© «Вестник ИГЭУ» Вып. 1 2013 г.

УДК 681.5.015

Марковские параметры многомерных динамических систем управления

И.А. Каляев[1], А.Р. Гайдук[1], С.Г. Капустян[1], В.Н. Рябченко[2]
[1]ФГАОУВПО «Южный федеральный университет», г. Таганрог, Российская Федерация
[2]ОАО «Федеральная Сетевая Компания ЕЭС», г. Москва, Российская Федерация
E-mail: gaiduk_2003@mail.ru, mvs@mvs.sfedu.ru, rvn@mes-centra.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: При адаптивном управлении с идентификацией целесообразно использовать марковские параметры неопределенных систем. Однако математические модели, которые в явной форме содержат марковские параметры управляемых многомерных динамических систем, практически неизвестны, что затрудняет решение задачи синтеза алгоритмов самоорганизации в системах управления и делает поиск таких моделей актуальным.
Материалы и методы: Искомые математические модели управляемой системы получены методом последовательного дифференцирования по времени вектора ее выходных переменных с применением теоремы Гамильтона-Кэли.
Результаты: Для многомерной управляемой динамической системы построены виртуальные математические модели, которые в явной форме содержат марковские параметры этой системы. Эти параметры однозначно связаны с внутренней структурой системы и вполне определяют влияние кусочно-постоянных управлений на ее выходные переменные и их производные по времени. Марковские параметры являются инвариантами динамической системы к невырожденным преобразованиям ее переменных состояния.
Выводы: Полученные результаты свидетельствуют, что марковские параметры системы однозначно связаны с ее внутренней структурой и вполне определяют влияние кусочно-постоянных управлений на выходные переменные системы и их производные по времени, а также являются инвариантами динамической системы к невырожденным преобразованиям ее переменных состояния. Марковские параметры могут применяться для представления математических моделей, исследования свойств и идентификации управляемых систем.

Ключевые слова: система управления, идентификация, математическая модель, марковские параметры, инвариантность.

Markov Parameters of Multivariable Dynamic Control Systems

I.A. Kalyaev[1], A.R. Gaiduk[1], S.G. Kapustyan[1], V.N. Ryabchenko[2]
[1]Southern federal university, Taganrog, Russian Federation
[2]Joint-stock Company “Federal Grid Company”, Moscow, Russian Federation
E-mail: gaiduk_2003@mail.ru, mvs@mvs.sfedu.ru, rvn@mes-centra.ru

Abstract

Background: It is efficient to use the Markov parameters of uncertain system while the adaptive control with identification. However, the mathematical models with the Markov parameters of the controlled multivariable dynamic systems are almost unknown. It makes difficult to solve the synthesis problem of self-organization algorithm in control systems and does the search of such models urgent.
Materials and methods: The required mathematical models of the control system are received by means of the method of successive differentiation according to vector time of its output variables with the usage of the Cayley–Hamilton theorem.
Results: The virtual mathematical models which contain the Markov parameters are developed for the controlled multivariable dynamic systems. These parameters are directly connected with the system internal structure and define the influence of piecewise constant controls on its output variables and their time derivatives. The Markov parameters are invariants of the dynamic system to nondegenerate transformations of its state variables.
Conclusions: The received results prove that the Markov parameters of the system are connected with its internal structure and define the influence of piecewise constant controls on its output variables and their time derivatives. The Markov parameters can be used for mathematical models implementation, research of characteristics and identification of controlled systems.

Key words: control system, identification, mathematical model, Markov parameters, invariance.

Введение. В настоящее время для управления сложными техническими системами все чаще применяются адаптивные системы управления, которые создаются без использования априорно определенных моделей [1]. В работах академика А.А. Красовского показано, что одним из наиболее эффективных типов адаптивных систем являются самоорганизующиеся системы, для функционирования которых требуется минимальная априорная информация об объекте управления, причем самого общего порядка [2].

Самоорганизующаяся система с функциональной (структурной) адаптацией имеет более высокий «уровень интеллектуальности», чем система с параметрической адаптацией, и отличается наличием мощного вычислительного комплекса [3, 2]. Последнее обусловлено тем, что в процессе функционирования самоорганизующейся системы обрабатывается в реальном времени очень большой объем информации, прежде всего, в целях формирования оперативной, адекватной математической модели управляемой системы, а также решения задач оценки внешних условий, внутреннего состояния системы, формирования закона управления и его оптимизации [4, 5, 6].

