

## Динамическая модель асинхронной машины с прямым обращением к конечно-элементной модели магнитного поля

Л.Н. Булатов, А.И. Тихонов  
ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
г. Иваново, Российская Федерация  
E-mail: bulatovleo@gmail.com

### Авторское резюме

**Состояние вопроса:** В настоящее время расчет динамических режимов асинхронной машины в полевой постановке может быть осуществлен с помощью универсальных CAE-систем, например Maxwell. Однако создание специализированных программных продуктов позволяет решать те же задачи более эффективно и при меньших финансовых затратах.

**Материалы и методы:** Для расчета магнитного поля в асинхронной машине использован метод конечных элементов. Для интегрирования системы дифференциальных уравнений использован метод Эйлера.

**Результаты:** Рассмотрен вариант динамической модели асинхронной машины с прямым обращением конечно-элементной модели магнитного поля на каждом шаге интегрирования уравнений динамики. В отличие от аналогичных моделей используется модель квазистационарного магнитного поля. Рассмотрены методы ускорения расчетов.

**Выводы:** Динамическая модель асинхронной машины с прямым обращением к конечно-элементной модели магнитного поля может быть использована в автоматизированном проектировании на стадии предпроектных исследований и для уточненного поверочного расчета, в частности, для расчета пусковых характеристик машины. Расчет может осуществляться как для традиционных вариантов конструкции асинхронной машины, так и для нетрадиционных вариантов, для расчета которых не существует апробированных инженерных методик.

**Ключевые слова:** САПР, асинхронный двигатель, конечно-элементная модель, динамическая модель, время расчета, электромагнитный момент.

## Dynamic Model of Asynchronous Machine with Direct Reference to Finite Element Model of Magnetic Field

L.N. Bulatov, A.I. Tikhonov  
Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation  
E-mail: bulatovleo@gmail.com

### Abstract

**Background:** At present, the calculation of dynamic modes of asynchronous machine in the field setting can be performed by using the universal CAE-systems, such as Maxwell. However, the creation of specialized software allows us to solve the same tasks more efficiently and at lower financial cost.

**Materials and methods:** To calculate the magnetic field in the asynchronous machine the finite element method is used. To integrate the system of differential equations, the Eulers method is used.

**Results:** The dynamic model variant of asynchronous machine with a direct reference to the finite-element model of the magnetic field at each step of integrating the equations of dynamics is considered. Unlike the similar models, the model of quasi-stationary magnetic field is used. The methods of acceleration calculations are applied.

**Conclusions:** The dynamic model of asynchronous machine with a direct reference to the finite element model of the magnetic field can be used in computer-aided design at the stage of pre-study and for the calculation of the adjusted span, in particular, for the calculation of the starting characteristics of the machine. The calculation can be performed both for traditional induction machine design options, and for the non-traditional options for the calculation of which there is no proven engineering methodologies.

**Key words:** CAD, asynchronous engine, finite element model, dynamic model, calculation time, electromagnetic moment.

В [1, 2, 3] были приведены результаты разработки полевых динамических моделей асинхронных машин, в которых расчет магнитного поля в машине и интегрирование системы дифференциальных уравнений, описывающих ее динамику, разнесены во времени. При этом сначала организуется серия расчетов конечно-элементного поля в асинхронной машине при разных комбинациях значений составляющих результирующей намагничивающей силы машины по продольной и поперечной осям. Для

полевых расчетов используется библиотека конечно-элементного моделирования магнитного поля, разработанная в ИГЭУ [4, 5]. Рассчитанные таким образом матрицы потокоцеплений обмоток аппроксимируются многомерными сплайнами, по которым на каждом шаге интегрирования по времени вычисляются частные производные потокоцеплений по токам в обмотках статора и контурах ротора. С использованием этих производных вычисляются коэффициенты матрицы коэффициентов системы

уравнений динамики. Это позволяет учесть влияние конструкции машины на ее динамические характеристики. Достоинством этих моделей является высокая скорость расчета переходных процессов в асинхронной машине, сопоставимая со скоростью расчета цепных моделей, при точности, сопоставимой с точностью полевых расчетов. Недостатком такого подхода является допущение о синусоидальности магнитного поля в зазоре.

