степень влияния входных кусочно-постоянных управлений на ее выходные переменные и на соответствующие производные по времени последних.

Ниже на основе формулы для матрицы, присоединенной к характеристической матрице [5, с. 88], устанавливается связь марковских параметров полных непрерывных и дискретных управляемых систем с их порядком и коэффициентами их передаточных матриц. Показана также связь марковских параметров полных дискретных управляемых систем с реакциями этих систем на дискретные управления.

Непрерывные управляемые системы. Рассмотрим линейную непрерывную динамическую управляемую систему с несколькими входами и несколькими выходами, уравнения которой в переменных состояния имеют следующий вид:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния размерности n; $u \in R^q$ – вектор управлений; $y \in R^l$ – вектор выходных переменных системы; A, B, C, D – числовые матрицы соответствующих размерностей.

Марковские параметры μ_{ij}^{υ} динамической системы (1) – это величины, определяемые выражениями

$$\mu_{ij}^{0} = d_{ij}, \quad \mu_{ij}^{\upsilon} = C_i A^{\upsilon-1} B^j, \quad \upsilon = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

где d_{ij} – элементы матрицы D; C_i и B^j – строки и столбцы матриц C и B соответственно; $i = \overline{1, l}$; $j = \overline{1, q}$ [2, 4].

Часто определяются матрицы марковских параметров $M^{\upsilon} = [\mu_{ij}^{\upsilon}] \in R^{l \times q}$ по формулам

$$M^0 = D, \quad M^{\upsilon} = CA^{\upsilon-1}B, \quad \upsilon = 1, 2, 3, \ldots . \tag{3}$$

Поставим задачу определения связи марковских параметров системы (1) с коэффициентами ее передаточной матрицы [6]:

$$W_{yu}(p) = C(pE - A)^{-1}B + D_0 = \\ = A^{-1}(p)\left\{C\operatorname{adj}(pE - A)B + D_0 A(p)\right\}, \tag{4}$$

где $A(p) = \det(pE - A)$ или

$$A(p) = \alpha_n p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \ldots + \alpha_1 p^1 + \alpha_0, \quad \alpha_n = 1. \tag{5}$$

Применяя формулу для присоединенной матрицы общего вида [5, с. 88; 6, с. 231] к матрице $(pE - A)$, получим следующее выражение:

$$\operatorname{adj}(pE - A) = \alpha_n E p^{n-1} + (\alpha_n A + \alpha_{n-1}E)p^{n-2} + \ldots \\ \ldots + (\alpha_n A^{n-1} + \alpha_{n-1}A^{n-2} + \ldots + \alpha_1 E). \tag{6}$$

Подставляя соотношение (6) в равенство (4), получим

$$W_{yu}(p) = A^{-1}(p)\Big\{C[\alpha_n E p^{n-1} + (\alpha_n A + \alpha_{n-1}E)p^{n-2} + \ldots \\ \ldots + (\alpha_n A^{n-1} + \alpha_{n-1}A^{n-2} + \ldots + \alpha_1 E)]B + D_0 A(p)\Big\}$$

или, раскрывая скобки,

$$W_{yu}(p) = A^{-1}(p)\Big\{\alpha_n CBp^{n-1} + (\alpha_n CAB + \alpha_{n-1}CB)p^{n-2} + \ldots \\ \ldots + (\alpha_n CA^{n-1}B + \alpha_{n-1}CA^{n-2}B + \ldots + \alpha_1 CB) + M^0 A(p)\Big\}.$$

Таким образом, с учетом обозначений (3) передаточную матрицу (4) многомерной системы (1) можно представить следующим образом:

$$W_{yu}(p) = A^{-1}(p)\Big\{\alpha_n M^1 p^{n-1} + (\alpha_n M^2 + \alpha_{n-1}M^1)p^{n-2} + \ldots \\ \ldots + (\alpha_n M^{n-2} + \alpha_{n-1}M^{n-3} + \ldots + \alpha_1 M^1) + M^0 A(p)\Big\}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что передаточная матрица $W_{yu}(p)$ многомерной системы (1) полностью определяется n матрицами M^{υ} (3) марковских параметров μ_{ij}^{υ}, $\upsilon = \overline{0, n-1}$ (2) и n коэффициентами α_i, $i = \overline{0, n-1}$ характеристического полинома (5) этой системы, так как $\alpha_n = 1$.