Решению задачи синтеза адаптивных систем управления посвящено большое количество работ [1, 7–10]. В большинстве традиционных методов синтеза адаптивных систем предполагается, что порядок объекта известен априори и не изменяется в процессе функционирования. Недостатки традиционных адаптивных систем подробно рассмотрены академиком А.А. Красовским в работе [2], где показано, что более целесообразно рассматривать задачу синтеза адаптивной системы в предположении, что и порядок, и модель неопределенной управляемой системы априори неизвестны. Именно в этом случае система управления должна быть самоорганизующейся.

В исходном состоянии в самоорганизующейся системе отсутствует управляющая часть в виде некоторого закона или алгоритма управления. Формально, в исходном состоянии в такой системе имеются: управляемая система, измерительная подсистема, устройства для оказания управляющих воздействий, а также средства, реализующие алгоритм самоорганизации. При включении системы в результате работы этого алгоритма в реальном времени автоматически формируется закон управления (определяются его структура и параметры), а также соответствующий алгоритм управления и программа его реализации.

Как известно, для формирования закона управления необходима модель управляемой системы. Именно поэтому в самоорганизующейся системе всегда осуществляется процесс идентификации в реальном времени.

В нашем исследовании для решения задачи идентификации привлекаются так называемые марковские параметры динамических систем [11–13]. Как будет показано ниже, для полной линейной динамической системы характерна однозначная связь между марковскими параметрами, с одной стороны, и ее структурой, с другой. Причем марковские параметры системы столь же тесно и достаточно просто связаны с реакцией линейной системы на некоторые входные воздействия. Именно эти факты обусловливают применение марковских параметров для решения задачи синтеза самоорганизующихся систем управления сложными, техническими системами в условиях неопределенности.

История вопроса. Марковские параметры использовались известными русскими учеными П.Л. Чебышевым и А.А. Марковым в связи с исследованием разложения рациональных дробей в ряды по отрицательным степеням аргумента [11]. Ф.Р. Гантмахером было показано, что марковские параметры тесно связаны с проблемой исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений.

Для решения задачи идентификации марковские параметры, по-видимому, впервые использовались Б. Хо, который предложил алгоритм идентификации дискретных систем по импульсной переходной матрице [12, 14]. Однако этот алгоритм не нашел практического применения из-за сложностей формирования дельта-функций. В работе [13] предложен более эффективный алгоритм идентификации непрерывных объектов на основе марковских параметров. Этот алгоритм особенно удобен для реализации в цифровых адаптивных системах управления. В частности, он использовался в работе [15] для построения алгоритмического обеспечения самоорганизующегося оптимального регулятора с экстраполяцией (СОРЭ), принцип работы которого предложен академиком А.А. Красовским [2, 16].

Ниже рассмотрим определение марковских параметров многомерных систем, введем специальную форму математической модели таких систем, уравнения которой явно содержат марковские параметры. Это позволит установить связь этих параметров с внутренней структурой системы. Важным свойством марковских параметров является их инвариантность к форме представления модели системы. Эти свойства марковских параметров динамических систем делают реальной возможность оперативной идентификации управляемых систем, необходимой для создания самоорганизующихся систем управления, в особенности, сложными распределенными системами, например группами роботов или энергосистемами.

Марковские параметры. Рассмотрим линейную непрерывную динамическую управляемую систему с несколькими входами и несколькими выходами, уравнения которой в переменных состояния имеют следующий вид:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния размерности n; $u \in R^q$ – вектор управлений; $y \in R^l$ – вектор выходных переменных системы; A, B, C, D – числовые матрицы соответствующих размерностей.

В соответствии с определением [11, 12, 15], марковские параметры динамической системы (1) – это величины, определяемые выражениями

$$\mu_{ij}^{0} = d_{ij}, \ \ \mu_{ij}^{\upsilon} = C_i A^{\upsilon-1} B^j, \ \ \upsilon = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (2)$$

где d_{ij} – элементы матрицы D; C_i и B^j – строки и столбцы матриц C и B соответственно.

Подчеркнем, что число марковских параметров не ограничено при любом порядке системы. Из выражений (2) следует, что в случае многомерных систем (1) удобнее определять не сами марковские параметры, а матрицы марковских параметров $M^{\upsilon} = [\mu_{ij}^{\upsilon}] \in R^{l \times q}$ по формулам

$$M^0 = D, \ \ M^{\upsilon} = CA^{\upsilon-1}B, \ \ \upsilon = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

Марковские параметры и структура системы. В целях установления связи марковских параметров системы (1) с ее структурой рассмотрим реакцию системы (1) на кусочно-постоянные управляющие воздействия, приняв следующие допущения. Будем считать, что непрерывная система (1) является полной, т.е. полностью управляемой и полностью наблюдаемой [17], а ее вектор управлений $u = u(t)$ является вектором кусочно-постоянных функций, т.е. $u_k = u(kT)$, где k = 0, 1, 2, …, T – период квантования по времени вектора управлений $u(t)$. Графики изменения управления $u_j(t)$ и одной из выходных величин $y_i = y_i(t)$ системы (1) в общем случае приведены на рис. 1.