Целью исследования является создание и апробация системы динамического моделирования асинхронных машин с использованием цепной модели в комбинации с конечно-элементной моделью квазистационарного магнитного поля, обращение к которой осуществляется на каждом шаге интегрирования по времени. Это позволяет избавиться от указанного допущения, повысив тем самым универсальность модели в ущерб скорости расчета.

Для расчета была выбрана модель асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором. Принята упрощенная модель электрической цепи с нулевым проводом в обмотках статора и ротора.

В основе модели лежит решение системы уравнений:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{X}$  – вектор приращений искомых величин (токов в обмотке якоря и контурах ротора, а также угла поворота и частоты вращения ротора);  $\mathbf{L}$  – матрица коэффициентов, рассчитываемая на каждой итерации по результатам расчета магнитного поля.

Матрицы в (1) имеют следующий вид:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_{11} + L_{\sigma S} & L_{12} & \dots & L_{1N} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} + L_{\sigma S} & \dots & L_{2N} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \alpha} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & \dots & L_{3N} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial \alpha} & 0 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & \dots & L_{4N} & \frac{\partial \Psi_4}{\partial \alpha} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ L_{N1} & L_{N2} & \dots & L_{NN} + L_{\sigma R} & \frac{\partial \Psi_N}{\partial \alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \\ \frac{di_3}{dt} \\ \frac{di_4}{dt} \\ \dots \\ \frac{di_N}{dt} \\ \frac{d\alpha}{dt} \\ \frac{d\Omega}{dt} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 - i_1 r_1 - \sum_{k=1}^3 i_k R_{0S} \\ u_2 - i_2 r_2 - \sum_{k=1}^3 i_k R_{0S} \\ u_3 - i_3 r_3 - \sum_{k=1}^3 i_k R_{0S} \\ -i_4 r_4 - \sum_{k=4}^N i_k R_{0R} \\ \dots \\ -i_N r_N - \sum_{k=4}^N i_k R_{0R} \\ \Omega \\ \frac{1}{J} (M - M_0 - M_H) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $i_j$  – ток  $j$ -й обмотки или контура ротора;  $\alpha$  – угол поворота ротора;  $\Omega$  – частота вращения ротора;  $u_j$  – напряжение на  $j$ -й обмотке статора;  $r_j$  – сопротивление  $j$ -го контура;  $R_{0S}$ ,  $R_{0R}$  – сопротивления нулевых проводов обмоток статора и ротора;  $L_{\sigma S}$ ,  $L_{\sigma R}$  – индуктивность рассеяния фазной обмотки статора и контура ротора;  $N$  – количество расчетных контуров с током;  $M$  – электромагнитный момент на валу машины;  $M_0$  – момент холостого хода;  $M_H$  – момент нагрузки;  $J$  – момент инерции ротора.

При построении матрицы  $\mathbf{L}$  используется разложение

$$\frac{d\Psi_k}{dt} = \sum_{j=1}^{3+Z} \frac{\partial \Psi_k}{\partial i_j} \frac{di_j}{dt} + \frac{\partial \Psi_k}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \sum_{j=1}^{3+Z} L_{kj} \frac{di_j}{dt} + \frac{\partial \Psi_k}{\partial \alpha} \Omega, \quad (4)$$

где  $\Psi_k$  – потокосцепление  $k$ -й обмотки статора или контура ротора (для учета эффекта вытеснения тока каждый стержень короткозамкнутой обмотки ротора делится на несколько слоев);  $Z$  – количество контуров ротора.

Элементы матрицы  $\mathbf{L}$  находятся как

$$L_{kj} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial i_j} \approx \frac{\Delta \Psi_k}{\Delta i_j}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Psi_k}{\partial \alpha} \approx \frac{\Delta \Psi_k}{\Delta \alpha}. \quad (6)$$

Так как задача нелинейная, то для вычисления этих элементов на каждом шаге интегрирования по времени необходимо провести  $N+2$  конечно-элементных расчетов поля, поочередно давая приращения каждой из искомых величин и вычисляя изменения потокосцепления каждой из обмоток. В связи с этим выполнение одной итерации связано с большими временными затратами. Поэтому отдельное внимание при исследовании было уделено этой проблеме.