С другой стороны, учитывая, что максимальная степень p в (5) равна n, передаточную матрицу $W_{yu}(p)$ (4) можно записать следующим образом:

$$W_{yu}(p) = A^{-1}(p)\Big\{B^n p^n + B^{n-1}p^{n-1} + \ldots \\ \ldots + B^1 p + B^0 + B^{-1}p^{-1} + B^{-2}p^{-2} + \ldots\Big\}, \tag{8}$$

где $B^{\rho} = [\beta_{ij}^{\rho}]$ – $l \times q$-матрицы постоянных коэффициентов.

Сравнивая выражения (7) и (8), заключаем, что матрицы B^{ρ} определяются выражениями:

$$B^n = \alpha_n M^0, \quad B^{n-1} = \alpha_{n-1}M^0 + \alpha_n M^1,$$

$$B^{n-2} = \alpha_{n-2}M^0 + \alpha_{n-1}M^1 + \alpha_n M^2, \ldots$$

или

$$B^{n-\rho} = \sum_{j=0}^{\rho} \alpha_{n-\rho+j} M^j, \tag{9}$$

где $\rho = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots$

В частности, так как $\alpha_n = 1$, то, например, матрица

$$B^0 = \alpha_0 M^0 + \alpha_1 M^1 + \ldots + \alpha_{n-1}M^{n-1} + M^n.$$

Подчеркнем, что в общем случае, в соответствии с выражениями (4) и (5), элементами β_{ij}^{ρ} матриц B^{ρ} при $\rho = \overline{0, n}$ фактически являются коэффициенты числителей скалярных передаточных функций $W_{y_i u_j}(p)$, которые, в свою очередь, являются элементами передаточной матрицы $W_{yu}(p)$ (4). Эти функции в общем случае имеют следующий вид:

$$W_{y_i u_j}(p)=\frac{\beta_{ij}^0+\beta_{ij}^1 p+\beta_{ij}^2 p^2+\ldots+\beta_{ij}^{n-1}p^{n-1}+\beta_{ij}^n p^n}{\alpha_0+\alpha_1 p+\alpha_2 p+\ldots+\alpha_{n-1}p^{n-1}+p^n}. \quad (10)$$

Подчеркнем, что если $W_{y_i u_j}(p)\neq 0$, то по крайней мере $\beta_{ij}^{\rho}\neq 0$, $\rho\in[0,n]$. Другими словами, в равенстве (8) при $\rho\in[0,n]$ по крайней мере одна из матриц $B^{\rho}\neq 0$, а при $\rho=-1,-2,\ldots$ все матрицы $B^{\rho}\equiv 0$.

Из выражений (9) при α_n = 1 вытекает (n + 1)-мерная система равенств:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & M^0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M^0 & M^1 \\ 0 & 0 & 0 & \iddots & M^1 & M^2 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & M^0 & M^1 & \ldots & M^{n-2} & M^{n-1} \\ M^0 & M^1 & M^2 & \ldots & M^{n-1} & M^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^n\\ B^{n-1}\\ B^{n-2}\\ \vdots\\ B^1\\ B^0\end{bmatrix}, \quad (11)$$

а при любом s = 0, 1, … бесконечная система равенств:

$$\begin{bmatrix} M^{s+1} & M^{s+2} & \ldots & M^{s+n} \\ M^{s+2} & M^{s+3} & \ldots & M^{s+n+1} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ M^{s+n} & M^{s+n+1} & \ldots & M^{s+2n-1} \\ M^{s+n+1} & M^{s+n+2} & \ldots & M^{s+2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}M^{s+n+1}\\ M^{s+n+2}\\ \vdots\\ M^{s+2n1}\\ M^{s+n+1}\\ \vdots\end{bmatrix}. \quad (12)$$

При этом последнюю можно рассматривать как систему уравнений относительно коэффициентов α_i, $i=\overline{0,n-1}$.

