УДК 530.1

Математическая модель электромагнитного поля с локальным определением плотности электрического заряда

Б.С. Курнышев
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: bor403@yandex.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: В классической электродинамике понятие плотности электрического заряда определено как суммарный электрический заряд, отнесённый к единице пространственного объёма. Такое определение не объясняет сущности элементарного электрического заряда. Возможен принципиально иной подход к определению плотности электрического заряда, основанный на применении локального принципа и неримановой геометрии.
Материалы и методы: Основные результаты получены путем применения математического аппарата тензорного анализа, вариационных методов и принципа наименьшего действия.
Результаты: Показано, что электромагнитное поле – это одно из физических проявлений свойств пространственно-временного дифференциально-геометрического многообразия с неримановой метрикой. Установлено, что локальная плотность электрического заряда, вектор локальной плотности электрического тока и 4-вектор скорости закономерно связаны между собой системой волновых уравнений. Получены значения компонент тензора кручения в электромагнитном поле. Показано, что компоненты тензора кручения закономерно связаны с пространственно-временным изменением компонент 4-вектора скорости. Получено тензорное уравнение движения в пространстве с кручением.
Выводы: Разработанная модель электромагнитного поля, в отличие от уравнений Максвелла, позволяет определить плотность электрического заряда и вектор плотности электрического тока строго локально.

Ключевые слова: электрический заряд, плотность электрического заряда, вектор плотности электрического поля, электродинамика, модели электромагнитного поля, тензор кручения.

Mathematical Model of Electromagnetic Field With Local Determining the Charge Density

B.S. Kurnyshev
Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation
E-mail: bor403@yandex.ru

Abstract

Background: In classical electrodynamics the concept of electric charge density is defined as the total electric charge per unit volume of space. Such definition does not explain the nature of the elementary electric charge. It is possible to suggest the fundamentally different approach for determinating the density of electric charge, which is proposed in this article. This approach is based on the principle of local and non-Riemannian geometry.
Materials and methods: The main results were obtained by applying the mathematical apparatus of tensor analysis, variational methods, and the principle of least action.
Results: It is shown that the electromagnetic field is one of the physical manifestations of the properties of space-time of differential-geometric manifolds with non-Riemannian metric. It is found out that the local density of electric charge, the local vector electric current density and 4-velocity vector naturally connected by a system of wave equations. The values of the components of the torsion tensor of the electromagnetic field are given. It is shown that the components of the torsion are naturally associated with spatial and temporal changes in components of 4-velocity vector. The tensor equation of motion in space with torsion is presented.
Conclusions: The developed model of the electromagnetic field in contrast to the Maxwell equations allows to determine the density of electric charge and electric current density vector locally.

Key words: electric charge, the electric charge density, vector density of the electric field, electrodynamics, the models of the electromagnetic field, the torsion tensor.

Электродинамика является основой всей современной электротехники и энергетики. Однако в этой фундаментальной науке до сих пор существуют нерешенные проблемы.

В классической электродинамике [1] понятие плотности электрического заряда определено как суммарный электрический заряд, отнесенный к единице пространственного объема. Такое определение не объясняет сущности элементарного электрического заряда.

Возможен принципиально другой подход к определению плотности электрического заряда. Подход основан на применении локального принципа и неримановой геометрии [2, 3].

В общем случае пространственно-временной интервал можно задать фундаментальной квадратичной формой следующего вида:

$$ds^2 = \dot{g}_{ik}dx^i dx^k = g_{ik}dx^i dx^k + \ddot{g}_{ik}dx^i dx^k, \qquad (1)$$

где $\dot{g}_{ik}$ – компоненты фундаментального метрического тензора в общем случае; $g_{ik} = \dfrac{\dot{g}_{ik} + \dot{g}_{ki}}{2}$ – обычная риманова симметричная ($g_{ik} = g_{ki}$) и $\ddot{g}_{ik} = \dfrac{\dot{g}_{ik} - \dot{g}_{ki}}{2}$ – антисимметричная ($\ddot{g}_{ik} = -\ddot{g}_{ki}$) составляющие тензора $\dot{g}_{ik}$; x^0 – временная координата; x^1, x^2, x^3 – пространственные координаты.