Для удобства введем следующие обозначения: $y(t) = y(k \mid \tau)$, $x(t) = x(k \mid \tau)$ при $t = kT + \tau$, $\tau \in (0, T)$, $y(k \mid 0) = \lim y(t)$ при $t \to kT$ (справа), и $y(k \mid T) = \lim y(t)$ при $t \to (k+1)T$ (слева).

Как известно [14, 17], в качестве переменных состояния всегда принимаются непрерывные величины, поэтому имеет место очевидное равенство

$$x(k \mid 0) = x(k-1 \mid T), \ \ k = 0, 1, 2, \ldots \ . \qquad (4)$$

В то же время выходные переменные $y_i(t)$ системы (1) или их производные $d^{\ell} y_i(t)/dt^{\ell}$ по времени $i = \overline{1, l}$, $\ell = 1, 2, \ldots$, в общем случае могут иметь разрывы при кусочно-постоянном управлении, если, например, $u_{jk} \neq u_{jk-1}$.

Действительно, дифференцируя вектор-функцию $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ по t при $t \neq kT$, получим: $\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) + D\dot{u}(t) = CAx(t) + CBu(t)$, так как $\dot{u}(t) = 0$ при $t \neq kT$. Вводя обозначения: $y(t) = y^{(0)}(k \mid \tau)$; $\dot{y}(t) = y^{(1)}(k \mid \tau)$ или $\dot{y}^{(\ell-1)}(t) = y^{(\ell)}(k \mid \tau)$, где $\tau \in (0, T)$, $\ell = 1, 2, \ldots$, найдем, что l-вектор производных ℓ-го порядка от вектора $y(t)$ определяется выражением

$$y^{(\ell)}(k \mid \tau) = CA^{\ell} x(k \mid \tau) + CA^{\ell-1} Bu(k \mid \tau)$$

или с учетом обозначения (2)

$$y^{(\ell)}(k \mid \tau) = CA^{\ell} x(k \mid \tau) + M^{\ell} u_k \qquad (5)$$

при всех $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

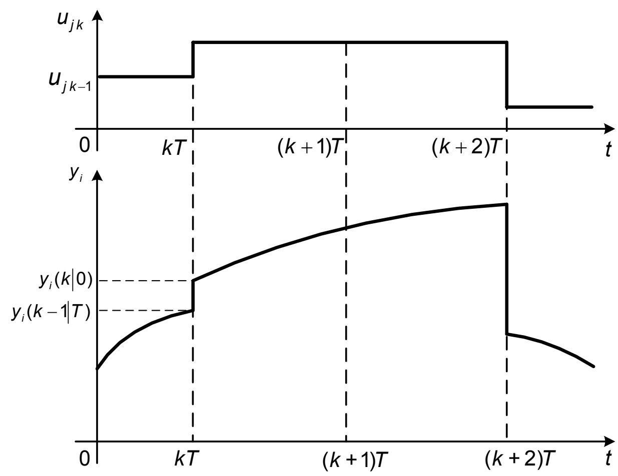

Рис. 1. Графики изменения управления $u_j(t)$ и одной из выходных величин y_i системы (1)

Известно, что каждая выходная величина динамической системы n-го порядка имеет лишь n – 1 независимую производную по времени [14, 18]. Поэтому из (5) с учетом второго уравнения (1) и теоремы Гамильтона-Кэли [11] вытекает простейшая векторная модель динамических систем при кусочно-постоянном управлении:

$$\dot{y}^{(\ell)}(k \mid \tau) = y^{(\ell+1)}(k \mid \tau), \ \ \ell = \overline{0, n-2},$$

$$\dot{y}^{(n)}(k \mid \tau) = -\sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{\ell} y^{(\ell)}(k \mid \tau) + M^{\ell} u_k,$$

$$y(k \mid \tau) = y^{(0)}(k \mid \tau), \qquad (6)$$

где α_{ℓ} – коэффициенты характеристического полинома

$A(p) = \det(pE - A) = \alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \alpha_1 p + \alpha_0$ системы (1). Подчеркнем, что здесь $y^{(\ell)}(k \mid \tau)$ – это l-вектор-столбец, т.е. уравнения (6) описывают l систем с одним выходом и q входами каждая.