Прежде всего был оптимизирован алгоритм конечно-элементного расчета [6]. Для того что-

бы увеличить скорость вычислений, была разработана следующая схема расчета:

**1 шаг.** В начале  $k$ -й итерации производится конечно-элементный расчет поля с учетом нелинейности магнитных характеристик ферромагнитных сред с использованием найденных на прошлой итерации токов и угла поворота (базовый расчет). Результатом базового расчета является массив базовых значений потокоцеплений обмоток, а также массив магнитных сопротивлений элементов модели.

**2 шаг.** Поочередно дается приращение каждой из искоемых величин токов и для каждого приращения рассчитывается магнитное поле и новые значения потокоцеплений обмоток статора и контуров ротора. При этом магнитные сопротивления элементов берутся из результатов базового расчета и считаются неизменными.

Это допущение не только не влияет на точность расчета, но и стабилизирует его. Это объясняется тем, что приращения токов малы по сравнению с их реальными величинами и не оказывают заметного влияния на насыщенность магнитной цепи.

Кроме того, анализ показал, что при полном пересчете возникает недопустимая погрешность вычислений, которая может привести к значительному снижению точности и даже аварийной остановке расчета. Дело в том, что матрица  $\mathbf{L}$  близка к сингулярной, так как взаимное влияние слоев стержней ротора оказывается соизмеримым с влиянием каждого слоя на самого себя. Поэтому система уравнений (1) оказывается очень чувствительной к численной погрешности метода конечных элементов.

Погрешность полного решения методом конечных элементов нелинейной задачи можно устранить путем увеличения количества элементов в модели или уменьшения величины максимально допустимой невязки. Однако в обоих случаях результатом будет значительное снижение скорости расчета. При неизменных значениях сопротивлений магнитной цепи такого не происходит, поскольку в этом случае изменения потокоцеплений объясняются исключительно изменением токов в модели.

Значительное ускорение при использовании метода линеаризации конечно-элементной модели при вычислении элементов матрицы  $\mathbf{L}$  объясняется следующим образом. На каждой  $t$ -й итерации метода конечных элементов решается система уравнений

$$\mathbf{J}_t \mathbf{D}_t = -\mathbf{F}_t, \quad (7)$$

где  $\mathbf{J}$  – матрица Якоби;  $\mathbf{D}$  – вектор приращений магнитных потенциалов в узлах модели;  $\mathbf{F}$  – вектор невязок.

Элемент матрицы Якоби рассчитывается по формуле

$$J_{ij} = \sum_{p=1}^{p=N_i} \frac{1}{4S_p} \left[ \begin{aligned} & \frac{\partial v_p}{\partial (B_p^2)} \frac{1}{2S_p^2} \times \\ & \times \sum_{r=1}^{r=3} [(b_{pj}b_{pr} + c_{pj}c_{pr})] A_{pr} \times \\ & \times \sum_{r=1}^{r=3} (b_{pi}b_{pr} + c_{pi}c_{pr}) A_{pr} + \\ & + v_p (b_{pi}b_{pj} + c_{pi}c_{pj}) \end{aligned} \right], \quad (8)$$

где  $v = 1/\mu = f(B^2)$ ;  $\mu$  – магнитная проницаемость;  $B_p$  – магнитная индукция в  $p$ -м элементе;  $p$  – номер элемента;  $S_p$  – площадь  $p$ -го элемента;  $A$  – векторный магнитный потенциал в узле;  $b, c$  – коэффициенты, зависящие от координат элемента;  $N_i$  – количество элементов, окружающих  $i$ -й узел конечно-элементной сетки.

При неизменном магнитном сопротивлении члены матрицы Якоби остаются неизменными. Это значит, что при заданном положении ротора нелинейная задача расчета магнитного поля решается всего один раз – базовый расчет. Полученная в этом расчете матрица Якоби используется в  $N$  расчетах поля при приращениях токов. Эти расчеты не требуют пересчета матрицы Якоби и сопровождаются лишь пересчетом вектора невязок  $\mathbf{F}$ .