Чтобы интервал отвечал требованию релятивистской инвариантности, достаточно выполнения одного из следующих условий:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{g}_{00}\,dx^0 dx^0 > 0, \quad \text{если} \quad \dot{g}_{ik}\,dx^i dx^k < 0, \\ &\dot{g}_{00}\,dx^0 dx^0 < 0, \quad \text{если} \quad \dot{g}_{ik}\,dx^i dx^k > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Из (1) после несложных вычислений получаем

$$ds^2 = g_{ik}\frac{dx^i dx^k + dx^k dx^i}{2} + \ddot{g}_{ik}\frac{dx^i dx^k - dx^k dx^i}{2}. \qquad (3)$$

Согласно (3), в частном случае, т. е. при условии

$$dx^i dx^k = dx^k dx^i, \qquad (4)$$

второе слагаемое исчезает вместе с $\ddot{g}_{ik}$. В результате имеем интервал, определяющий геометрию риманова пространства-времени.

Если же

$$dx^i dx^k \neq dx^k dx^i \quad при \quad i \neq k, \qquad (5)$$

то тензор $\ddot{g}_{ik}$ и вместе с ним антисимметричная составляющая интервала сохраняются.

Действительно, произведения дифференциалов координат не обязательно должны коммутировать. Физика этого факта достаточно прозрачна: при движении по замкнутой трехмерной пространственной кривой (например, в окрестности локальной ИСО) возможно вернуться в исходную пространственную точку, но при таком движении *пространственно-временные* точки неизбежно расходятся.

Непосредственно из определения интервала ds по (1) возникает представление о векторном поле ($\vec{u}$) как функции времени и пространственных координат:

$$\begin{aligned} &\vec{u} \equiv u_i\vec{e}^{\,i} \equiv \dot{g}_{ki}\frac{dx^k}{ds}\vec{e}^{\,i} \equiv u_k\vec{e}^{\,k} \equiv \dot{g}_{ik}\frac{dx^i}{ds}\vec{e}^{\,k} \equiv \\ &\equiv u^i\vec{e}_i \equiv \frac{dx^i}{ds}\vec{e}_i \equiv u^k\vec{e}_k \equiv \frac{dx^k}{ds}\vec{e}_k, \end{aligned} \qquad (6)$$

где $\vec{e}^{\,i}$, $\vec{e}^{\,k}$, $\vec{e}_i$, $\vec{e}_k$ – локальные системы базисных векторов. Связь между базисными векторами определяется через $\dot{g}_{ik}$, например, $\vec{e}_i = \dot{g}_{ik}\vec{e}^{\,k}$, $\vec{e}_k = \dot{g}_{ki}\vec{e}^{\,i}$.

Векторное поле $\vec{u}$ само по себе не имеет физического смысла, так как поле $\vec{u}$ определено неоднозначно. Действительно, согласно (1) и (6),

$$ds = u_i dx^i. \qquad (7)$$

При подстановке в (7) $u_i - \partial_i\alpha$ вместо u_i (α – произвольное скалярное поле) в выражении для ds появится полный дифференциал $\left(-d\alpha = -\partial_i\alpha\, dx^i\right)$, который, как известно, не повлияет на уравнения движения. Это означает, что вектор $\vec{u}$ ни в одной пространственно-временной точке не имеет определенного направления. Следовательно, поле $\vec{u}$ не является силовым, в отличие, например, от напряженностей электрического и магнитного полей, и потому не может быть физической характеристикой.

Итак, для вывода уравнений движения у нас нет никаких математических конструкций, кроме (1) и (7), поэтому нет другого варианта представить вариационное уравнение, кроме как в виде

$$\begin{aligned} &\delta S = \delta\int_a^b ds \equiv \delta\int_a^b(-2A\,ds) \equiv \\ &\equiv \delta\int_a^b(-A\sqrt{\dot{g}_{ik}dx^i dx^k} - Au_i dx^i) = 0, \end{aligned} \qquad (8)$$

где $ds = \sqrt{\dot{g}_{ik}dx^i dx^k}$ и вместе с тем $ds = u_i dx^i$; A – произвольная константа.