Рассмотрим матрицу, составленную из первых n строк матрицы в левой части системы (12), и учтем выражения (3). В результате получим равенства:

$$M_s^n=\begin{bmatrix} M^{s+1} & M^{s+2} & \cdots & M^{s+n} \\ M^{s+2} & M^{s+3} & \cdots & M^{s+n+1} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ M^{s+n} & M^{s+n+1} & \ldots & M^{s+2n} \end{bmatrix}= \quad (13)$$

$$=\begin{bmatrix} CA^sB & CA^{s+1}B & \cdots & CA^{s+n-1}B \\ CA^{s+1}B & CA^{s+2}B & \cdots & CA^{s+n}B \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ CA^{s+n-1}B & CA^{s+n}B & \cdots & CA^{s+2n-1}B \end{bmatrix}$$

или

$$M_s^n=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1}\end{bmatrix}A^s\begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B\end{bmatrix}. \quad (14)$$

Таким образом, матрица M_s^n (13) при $s\neq 0$ равна произведению трех матриц: матрицы наблюдаемости, матрицы A^s и матрицы управляемости системы (1) [7]. Следовательно, матрица M_s^n имеет обратную матрицу при $s\neq 0$, если только $\det A\neq 0$, а система (1) является полной [7]. Так как $\det A=\alpha_0$, то, если $\det M_{s\neq 0}^n=0$, а система (1) полная, следовательно, α_0 = 0. В этом случае справедлива следующая «укороченная» система:

$$\begin{bmatrix} M^{s+3} & M^{s+4} & \cdots & M^{s+n} \\ M^{s+4} & M^{s+5} & \ldots & M^{s+n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M^{s+n} & M^{s+n+1} & \ldots & M^{s+2n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}M^{s+n+1}\\ M^{s+n+2}\\ \vdots\\ M^{s+2n+1}\end{bmatrix}. \quad (15)$$

Матрица этой системы имеет обратную, если управляемая система (1) полная. Если же полнота системы (1) неизвестна, то для определения коэффициентов $\alpha_i, i=\overline{0,n-1}$, очевидно, целесообразнее использовать систему, соответствующую первым n строкам системы (12) при s = 0, т.е. с матрицей M_0^n (13).

Подчеркнем, что уравнения (12), (15) не включают ни матрицу M^0, равную матрице D, ни параметры $\mu_{ij}^0=d_{ij}$, которые описывают прямые безынерционные каналы связи между входом и выходом системы (1).

Важно также, что в соотношения (11), (12) и (15) вместо матриц M^{υ} и B^{ρ} можно подставлять соответствующие марковские параметры μ_{ij}^{υ} и коэффициенты β_{ij}^{ρ}, где $\upsilon,\rho=\overline{0,n}$, при какой-либо (любой, но при одной и той же) паре индексов i, j, причем $1\leq i\leq l$ и $1\leq j\leq q$. Например, для некоторой системы при n = 3, s = 0, i = 2, а j = 3 можно записать следующие равенства:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_{23}^0 \\ 0 & 0 & \mu_{23}^0 & \mu_{23}^1 \\ 0 & \mu_{23}^0 & \mu_{23}^1 & \mu_{23}^2 \\ \mu_{23}^0 & \mu_{23}^1 & \mu_{23}^2 & \mu_{23}^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_{23}^3\\ \beta_{23}^2\\ \beta_{23}^1\\ \beta_{23}^0\end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{23}^1 & \mu_{23}^2 & \mu_{23}^3 \\ \mu_{23}^2 & \mu_{23}^3 & \mu_{23}^4 \\ \mu_{23}^3 & \mu_{23}^4 & \mu_{23}^5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\mu_{23}^4\\ \mu_{23}^5\\ \mu_{23}^6\end{bmatrix}.$$

Другими словами, соотношения (11), (12), (15) справедливы как для всей многомерной системы, так и для каждого ее канала вход-выход. Соотношения указанного типа для одномерного случая приведены в [2, 6].