Следует отметить, что основное расчетное время в методе конечных элементов затрачивается именно на разложение матрицы Якоби по методу Холесского. Это значит, что время расчета элементов матрицы  $\mathbf{L}$  на каждой итерации интегрирования системы уравнений (1) практически равно времени одного расчета нелинейного квазистационарного магнитного поля.

**3 шаг.** Производится расчет  $\frac{\Delta \Psi_k}{\Delta \alpha}$  для каждой обмотки статора и каждого контура ротора.

В данном случае конечно-элементный расчет необходимо проводить, не изменяя значений магнитной проводимости в элементах модели. Однако поворот ротора относительно статора требует перестроения конечно-элементной сетки в зазоре машины. Так как задача расчета поля оказывается линейной, то она решается за одну итерацию метода Ньютона-Рафсона, что весьма несущественно увеличивает время расчета элементов матрицы  $\mathbf{L}$ .

Залогом успеха создания точной модели является точный расчет момента. Вследствие этого в работе особое внимание уделено расчету электромагнитного момента.

Как известно, электромагнитный момент рассчитывается по формуле

$$M = \frac{1}{2} \oint \left( (\vec{r} \times \vec{H})(\vec{n} \cdot \vec{B}) + (\vec{r} \times \vec{B})(\vec{n} \cdot \vec{H}) - (\vec{r} \times \vec{n})(\vec{H} \cdot \vec{B}) \right) ds. \quad (9)$$

Для плоскопараллельной задачи эта формула принимает вид:

$$M = \frac{L_{\delta}}{2R} \sum \left[ (X H_y - Y H_x)(X B_x + Y B_y) + (X B_y - Y B_x)(X H_x + Y H_y) \right] \Delta L, \quad (10)$$

где  $L_{\delta}$  – расчетная длина машины в направлении, перпендикулярном модели;  $H_x, H_y, B_x, B_y$  – составляющие вектора напряженности магнитного поля и магнитной индукции в элементе зазора;  $X, Y$  – координаты центра средней линии элемента зазора, пересекаемого ограничивающей поверхностью (рис. 1);  $\Delta L$  – длина средней линии элемента зазора.

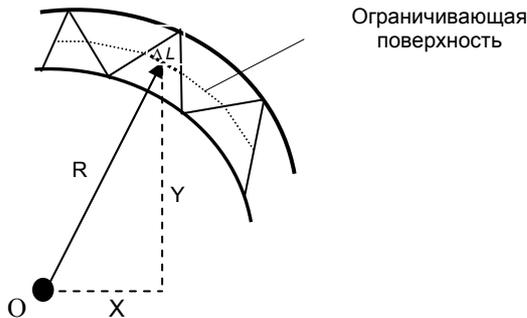


Рис. 1. К вычислению электромагнитного момента

Момент вычисляется относительно начала координат, которое совпадает с осью вращения ротора, а поверхность, ограничивающая заданный объем, выбирается цилиндрической, проходящей посередине зазора перпендикулярно плоскости модели. В качестве ограничивающей поверхности может быть также выбрана поверхность ротора. Это сократит время, требуемое для расчета момента, однако значительно снизит точность расчета, поскольку в таком случае количество элементов модели, участвующих в расчете, сокращается вдвое.

Ряд опытных расчетов с использованием модели показал, что количество элементов, которое является достаточным для точного расчета элементов матрицы  $L$ , не обеспечивает достаточной точности при расчете момента (рис. 2). В то же время достаточная для инженерных задач точность расчета электромагнитного момента достигается, когда элементы зазора имеют форму, близкую к равностороннему треугольнику (рис. 3).

Динамическая полевая модель асинхронной машины была реализована в виде автономной системы [7]. На рис. 4–6 представлены полученные с использованием модели результаты расчета пуска асинхронного двигателя с номинальной мощностью 3000 Вт и тремя парами полюсов. Пуск производился при номинальной нагрузке на валу.

Следует отметить, что колебания в кривой момента являются следствием погрешности его расчета, а также влияния зубцовых гармонических. Учет наличия скоса пазов может быть учтен путем усреднения значений потокосцепления обмоток по двум положениям ротора, сдви-

нутым на одно зубцовое деление. Для более точного результата усреднение надо производить по результатам расчета трех положений ротора, сдвинутых на половину зубцового деления относительно друг друга.