Однако уравнения (6) нецелесообразно использовать для описания системы (1), так как векторы производных $y^{(\ell)}(k \mid \tau)$ в (6) могут испытывать скачки при $t = kT$. Действительно, из (5) с учетом (4) имеем

$$\Delta y^{(\ell)}(k) = y^{(\ell)}(k \mid 0) - y^{(\ell)}(k-1 \mid T) = M^{\ell} \Delta u_k, \qquad (7)$$

где $\Delta y^{(\ell)}(k)$ – скачок ℓ-й производной при $t = kT$, если $\Delta u_k = u_k - u_{k-1} \neq 0$ и $M^{\ell} \neq 0$.

Этот же вывод следует и из анализа графиков, приведенных на рис. 1 и соответствующих системе с $\mu_{ij}^{0} \neq 0$. При $t = kT$ и $t = (k + 2)T$ управление $u_j(t)$ имеет скачки, поэтому и выходная величина $y_i(t)$ при $t = kT$ и $t = (k + 2)T$ имеет разрывы. В то же время при $t = (k + 1)T$ управление $u_j(t)$ не имеет скачка, поэтому и выходная величина $y_i(t)$ при $t = (k + 1)T$ не имеет разрыва.

Именно в силу этого уравнения (6) нельзя использовать как уравнения в переменных состояния динамических систем, так как переменные состояния, как отмечалось выше, должны быть непрерывными функциями времени. Поэтому далее в качестве новых переменных состояния моделей неопределенных систем типа (1) используются непрерывные переменные $z_i^{\ell} = C_i A^{\ell-1} x$, $i = \overline{1,l}$, или составленные из них l-векторы $z^{\ell} = CA^{\ell-1}x$, число которых также не ограничено при любом n [15].

В соответствии с выражением (5), l-векторы z^{ℓ} можно также определить следующим равенством:

$$z^{\ell}(k \mid \tau) = y^{(\ell-1)}(k \mid \tau) - M^{\ell-1}u_k. \qquad (8)$$

Дифференцируя обе части равенства (8) по времени при $0 < \tau < T$ и учитывая, что при этом $\dot{u}_k = 0$, получим

$$\dot{z}^{\ell}[k \mid \tau] = \dot{y}^{(\ell-1)}[k \mid \tau] = y^{(\ell)}[k \mid \tau], \quad \tau \in (0,T).$$

С учетом (5) выводим

$$\dot{z}^{\ell}(k \mid \tau) = CA^{\ell}x(k \mid \tau) + M^{\ell}u_k.$$

Это уравнение с учетом определения l-векторов z^{ℓ} записывается следующим образом:

$$\dot{z}^{\ell}(k \mid \tau) = z^{\ell+1}(k \mid \tau) + M^{\ell}u_k, \qquad (9)$$

где $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Если $z^{\ell}(k \mid \tau)$ – это векторные переменные состояния системы ν-го порядка, то лишь ν векторных переменных $z^{\ell}(k \mid \tau)$ являются независимыми. Поэтому второе уравнение (1) и уравнение (9) можно представить следующим образом:

$$y(k \mid \tau) = z^1(k \mid \tau) + M^0 u_k, \qquad (10)$$

$$\dot{z}^{\ell}(k \mid \tau) = z^{\ell+1}(k \mid \tau) + M^{\ell}u_k, \quad \ell = \overline{1, \nu-1},$$

$$\dot{z}^{\nu}(k \mid \tau) = -\sum_{i=0}^{\nu-1} \alpha_{\nu i} z^{i+1}(k \mid \tau) + M^{\nu}u_k, \qquad (11)$$

где $\alpha_{\nu i}$ – коэффициенты характеристического полинома системы (10), (11). Обратим внимание, что здесь уравнение выхода записано первым, причем оно является единственным для всех систем (11) различных порядков $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

Система (10), (11) при векторных переменных состояния $z^{\ell} = CA^{\ell-1}x$ имеет следующий вид:

$$y = \begin{bmatrix} E & O & O & \ldots & O \end{bmatrix} z_{\nu}(k \mid \tau) + M^0 u_k, \qquad (12)$$

где вектор

$$z_{\nu}(k|\tau) = [z^{1T}(k|\tau) \quad z^{2T}(k|\tau) \quad \ldots \quad z^{\nu T}(k|\tau)]^T$$

является решением системы уравнений

$$\dot{z}_{\nu}(k|\tau) = \begin{bmatrix} O & E & O & \ldots & O \\ O & O & E & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & E \\ -\alpha_{\nu 0}E & -\alpha_{\nu 1}E & -\alpha_{\nu 2}E & \ldots & -\alpha_{\nu,\nu-1}E \end{bmatrix} \times$$

$$\times z_{\nu}(k|\tau) + \begin{bmatrix} M^1 \\ M^2 \\ \vdots \\ M^{\nu-1} \\ M^{\nu} \end{bmatrix} u_k. \qquad (13)$$

Здесь O – нулевая ($l \times l$)-матрица, k = 0, 1, 2,…, ν = 1, 2, 3,….