Утверждение 1. Если передаточная функция $W_{y_i u_j}(p)$ (10) канала $u_j\to y_i$ полной системы (1) порядка n не равна тождественно нулю, то среди n + 1 первых марковских параметров μ_{ij}^{υ}, $\upsilon \in [0, n]$, этого канала по крайней мере один не равен нулю.

Доказательство. Равенство (11) имеет место для каждого канала $u_j \to y_i$ системы (1) порядка *n*. При этом вектор правой части каждого такого равенства, соответствующего паре *i*, *j*, включает все коэффициенты β_{ij}^{ρ}, $\rho = \overline{0, n}$, числителя не равной нулю передаточной функции $W_{y_i u_j}(p)$ (10), а матрица в его левой части – все марковские параметры μ_{ij}^{υ}, $\upsilon = \overline{0, n}$, данного канала $u_j \to y_i$. Предположим, все марковские параметры μ_{ij}^{υ}, $\upsilon = \overline{0, n}$, некоторого канала $u_j \to y_i$ системы (1) равны нулю. В этом случае матрица в левой части системы (11), соответствующей этим значениям индексов *i*, *j*, очевидно, будет нулевой. В этом случае, согласно (11), и все коэффициенты β_{ij}^{ρ}, $\rho = \overline{0, n}$, будут равны нулю. Но по условию функция $W_{y_i u_j}(p)$ не равна нулю, т.е. по крайней мере один из коэффициентов β_{ij}^{ρ} не равен нулю. Полученное противоречие доказывает утверждение 1.

Соотношения (11), (12) имеют большое значение при решении задачи идентификации полных динамических систем. Практически, по значениям (2*n* + 2) ÷ (2*n* + 6) марковских параметров можно оценить как порядок системы, так и коэффициенты ее уравнения вход-выход.

Допустим, для некоторого канала $u_j \to y_i$ полной управляемой системы неизвестного порядка найдены значения ряда марковских параметров μ_{ij}^{υ}, $\upsilon = 0, 1, 2, \ldots$, и величины

$$V_{ij}(s, \eta) = \det \begin{bmatrix} \mu_{ij}^{s+1} & \mu_{ij}^{s+2} & \cdots & \mu_{ij}^{s+\eta} \\ \mu_{ij}^{s+2} & \mu_{ij}^{s+3} & \iddots & \mu_{ij}^{s+\eta+1} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \mu_{ij}^{s+\eta} & \mu_{ij}^{s+\eta+1} & \cdots & \mu_{ij}^{s+2\eta-1} \end{bmatrix}, \qquad (17)$$

при некоторых $s = 0, 1, \ldots$ и $\eta = 1, 2, \ldots$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Если при некоторых $s = 0, 1, \ldots$ и всех значениях $\eta = 1, 2, \ldots, n^* - 1$ величина $V_{ij}(s, n^*)$ имеет некоторые (в том числе, и нулевые) значения, при $\eta = n^*$ $V_{ij}(s, n^*) \neq 0$, а при всех $\eta = n^* + 1,\ n^* + 2, \ldots$ $V_{ij}(s, \eta) = 0$, то порядок рассматриваемой полной системы равен n^*, а числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n^*-1}$, определяемые одной из систем (12) при $n = n^*$, являются коэффициентами ее характеристического полинома (5). При этом числа $\beta_{ij}^0, \beta_{ij}^1, \ldots, \beta_{ij}^{n^*}$, определяемые одной из систем (11), являются коэффициентами числителя передаточной функции (10) ее канала $u_j \to y_i$.

Покажем справедливость утверждения 2 на численном примере.