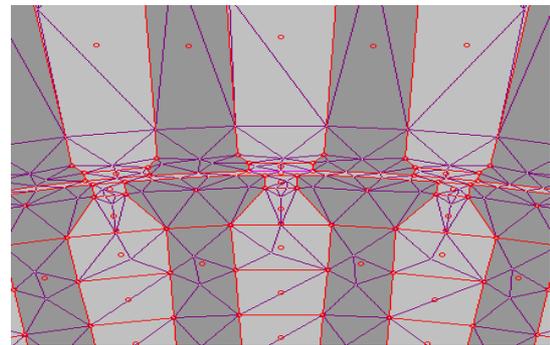


Рис. 2. Фрагмент зубцовой зоны модели с грубой триангуляцией в зазоре

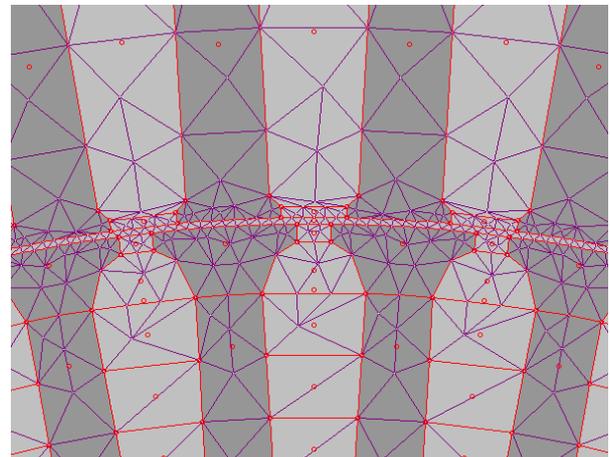


Рис. 3. Фрагмент зубцовой зоны в уточненной модели

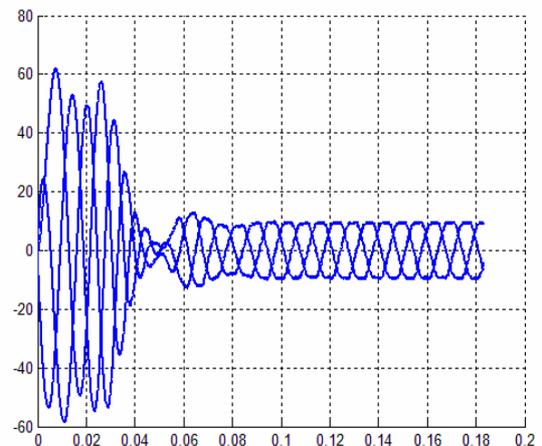


Рис. 4. Токи в фазах статора при пуске АД



Рис. 5. Угловая скорость вращения ротора

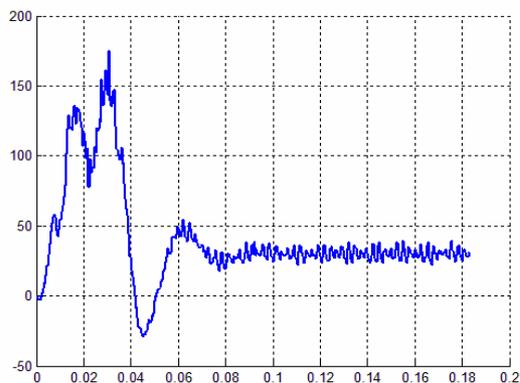


Рис. 6. Электромагнитный момент машины

#### Список литературы

1. Булатов Л.Н., Тихонов А.И. Динамическая модель асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором // Инновационные проекты молодых ученых за 2010 г.: сб. отчетов / Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2011. – С. 135–140.
2. Булатов Л.Н., Тихонов А.И. Динамическая модель асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором // Вестник научно-промышленного общества. – М.: «Алев-В», 2011. – Вып. 1. – С. 35–40.
3. Булатов Л.Н., Тихонов А.И. Разработка динамической модели асинхронной машины с использованием результатов конечно-элементного расчета // Вестник ИГЭУ. – 2012. – Вып. 4. – С. 32–34.
4. Тихонов А.И., Казаков Ю.Б. Программирование численного эксперимента с использованием конечно-элементной модели магнитного поля в объектах электромеханики / Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2008. – 80 с.
5. Тихонов А.И., Булатов Л.Н. Платформенезависимая библиотека конечно-элементного моделирования магнитного поля / Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011614852. – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, 2011.