Хотя по внешнему виду система (12), (13) совпадает с обычными уравнениями динамических систем в переменных состояния типа (1), на самом деле эти уравнения одновременно описывают l систем с одним выходом и q управлениями.

Каждая из этих систем имеет скалярную выходную переменную

$$y_i = y_i(k|\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} z_{\nu i}(k|\tau) + M_i^0 u_k, \qquad (14)$$

где M_i^0 – i-я строка матрицы M^0 марковских параметров μ_{ij}^0; $z_{\nu i}(k|\tau)$ – обычный ν-вектор состояния $z_{\nu i}(k|\tau) = \left[z_i^1(k|\tau) \, z_i^2(k|\tau) \ldots z_i^{\nu}(k|\tau) \right]^T$, который определяется решением следующей системы уравнений в форме Коши:

$$\dot{z}_{\nu i}(k|\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\alpha_{\nu 0} & -\alpha_{\nu 1} & -\alpha_{\nu 2} & \ldots & -\alpha_{\nu,\nu-1} \end{bmatrix} \times$$

$$\times z_{\nu i}(k|\tau) + \begin{bmatrix} M_i^1 \\ M_i^2 \\ \vdots \\ M_i^{\nu-1} \\ M_i^{\nu} \end{bmatrix} u_k. \qquad (15)$$

Здесь M_i^{υ} – i-я строка матрицы M^{υ} марковских параметров $\mu_{ij}^{\upsilon}, \upsilon = \overline{1,\nu}$; $i = \overline{1,l}$.

В некоторых случаях многомерная система, например, при исследовании ее свойств или идентификации подвергается воздействию только одного скалярного управления. При этом в уравнениях (12), (13) $u_k = [0 \ldots u_{jk} \ldots 0]^T$, т.е. только одна j-я компонента вектора управлений не равна нулю. При этом компоненты выходного l-вектора $y(k|\tau)$ представляют собою реакции всех каналов системы на управляющее воздействие u_{jk}. В этом случае система уравнений (12), (13) принимает следующий вид:

$$y(k\mid\tau)=\begin{bmatrix}E & O & O & \dots & O\end{bmatrix}z_\nu(k\mid\tau)+M_j^0 u_{jk}, \qquad (16)$$

$$\dot z_\nu(k|\tau)=\begin{bmatrix} O & E & O & \dots & O \\ O & O & E & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & E \\ -\alpha_{\nu 0}E & -\alpha_{\nu 1}E & -\alpha_{\nu 2}E & \dots & -\alpha_{\nu,\nu-1}E \end{bmatrix}\times$$

$$\times z_\nu(k|\tau)+\begin{bmatrix} M_j^1 \\ M_j^2 \\ \vdots \\ M_j^{\nu-1} \\ M_j^{\nu}\end{bmatrix}u_{jk}. \qquad (17)$$

Здесь M_j^υ – j-й столбец матрицы M^υ марковских параметров μ_{ij}^υ, $\upsilon=\overline{1,\nu}$; $j=\overline{1,q}$.

Полученные выражения (10)–(17) фактически являются уравнениями в переменных состояния многомерных управляемых динамических систем ν-го порядка, причем порядок этих систем ν, вообще говоря, может иметь произвольное значение. При этом уравнения содержат в явной форме марковские параметры.

Весьма важно, что все эти системы находятся под влиянием тех же кусочно-постоянных управлений $u_k=u(k\mid\tau)=Const$, $\tau\in(0,T)$, что и рассматриваемая неопределенная система (1). При этом выходные переменные $y_i(t)$ систем (10)–(17) в дискретные моменты времени kT совпадают со значениями соответствующих выходных переменных $y_i(t)$ неопределенной системы (1) при всех $i=\overline{1,l}$ и $k = 0, 1, 2,\dots$.

Другими словами, все эти системы формально описывают систему (1) и, следовательно, являются ее моделями. Так как система (1) имеет порядок n, а системы (10)–(17) имеют различные порядки, то они называются виртуальными моделями неопределенной системы (1) [15].