При варьировании действия нужно принять во внимание следующее. Векторное поле $\vec{u}$ является тензором первого ранга. Дифференциал и вариация поля $\vec{u}$, рассматриваемые в криволинейном пространстве-времени, должны быть тоже абсолютными векторами, т. е. такими величинами, которые инвариантны к выбору координатной системы. Следовательно, нужно использовать формулы ковариантного дифференцирования и ковариантного варьирования:

$$\begin{aligned} &Du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x^k}dx^k - \dot{\Gamma}^j_{ki}u_j dx^k, \\ &\delta u_k = \frac{\partial u_k}{\partial x^i}\delta x^i - \dot{\Gamma}^j_{ik}u_j\delta x^i, \end{aligned} \qquad (9)$$

где $\dot{\Gamma}^j_{ki}$ и $\dot{\Gamma}^j_{ik}$ – коэффициенты связности (символы Кристоффеля). В общем случае $\dot{\Gamma}^j_{ki} \neq \dot{\Gamma}^j_{ik}$. Эти коэффициенты появляются при дифференцировании и при варьировании векторного поля $\vec{u}$ и представляют собой скалярные произведения вида

$$\dot{\Gamma}^j_{ki} = -\frac{\partial\vec{e}^{\,j}}{\partial x^k}\cdot\vec{e}_i, \quad \dot{\Gamma}^j_{ik} = -\frac{\partial\vec{e}^{\,j}}{\partial x^i}\cdot\vec{e}_k. \qquad (10)$$

В результате из (8) следует тензорное уравнение движения

$$\frac{du_i}{ds} - \Gamma^j_{ik} u_j u^k - \frac{1}{2} S_{ik,j}\, u^j u^k = \\ = S_{ik,j}\, u^j u^k + I_{ik}\, u^k. \quad (11)$$

Тензор $S_{ik,j}$ получается из разности $\dot{\Gamma}^j_{ki} - \dot{\Gamma}^j_{ik}$, поэтому представляет собой тензор кручения:

$$S_{ik,j} = S_{ik} u_j = \frac{\partial \ddot{g}_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \ddot{g}_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial \ddot{g}_{ij}}{\partial x^k}. \quad (12)$$

Тензор I_{ik} имеет следующую структуру:

$$I_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial x^i} - \frac{\partial u_i}{\partial x^k}. \quad (13)$$

Тензор $S_{ik,j}$ в данной задаче не может быть нулевым, так как равенство $S_{ik,j} = 0$ соответствует только риманову пространству-времени.

Непосредственно из (1) и (6) следует

$$\dot{g}_{ik} = u_i u_k. \quad (14)$$

Подставляя (14) в определение $\ddot{g}_{ik}$ и производя замены индексов, получаем полный набор величин, необходимых для вычисления структуры тензора $S_{ik,j}$:

$$\ddot{g}_{jk} = \frac{1}{2}\left(u_k u_j - u_j u_k\right),$$
$$\ddot{g}_{ki} = \frac{1}{2}\left(u_i u_k - u_k u_i\right), \quad (15)$$
$$\ddot{g}_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_j u_i - u_i u_j\right).$$

Подстановка (15) в (12) дает

$$S_{ik,j} = \frac{P_{kj}u_i - u_i P_{kj}}{2} - \frac{P_{ij}u_k - u_k P_{ij}}{2} + \frac{I_{ik}u_j - u_j I_{ik}}{2}, \quad (16)$$

где

$$P_{kj} = \frac{\partial u_j}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^j},$$
$$P_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x^i} + \frac{\partial u_i}{\partial x^j}, \quad (17)$$
$$I_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial x^i} - \frac{\partial u_i}{\partial x^k}.$$

Согласно (16), структура тензора $S_{ik,j}$ определяется тремя соотношениями, состоящими из некоммутирующих между собой тензорных величин:

$$P_{kj}u_i \ne u_i P_{kj},$$
$$P_{ij}u_k \ne u_k P_{ij}, \quad (18)$$
$$I_{ik}u_j \ne u_j I_{ik}.$$

Здесь уместно вспомнить, что в квантовой механике эрмитовы операторы, отвечающие наблюдаемым импульсу и положению (P и Q), тоже не коммутируют: $PQ \ne QP$. Но, заметим, в отличие от квантовой механики, соотношения (18) возникают естественным образом в результате применения *локального принципа*.