Булатов Леонид Николаевич,  
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
аспирант,  
e-mail: bulatovleo@gmail.com

Тихонов Андрей Ильич,  
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой физики,  
e-mail: ait@dsn.ru

6. Булатов Л.Н., Тихонов А.И. Оптимизация комбинированной динамической модели асинхронной машины: матлы регион. науч.-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых «Энергия – 2012». Т. 4 / Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2012. – С. 66–71.

7. Тихонов А.И., Булатов Л.Н. Программа расчета динамических режимов асинхронной машины с учетом эффекта вытеснения тока в пазах ротора с непосредственным обращением к библиотеке конечно-элементного расчета поля / Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011615132. – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, 2011.

#### References

1. Bulatov, L.N., Tikhonov, A.I. Dinamicheskaya model' asinkhronnogo dvigatelya s korotkozamknutym rotorom [Dynamic Model of Asynchronous Machine with Short-Circuit Rotor]. *Sbornik otchetov «Innovatsionnye proekty molodykh uchenykh za 2010 g.»* [Innovation Projects of Young Researchers in 2010]. Ivanovo, 2011, pp. 135–140.
2. Bulatov, L.N., Tikhonov, A.I. Dinamicheskaya model' asinkhronnogo dvigatelya s korotkozamknutym rotorom [Dynamic Model of Asynchronous Machine with Short-Circuit Rotor]. *Vestnik nauchno-promyshlennogo obshchestva*. Moscow, Alev-V, 2011, issue 1, pp. 35–40.
3. Bulatov, L.N., Tikhonov, A.I. Razrabotka dinamicheskoy modeli asinkhronnoy mashiny s ispol'zovaniem rezul'tatov konechno-elementnogo rascheta [Developing Dynamic Model of Asynchronous Machine with Usage of Finite Element Calculation Results]. *Vestnik IGEU*, 2012, issue 4, pp. 32–34.
4. Tikhonov, A.I., Kazakov, Yu.B. *Programmirovaniye chislennogo eksperimenta s ispol'zovaniem konechno-elementnoy modeli magnitnogo polya v ob'ektakh elektromekhaniki* [Programming Numerical Experiment with usage of Finite Element Model of Magnetic Field in Electromechanics Objects]. Ivanovo, 2008. 80 p.
5. Tikhonov, A.I., Bulatov, L.N. *Platformenezavisimaya biblioteka konechno-elementnogo modelirovaniya magnitnogo polya* [Platform-independent Library of Finite Element Modelling of Magnetic Field]. Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM no. 2011614852 [Certificate of State Registration of Program № 2011614852]. Moscow, Federal'naya sluzhba po intellektual'noy sobstvennosti, patentam i tovarnym znakam, 2011.
6. Bulatov, L.N., Tikhonov, A.I. Optimizatsiya kombinirovannoy dinamicheskoy modeli asinkhronnoy mashiny [Optimization of Combined Dynamical Model of Asynchronous Machine]. *Materialy regional'noy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii studentov, aspirantov i molodykh uchenykh «Energiya-2012»* [Works of Regional Scientific and Technical Conference of Students, Post graduate Students and Young Researchers «Energiya – 2012»]. Ivanovo, 2012, vol. 4, pp. 66–71.
7. Tikhonov, A.I., Bulatov, L.N. *Programma rascheta dinamicheskikh rezhimov asinkhronnoy mashiny s uchetom efekta vytesneniya toka v pazakh rotora s neposredstvennym obrashcheniem k biblioteke konechno-elementnogo rascheta polya* [Calculation Program of Dynamical Modes of Asynchronous Machine according to Effect of Current Displacement in Rotor Slots with Direct Reference to the Library of Finite Element Field Calculation]. Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM no. 2011615132 [Certificate of State Registration of Program № 2011615132]. Moscow, Federal'naya sluzhba po intellektual'noy sobstvennosti, patentam i tovarnym znakam, 2011.