Пример. Система, уравнения которой имеют вид

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1, \qquad y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u_1, \qquad (18)$$

согласно (2), имеет следующие марковские параметры. По каналу $u_1 \to y_1$: $\mu_{11}^0 = 2$, $\mu_{11}^1 = 0$, $\mu_{11}^2 = 0$, $\mu_{11}^3 = 3$, $\mu_{11}^4 = -6$, $\mu_{11}^5 = 12$, $\mu_{11}^6 = -27$, $\mu_{11}^7 = 60$, $\mu_{11}^8 = -132$, $\mu_{11}^9 = 291$; по каналу $u_1 \to y_2$: $\mu_{21}^0 = 0$, $\mu_{21}^1 = 0$, $\mu_{21}^2 = 1$, $\mu_{21}^3 = 0$, $\mu_{21}^4 = 0$, $\mu_{21}^5 = -1$, $\mu_{21}^6 = 2$, $\mu_{21}^7 = -4$, $\mu_{21}^8 = 9$, $\mu_{21}^9 = -20$.

Предположим, ни порядок, ни параметры системы (18) неизвестны, а значения указанных марковских параметров известны. В этой ситуации примем в выражении (17) *i* = 1, *j* = 1, *s* = 0, а η = 1, 2, …, 5. Тогда имеем: $V_{11}(0; 1) = \mu_{11}^1 = 0$, $V_{11}(0; 2) = 0$, $V_{11}(0; 3) = -27$, $V_{11}(0; 4) = V_{11}(0; 5) = 0$. Следовательно, согласно утверждению 2, порядок системы *n* = 3. При этом решение системы (15) с заменой M^{υ} на μ_{11}^{υ} при *n* = 3 дает значения коэффициентов $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2$.

Нетрудно убедиться, что аналогичные результаты получим, полагая *i* = 1, *j* = 2, *s* = 2, а η = 1, 2, …, 5 по-прежнему.

Решение системы (11) в форме матриц B^{ρ} при *n* = 3 имеет вид

$$B^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ B^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix},\ B^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ B^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Подставляя полученные матрицы в формулу (8), будем иметь

$$W_{yu}(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 1} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} p^3 + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} p^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

или

$$W_{y_1 u_1}(p) = 2 + \frac{3}{p^3 + 2p^2 + 1},$$

$$W_{y_2 u_1}(p) = \frac{p + 2}{p^3 + 2p^2 + 1}.$$

Наконец, пользуясь известными соотношениями перехода от передаточных функций к уравнениям в переменных состояния в канонической управляемой форме [6], нетрудно записать уравнения рассматриваемой управляемой системы (18) на основе полученных выражений для $W_{y_1 u_1}(p)$ и $W_{y_2 u_1}(p)$. Конечно, в общем случае, найденные рассмотренным способом уравнения могут не совпадать с неизвестными уравнениями (18), поскольку уравнения в переменных состояния всегда не являются единственными. Однако они будут эквивалентны системе (18) с точностью до переменных состояния.

Таким образом, пользуясь значениями достаточно большого числа марковских параметров, несложно восстановить математическую модель полной управляемой системы.

Дискретные управляемые системы. Как известно, уравнения дискретных линейных многомерных систем, в общем случае, имеют вид

$$x_{k+1} = \tilde{A}x_k + \tilde{B}u_k, \quad y_k = \tilde{C}x_k + \tilde{D}u_k, \tag{19}$$

где x_k, u_k, y_k – векторы дискретных переменных состояния, управления и управляемых переменных.

Как видно, структура уравнений (19) полностью аналогична уравнениям (1). Поэтому для полных дискретных систем (19) справедливы все приведенные выше соотношения (2) – (17), а также утверждения 1 и 2 при соответствующих заменах матриц A, B, C, D, M^{υ} на матрицы $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{M}^{\upsilon}$ и чисел μ_{ij}^{υ} на $\tilde{\mu}_{ij}^{\upsilon}$.