Уравнения этих виртуальных моделей, например, при $l = q = 1$, т.е. при скалярных переменной $y(t)$ и управлении $u(t)$, и при $\nu = 3, 4$ можно записать следующим образом:

при $\nu = 3$

$$\begin{aligned} &y=z^1+\mu^0 u_k,\\ &\dot z^1=z^2+\mu^1 u_k,\\ &\dot z^2=z^3+\mu^2 u_k,\\ &\dot z^3=-\alpha_{30}z^1-\alpha_{31}z^2-\alpha_{32}z^3+\mu^3 u_k; \end{aligned} \qquad (18)$$

при $\nu = 4$

$$\begin{aligned} &y=z^1+\mu^0 u_k,\\ &\dot z^1=z^2+\mu^1 u_k,\\ &\dot z^2=z^3+\mu^2 u_k,\\ &\dot z^3=z^4+\mu^3 u_k,\\ &\dot z^4=-\alpha_{40}z^1-\alpha_{41}z^2-\alpha_{42}z^3-\alpha_{43}z^4+\mu^4 u_k. \end{aligned} \qquad (19)$$

Очевидно, при $\nu = n$ каждая из систем уравнений (10)–(13) и (14)–(17) эквивалентна системе (1). Отметим, что в этом случае векторы x и z связаны некоторым преобразованием подобия $z_\nu = z_n = N_n x$, где матрица N_n составляется из строк матрицы наблюдаемости системы (1). Следовательно, преобразование $z_n = N_n x$ является невырожденным, а виртуальные модели (10)–(17) при $\nu = n$ эквивалентны системе (1) только в том случае, когда система (1) полностью наблюдаемая [17]. Это вполне естественное условие, так как если система не полностью наблюдаемая, то некоторые переменные $z_i^\ell=C_iA^{\ell-1}x$ не будут содержать информации о поведении ее ненаблюдаемой части.

Подчеркнем также, что из (8) следует, что если $u_k = 0$, $k = 0, 1, 2,\dots$, то переменные состояния z_i^ℓ виртуальных моделей (10)–(17) являются $(\ell-1)$-ми производными по времени выходной переменной $y_i(t)$ объекта управления. Это, очевидно, не противоречит указанному выше свойству непрерывности переменных состояния, так как при $u_k = 0$, $k = 0, 1, 2,\dots$, ни выходная переменная системы, ни все ее производные по времени не будут иметь разрывов при всех $t \ge 0$.

Из уравнений (10), (11) и (12), (13) следует, в частности, что марковские параметры μ_{ij}^υ определяют как внутреннюю структуру системы, так и влияние кусочно-постоянного управления u_k на выходные переменные системы и их производные по времени.

Например, если по отношению к некоторой одномерной ($l = q = 1$) системе (1) известно, что $n = 3$, $\mu^0=\mu^1=0$, а $\mu^2\ne 0$, $\mu^3\ne 0$, то, в соответствии с выражениями (18), можно утверждать, что структура этой системы эквивалентна трем последовательно включенным интеграторам с прямыми и обратными связями (рис. 2).

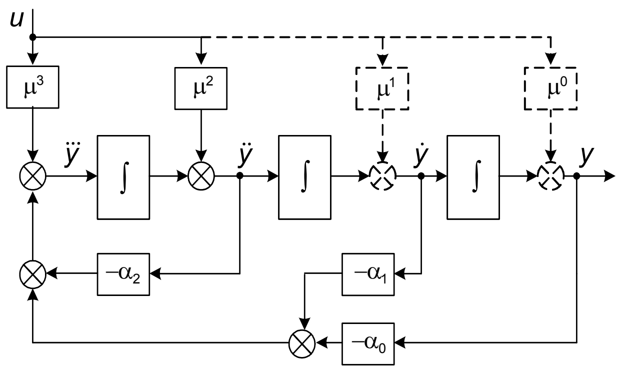

Рис. 2. Структурная схема системы 3-го порядка при $\mu^0 = \mu^1 = 0$ и $\mu^2 \neq 0$, $\mu^3 \neq 0$

Штриховыми линиями на рис. 2 показаны связи, которые имели бы место в данной системе, если бы $\mu^0 \neq 0$ и $\mu^1 \neq 0$. Согласно схеме рис. 2, при кусочно-постоянном управлении $u = u_k$ переменная $y(t)$ и ее производная по времени $y^{(1)}(t) = dy(t)/dt$ являются непрерывными функциями времени, а производные по времени $y^{(2)}(t) = d^2y(t)/dt^2$ и $y^{(3)}(t) = d^3y(t)/dt^3$ имеют разрывы при $t = kT$, если $u_k \neq u_{k-1}$. При этом относительный порядок μ_{sis} данной системы равен двум, так как младшей производной по времени от выходной переменной $y(t)$, на которую непосредственно влияет ее входное воздействие – управление $u = u_k$, является вторая производная [17]. Из этого следует, что относительный порядок некоторого канала многомерной системы всегда равен индексу не равного нулю младшего марковского параметра этого канала.