Свертка тензоров P_{kj} и P_{ij} на u_j дает следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= \vec{V}\cdot\left(-grad\, V_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right), \\ \vec{F} &= V_0\left(-grad\, V_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right) + \vec{V}\times rot\, \vec{V}, \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

где $F_0, \vec{F}$ – временная и пространственная компоненты поля $\vec{f} = I_{ik} u^k \vec{e}^i$.

В уравнениях (19) и (20) есть величины, инвариантные к градиентному преобразованию компонент поля $\vec{u}$. Это два следующих векторных поля:

$$\vec{\xi} = -grad\, V_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}, \quad (21)$$

$$\vec{\zeta} = rot\, \vec{V}. \quad (22)$$

Заметим, что поле $\vec{u}$ было введено изначально как некоторая допустимая математическая конструкция, не имеющая физического смысла, поэтому такое поле не должно иметь источников. Это значит, что дивергенция этого поля должна быть всегда тождественно равна нулю: $\partial_i u^i \equiv 0$ или

$$div\, \vec{V} = -\frac{1}{c}\frac{\partial V_0}{\partial t}. \quad (23)$$

Применим векторные операции *rot* и *div* к каждому из полей $\vec{\xi}$ и $\vec{\zeta}$, определенных соотношениями (21), (22). В результате из (21), (22), (23) получаем конечную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} & rot\, \vec{\zeta} = \frac{4\pi}{c}\vec{\varepsilon} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}, \\ & rot\, \vec{\xi} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t}, \quad div\, \vec{\zeta} = 0, \quad div\, \vec{\xi} = 4\pi\varepsilon, \\ & \nabla^2 \vec{V} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{\varepsilon}, \\ & \nabla^2 V_0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2} = -4\pi\varepsilon, \quad div\, \vec{\varepsilon} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Очевидно, что уравнения в (24) по своей структуре абсолютно точно совпадают с уравнениями, известными из электродинамики. Чтобы в этом убедиться, достаточно сделать замену переменных:

$$\vec{\zeta} = \vec{H},\ \vec{\xi} = \vec{E},\ \varepsilon = \rho,\ \vec{\varepsilon} = \vec{j},\ V_0 = \varphi,\ \vec{V} = \vec{A}, \quad (25)$$

где $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля; $\vec{E}$ – напряженность электрического поля; ρ – плотность электрического заряда; $\vec{j}$ – вектор плотности электрического тока; φ – скалярный потенциал; $\vec{A}$ – векторный потенциал.

Все величины в (24), (25) определены строго локально, в том числе и плотность электрического заряда и вектор плотности электрического тока.

Заключение

Электромагнитное поле – это одно из физических проявлений свойств реального пространственно-временного дифференциально-геометрического многообразия с неримановой метрикой. В таком многообразии дифференциалы пространственно-временных координат не коммутируют, плотность электрического заряда и вектор плотности электрического тока определены строго локально.

Список литературы

1. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теория поля. – М.: Наука, 1988.

2. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров: пер. с англ. / под ред. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

3. **Курнышев Б.С., Данилов С.П.** Тензорная методология в теории электротехнических систем: учеб. пособие / Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2002. – 180 с.

References

1. Landau, L.D., Lifshits, E.M. *Teoriya polya* [Field Theory]. Moscow, Nauka, 1988. 512 p.

2. Korn, G., Korn, T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Reference Book on Mathematics for Scientific Workers and Engineers]. Moscow, Nauka, 1973. 832 p.

3. Kurnyshev, B.S., Danilov, S.P. Kurnyshev, B.S., Danilov, S.P. *Tenzornaya metodologiya v teorii elektrotekhnicheskikh sistem: uchebnoe posobie* [Tensor Methodology in the Theory of Electrotechnical Systems]. Ivanovo, 2002. 180 p.

Курнышев Борис Сергеевич,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор кафедры электропривода и автоматизации промышленных установок,
e-mail: bor403@yandex.ru