Например, марковские параметры $\tilde{\mu}_{ij}^{\upsilon}$ канала $\tilde{u}_j \to \tilde{y}_i$ некоторой системы (19) определяются выражениями

$$\tilde{\mu}_{ij}^{0} = \tilde{d}_{ij}, \quad \tilde{\mu}_{ij}^{\upsilon} = \tilde{C}_i \tilde{A}^{\upsilon-1}\tilde{B}^j, \quad \upsilon = 1, 2, 3, \ldots. \tag{20}$$

Для этой же системы третьего порядка справедливы и системы типа (16), т.е.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{\mu}_{23}^{0} \\ 0 & 0 & \tilde{\mu}_{23}^{0} & \tilde{\mu}_{23}^{1} \\ 0 & \tilde{\mu}_{23}^{0} & \tilde{\mu}_{23}^{1} & \tilde{\mu}_{23}^{2} \\ \tilde{\mu}_{23}^{0} & \tilde{\mu}_{23}^{1} & \tilde{\mu}_{23}^{2} & \tilde{\mu}_{23}^{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_0 \\ \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_{23}^{3} \\ \tilde{\beta}_{23}^{2} \\ \tilde{\beta}_{23}^{1} \\ \tilde{\beta}_{23}^{0} \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{23}^{1} & \tilde{\mu}_{23}^{2} & \tilde{\mu}_{23}^{3} \\ \tilde{\mu}_{23}^{2} & \tilde{\mu}_{23}^{3} & \tilde{\mu}_{23}^{4} \\ \tilde{\mu}_{23}^{3} & \tilde{\mu}_{23}^{4} & \tilde{\mu}_{23}^{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_0 \\ \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{23}^{4} \\ \tilde{\mu}_{23}^{5} \\ \tilde{\mu}_{23}^{6} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

где $\tilde{\alpha}_{\rho}, \tilde{\beta}_{ij}^{\rho}$ – коэффициенты передаточной функции

$$W_{y_i u_j}(z) = \frac{\tilde{\beta}_{ij}^{0} + \tilde{\beta}_{ij}^{1}z + \tilde{\beta}_{ij}^{2}z^2 + \tilde{\beta}_{ij}^{3}z^3}{\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 z + \tilde{\alpha}_2 z^2 + z^3}. \tag{22}$$

Весьма существенным свойством дискретных систем является то, что их реакции на дискретные воздействия полностью выражаются через их марковские параметры. Действительно, как показано в работах [7, 8], реакция системы (19) на дискретное векторное воздействие u_k определяется выражением

$$\tilde{y}_k = \tilde{C}\tilde{A}^k \tilde{x}_0 + \sum_{\rho=0}^{k-1} \tilde{C}\tilde{A}^{k-\rho-1}\tilde{B}u_{\rho} + \tilde{D}u_k. \tag{23}$$

При нулевых начальных условиях с учетом обозначений $\tilde{M}^0 = \tilde{D}$, $\tilde{M}^{\upsilon} = \tilde{C}\tilde{A}^{\upsilon-1}\tilde{B}$, аналогичных (3), из выражения (23) выводим

$$\tilde{y}_k = \sum_{\rho=0}^{k} \tilde{M}^{k-\rho}u_{\rho} = \tilde{M}^k u_0 + \tilde{M}^{k-1}u_1 + \ldots + \tilde{M}^1 u_{k-1} + \tilde{M}^0 u_k. \tag{24}$$

Например, при l = 2, q = 2 и k = 0, 1, … из этого выражения вытекают следующие равенства:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_{10} \\ \tilde{y}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{11}^{0} & \tilde{\mu}_{12}^{0} \\ \tilde{\mu}_{21}^{0} & \tilde{\mu}_{22}^{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_{11} \\ \tilde{y}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{11}^{1} & \tilde{\mu}_{12}^{1} \\ \tilde{\mu}_{21}^{1} & \tilde{\mu}_{22}^{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{11}^{0} & \tilde{\mu}_{12}^{0} \\ \tilde{\mu}_{21}^{0} & \tilde{\mu}_{22}^{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix}, \ldots \tag{25}$$

С точки зрения задачи идентификации управляемых систем необходимо, чтобы по результатам измерения входных воздействий и выходных переменных системы можно было бы найти значения параметров системы. В уравнениях (25) параметрами системы являются ее марковские параметры $\tilde{\mu}_{ij}^{\upsilon}$. Однако из выражений (25) следует, что если на входе многомерной системы действует векторное воздействие, то по результатам измерения его составляющих и значений выходных переменных системы найти значения ее марковских параметров невозможно.