Марковские параметры – инварианты управляемых систем. Так как марковские параметры определяют внутреннюю структуру динамических систем, то они являются структурными инвариантами относительно невырожденных преобразований переменных. Покажем это. Предположим, вектор состояния системы (1) подвергнут невырожденному преобразованию, т.е. $\tilde{x} = Px$, причем $\det P \neq 0$. Как известно [11, 17], в этом случае новые уравнения системы (1) принимают следующий вид:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \quad y = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}u, \tag{20}$$

где

$$\tilde{A} = P^{-1}AP, \quad \tilde{B} = P^{-1}B, \quad \tilde{C} = CP, \quad \tilde{D} = D. \tag{21}$$

Обозначим матрицы марковских параметров системы (20) как $\tilde{M}^{\upsilon}$. Тогда из последнего равенства (21) и определения (2) следует, что $\tilde{M}^0 = M^0$, а $\tilde{M}^{\upsilon} = \tilde{C}\tilde{A}^{\upsilon-1}\tilde{B}$.

Подставляя в выражение $\tilde{M}^{\upsilon} = \tilde{C}\tilde{A}^{\upsilon-1}\tilde{B}$ равенства (21), будем иметь

$$\tilde{M}^1 = \tilde{C}\tilde{B} = CPP^{-1}B = M^1,$$

$$\tilde{M}^2 = \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} = CP(P^{-1}AP)P^{-1}B = CAB = M^2.$$

Аналогично при $\upsilon = 3, 4, \ldots$:

$$\tilde{M}^{\upsilon} = \tilde{C}\tilde{A}^{\upsilon-1}\tilde{B} = CP(P^{-1}AP)\ldots(P^{-1}AP)P^{-1}B = CA^{\upsilon-1}B = M^{\upsilon}.$$

Из этого следует утверждение, что марковские параметры, действительно, являются инвариантами динамических систем.

Заключение

Полученные результаты свидетельствуют, что для каждой динамической системы управления можно найти неограниченное число марковских параметров. Эти параметры являются структурными инвариантами системы управления и однозначно определяют ее структуру и степень влияния входных кусочно-постоянных управлений на ее выходные переменные и соответствующие производные по времени последних.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (грант № 12-08-90050-Бел_а).

Список литературы

1. **Александров А.Г.** Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высш. шк., 1976.

2. **Красовский А.А.** Исторический очерк развития и современные проблемы самоорганизующегося регулятора // Устойчивость и колебания нелинейных систем: тез. докл. V Междунар. семинара. – М.: ИПУ, 1998. – С. 10.

3. **Саридис Дж.** Самоорганизующиеся стохастические системы управления: пер. с англ. / под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1980.

4. **Интеллектуальные** роботы / И.А. Каляев, В.М. Лохин, И.М. Макаров и др.; под общ. ред. Е.И. Юревича. – М.: Машиностроение, 2007.

5. **Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г.** Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. – М.: Физматлит, 2009.

6. **Ивченко В.Д., Корнеев А.А.** Анализ методов распределения заданий в задаче управления коллективом роботов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2009. – № 7. – С. 36–42.

7. **Фрадков А.Л.** Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта // Автоматика и телемеханика. – 1974. – № 12. – С. 96–103.

8. **Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.** Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000.

9. **Никифоров В.О.** Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. – СПб.: Наука, 2003.

10. **Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.** Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 11. – С. 3–37.

11. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – М.: Наука, 1988.

12. **Мороз А.И.** Курс теории систем. – М.: Высш. шк., 1987.

13. **Гайдук А.Р., Медведев М.В.** Построение самоорганизующихся систем управления в условиях неопределенности // Аналитические методы анализа и синтеза регуляторов. – Саратов: Изд-во СГТУ, 2000. – С. 30–43.

14. **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971.

15. **Гайдук А.Р.** Алгоритмическое обеспечение самоорганизующихся регуляторов с экстраполяцией // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. – № 3. – С. 56–63.

16. **Красовский А.А.** Развитие концепции, аналити-

ческая теория, алгоритмическое обеспечение двухконтурного самоорганизующегося регулятора // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1999. – № 4. – С. 52–64.

17. **Гайдук А.Р.** Теория автоматического управления. – М.: Высш. шк., 2010.

18. **Арнольд В.И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1988.

References

1. Aleksandrov, A.G. *Optimal'nye i adaptivnye sistemy* [Optimal and Adaptive Systems]. Moscow, Vysshaya shkola, 1976.

2. Krasovskiy, A.A. Istoricheskiy ocherk razvitiya i sovremennye problemy samoorganizuyushchegosya regulyatora [Historical Sketch of Development and Modern Problems of Self-organizing Controller]. *Tezisy dokladov V Mezhdunarodnogo seminara «Ustoychivost' i kolebaniya nelineynykh sistem»* [Theses of Vth International Seminar "Stability and Vibrations of Nonlinear Systems"]. Moscow, IPU, 1998, p. 10.