В то же время уравнения (25) принимают совершенно другой вид, если на входы системы подавать скалярные воздействия сначала вида $u_k^1 = [u_{1k} \quad 0]^T$, а затем $u_k^2 = [0 \quad u_{2k}]^T$. В этом случае при тех же значениях l = 2, q = 2 и k = 0, 1, … будем иметь:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_{10}^{1} \\ \tilde{y}_{20}^{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{11}^{0} \\ \tilde{\mu}_{21}^{0} \end{bmatrix} u_{10}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{y}_{11}^{1} \\ \tilde{y}_{21}^{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{11}^{1} \\ \tilde{\mu}_{21}^{1} \end{bmatrix} u_{10} + \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{11}^{0} \\ \tilde{\mu}_{21}^{0} \end{bmatrix} u_{11}, \ldots,$$
$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_{10}^{2} \\ \tilde{y}_{20}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{12}^{0} \\ \tilde{\mu}_{22}^{0} \end{bmatrix} u_{20}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{y}_{11}^{2} \\ \tilde{y}_{21}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{12}^{1} \\ \tilde{\mu}_{22}^{1} \end{bmatrix} u_{20} + \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{12}^{0} \\ \tilde{\mu}_{22}^{0} \end{bmatrix} u_{21}, \ldots, \tag{26}$$

где y_k^j – векторы выходных переменных исследуемой системы при действии на ее входах скалярных управлений u_k^j, $j = 1, 2$. Из выражений (26) вытекают следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{1j}^{0} \\ \tilde{\mu}_{2j}^{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{10}^{j} \\ \tilde{y}_{20}^{j} \end{bmatrix} / u_{j0}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{1j}^{1} \\ \tilde{\mu}_{2j}^{1} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \tilde{y}_{11}^{j} \\ \tilde{y}_{21}^{j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{1j}^{0} \\ \tilde{\mu}_{2j}^{0} \end{bmatrix} u_{j1} \right) / u_{j0}, \ldots \tag{27}$$

Выписав аналогичные выражения при k = 2, 3, …, нетрудно заключить, что по результатам измерения скалярных воздействий и реакции многомерной системы на них при нулевых начальных условиях можно найти значения *любого числа* марковских параметров многомерной дискретной системы.

На основе выражений (24) и (27) можно сформулировать утверждение 3, которое имеет существенное значение для идентификации дискретных управляемых систем.

Утверждение 3. Для экспериментального определения на основе соотношения (24) всех марковских параметров $\tilde{\mu}_{ij}^{\upsilon}$ некоторого канала $\tilde{u}_j \to \tilde{y}_i$ многомерной дискретной системы достаточно, чтобы хотя бы при одном значении $k \geq 0$ выполнялось условие $u_k^j \neq 0$, $j \in [1, q]$.

Для доказательства этого утверждения достаточно записать выражение (24) в раскрытой форме, начиная со значения k, при котором выполняется условие $u_k^j \neq 0$, $j \in [1, q]$.

Заключение

Полученные соотношения связывают марковские параметры полных, линейных, непрерывных и дискретных многомерных управляемых систем с порядком и коэффициентами передаточных функций отдельных каналов этих систем. Эти соотношения обратимы и позволяют по ($2n$ + 1) марковским параметрам полной многомерной системы найти ее порядок, а также коэффициенты характеристического полинома. По значениям (n + 1) первых марковских параметров каждого канала этой системы можно найти коэффициенты числителя передаточной функции этого канала.

По результатам измерения скалярных воздействий, подаваемых на каждый вход многомерной дискретной системы, и ее реакций на эти воздействия можно найти значения любого числа ее марковских параметров.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (грант № 12-08-90050-Бел_а).

Список литературы

1. **Красовский А.А., Наумов А.И.** Аналитическая теория самоорганизующихся систем управления с высоким уровнем интеллекта // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2001. – № 1. – С. 69–75.

2. **Гайдук А.Р.** Алгоритмическое обеспечение самоорганизующихся регуляторов с экстраполяцией // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. – № 3. – С. 56–63.

3. **Гайдук А.Р., Капустян С.Г.** Самоорганизующийся алгоритм действий интеллектуальных автономных роботов // Наука и образование на рубеже тысячелетий: сб. НИР. – М.: Учлитвуз, 2011. – Вып. 1. – С. 5–15.

4. **Марковские** параметры многомерных динамических систем управления / И.А. Каляев, А.Р. Гайдук, С.Г. Капустян, В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ. – 2013. – № 1. – С. 45–50.

5. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – М.: Наука, 1988.

6. **Гайдук А.Р.** Непрерывные и дискретные динамические системы. – М.: Учлитвуз, 2004.

7. **Гайдук А.Р.** Теория автоматического управления. – М.: Высш. шк., 2010.

8. **Куо Б.** Теория и проектирование цифровых систем управления: пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1986.

References

1. Krasovskiy, A.A., Naumov, A.I. Analiticheskaya teoriya samoorganizuyushchikhsya sistem upravleniya s vysokim urovnem intellekta [The Analytical Theory of Self-organizing Control Systems with High Intellect Level]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2000, no. 6, pp. 37–41.

2. Gayduk, A.R. Algoritmicheskoe obespechenie samoorganizuyushchikhsya regulyatorov s ekstrapolyatsiey [Algorithmic Maintenance of Self-organizing Controllers with Extrapolation]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2002, no. 3, pp. 56–63.

3. Gayduk, A.R., Kapustyan, S.G. Samoorganizuyushchiysya algoritm deystviy intellektual'nykh avtonomnykh robotov [Self-organizing Actions Algorithm of Intellectual Independent Robots]. *Nauka i obrazovanie na rubezhe tysyacheletiy: sbornik NIR* [Science and Education on Boundary of Millennia: Science and Research Collected Works]. Moscow, Uchlitvuz, 2011, issue 1, pp. 5–15.

4. Kalyaev, I.A., Gayduk, A.R., Kapustyan, S.G., Ryabchenko, V.N. Markovskie parametry mnogomernykh dinamicheskikh sistem upravleniya [Markov Parameters of Multidimensional Dynamic Control Systems]. *Vestnik IGEU*, 2013, issue 1, pp. 45–50.

5. Gantmakher, F.R. *Teoriya matrits* [The Theory of Matrixes]. Moscow, Nauka, 1988.

6. Gayduk, A.R. *Nepreryvnye i diskretnye dinamicheskie sistemy* [Continuous and Discrete Dynamic Systems]. Moscow, Uchlitvuz, 2004.

7. Gayduk, A.R. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic Control Theory]. Moscow, Vysshaya shkola, 2010.

8. Kuo, B. *Teoriya i proektirovanie tsifrovykh sistem upravleniya* [Theory and Designing Digital Control Systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1986.

Гайдук Анатолий Романович,
ФГАОУВПО «Южный федеральный университет»,
профессор кафедры систем автоматического управления,
телефон (8634) 37-16-89,
e-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Каляев Игорь Анатольевич,
Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем имени академика А.В. Каляева
ФГАОУВПО «Южного федерального университета»,
член корреспондент РАН, директор
телефон (8634) 36-07-57,
e-mail: kaliaev@mvs.sfedu.ru

Капустян Сергей Георгиевич,
Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем имени академика А.В. Каляева
ФГАОУВПО «Южного федерального университета»,
доктор технических наук, заведующий отделом,
телефон (8634) 31-54-94,
e-mail: kap@mvs.sfedu.ru

Рябченко Владимир Николаевич,
ОАО «Федеральная Сетевая Компания ЕЭС»,
доктор технических наук, референт генерального директора,
телефон (495) 962-81-82,
e-mail: rvn@mes-centra.ru