3. Saridis, Dzh. *Samoorganizuyushchiesya stokhasticheskie sistemy upravleniya* [Self-organizing Stochastic Control Systems]. Moscow, Nauka, 1980.

4. Kalyaev, I.A., Lokhin, V.M., Makarov, I.M. *Intellektual'nye roboty* [Intellectual Robots]. Moscow, Mashinostroenie, 2007.

5. Kalyaev, I.A., Gaiduk, A.R., Kapustyan, S.G. *Modeli i algoritmy kollektivnogo upravleniya v gruppakh robotov* [Models and Algorithms of Collective Control in Robots Group]. Moscow, Fizmatlit, 2009.

6. Ivchenko, V.D., Korneev, A.A. Analiz metodov raspredeleniya zadaniy v zadache upravleniya kollektivom robotov [Analysis of Problems Distribution Methods in Robot Group Control]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2009, no. 7, pp. 36–42.

7. Fradkov, A.L. Sintez adaptivnoy sistemy stabilizatsii lineynogo dinamicheskogo ob"ekta [Synthesis of Adaptive Stabilization System for Linear Dynamic Object]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1974, no. 12, pp. 96–103.

8. Miroshnik, I.V., Nikiforov, V.O. Fradkov, A.L. *Nelineynoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinamicheskimi sistemami* [Nonlinear and Adaptive Control of Complex Dynamic Systems]. Saint-Petersburg, Nauka, 2000.

9. Nikiforov, V.O. *Adaptivnoe i robastnoe upravlenie s kompensatsiey vozmushcheniy* [Adaptive and Robust Control with Compensation of Disturbances]. Saint-Petersburg, Nauka, 2003.

10. Andrievskiy, B.R., Fradkov, A.L. Metod passifikatsii v zadachakh adaptivnogo upravleniya, otsenivaniya i sinkhronizatsii [Pacification Method in Problems of Adaptive Control, Estimation, and Synchronization]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2006, no. 11, pp. 3–37.

11. Gantmakher, F.R. *Teoriya matrits* [The Theory of Matrixes]. Moscow, Nauka, 1988.

12. Moroz, A.I. *Kurs teorii sistem* [Course of Systems Theory]. Moscow, Vysshaya shkola, 1987.

13. Gaiduk, A.R., Medvedev, M.Yu. Postroenie samoorganizuyushchikhsya sistem upravleniya v usloviyakh neopredelennosti [Design of Self-organizing Control Systems in Uncertainty Conditions]. *Analiticheskie metody analiza i sinteza regulyatorov* [Analytical Methods of Analysis and Synthesis of Regulators]. Saratov, Izdatel'stvo SGTU, 2000, pp. 30–43.

14. Kalman, R., Falb, P., Arbib, M. *Ocherki po matematicheskoy teorii sistem* [Sketches on Mathematical Systems Theory]. Moscow, Mir, 1971.

15. Gaiduk, A.R. Algoritmicheskoe obespechenie samoorganizuyushchikhsya regulyatorov s ekstrapolyatsiey [Knoware of Self-organizing Controllers with Extrapolation]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2002, no. 3, pp. 56–63.

16. Krasovskiy, A.A. Razvitie kontseptsii, analiticheskaya teoriya, algoritmicheskoe obespechenie dvukhkonturnogo samoorganizuyushchegosya regulyatora [Conception Development, Analytical Theory, Knoware of Two-circuit Self-organizing Controller]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 1999, no. 4, pp. 52–64.

17. Gaiduk, A.R. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic Control Theory]. Moscow, Vysshaya shkola, 2010.

18. Arnol'd, V.I. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1988.

Каляев Игорь Анатольевич,
Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем имени академика А.В. Каляева ФГАОУВПО «Южный федеральный университет»,
член корреспондент РАН, директор,
e-mail: kaliaev@mvs.sfedu.ru

Гайдук Анатолий Романович,
ФГАОУВПО «Южный федеральный университет»,
профессор кафедры систем автоматического управления,
e-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Капустян Сергей Георгиевич,
Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем имени академика А.В. Каляева ФГАОУВПО «Южный федеральный университет»,
доктор технических наук, заведующий отделом,
e-mail: kap@mvs.sfedu.ru

Рябченко Владимир Николаевич,
ОАО «Федеральная Сетевая Компания ЕЭС»,
доктор технических наук, референт генерального директора,
телефон (495)9628182,
e-mail: rvn@mes-centra.ru