УДК 621.926

О корреляции между балансом массы и энергии в моделях измельчения

В.Е. Мизонов, М.А. Газимагомедова, Н.Р. Лезнова, А.Н. Беляков
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: mizonov46@mail.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Линейные модели кинетики измельчения с постоянной матрицей измельчения, которые повсеместно используются при моделировании преобразования фракционного состава, находятся в противоречии с уравнением баланса энергии и должны быть дополнены специальными ограничениями, чтобы удовлетворить обоим балансам вместе.
Материалы и методы: Предлагаемая математическая модель процесса основана на совместном анализе уравнений фракционного баланса и баланса энергии, а также на использовании принципа максимума энтропии.
Результаты: Показано, что модель кинетики измельчения с постоянной матрицей измельчения в принципе не может удовлетворить уравнению энергии, которая должна меняться при каждом последующем нагружении материала.
Выводы: Для того, чтобы модель измельчения удовлетворяла уравнению энергии, необходимо корректировать матрицу измельчения для каждого последующего нагружения или использовать энтропийную модель, в которой баланс энергии удовлетворяется автоматически. Энтропийная модель позволяет также прогнозировать функцию распределения энергии по фракциям материала.

Ключевые слова: сыпучий материал, измельчение, распределение частиц по размерам, матрица измельчения, баланс энергии, энтропия, функция распределения энергии.

On Correlation between Mass and Energy Balances in Grinding Models

V.E. Mizonov, M.A. Gazimagomedova, N.R. Leznova, A.N. Belyakov
Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation
E-mail: mizonov46@mail.ru

Abstract

Background: The linear models of grinding kinetics with the permanent grinding matrix, which are used everywhere in transformation modelling of fractional content, come into conflict with the energy balance equation and must be added with the special constraints in order to meet both the energy and mass balance equations.
Materials and methods: The proposed mathematical model is based on the coupled analysis of the fraction balance equations and energy balance equation as well as on the principle of maximum entropy.
Results: It is shown that the model of grinding kinetics with constant matrix of grinding cannot meet the energy balance equation in general. The matrix must be changed at each step of loading material.
Conclusions: It is necessary to correct the grinding matrix at each step of material loading or to use the entropic model in which the energy balance is met automatically to allow the grinding model to satisfy the equation. The entropic model also allows predicting the energy split function over fraction of material.

Key words: granular material, grinding, particle size distribution, matrix of grinding, energy balance, entropy, energy split function.

Термин кинетика измельчения обычно относится к описанию изменения распределения частиц по размерам в процессах измельчения. Если это распределение представлено содержанием конечного числа фракций f_j (j = 1,2,…m, где j = 1 относится к самой крупной фракции), то оно может быть описано вектором-столбцом **f**, изменение которого от одного нагружения материала к другому описывается следующим рекуррентным матричным равенством:

$$\mathbf{f}^{i+1}=\mathbf{P}^{i}\,\mathbf{f}^{i}, \qquad (1)$$

где i – число нагружений с удельной энергией E^i; $\mathbf{P}^i$ – матрица измельчения, являющаяся нижней треугольной матрицей размера $m\times m$, в которой j-й столбец представляет собой распределение частиц по размерам в размолотой фракции с номером j.

Для того чтобы соответствовать условию баланса массы фракций, элементы этой матрицы должны удовлетворять условию

$$\sum_{k=j}^{m}\mathbf{P}_{kj}=1,\ \ j = 1, 2,\dots, m. \qquad (2)$$

Равенство (1) относится к популяционно-балансовой модели измельчения [1, 2], в которой обычно матрица измельчения представляется через две другие матрицы – селективную и распределительную:

$$\mathbf{P = I - S - BS}, \qquad (3)$$

где **S** – диагональная селективная матрица, каждый элемент которой показывает измельченную долю наблюдаемой фракции; **B** – распределительная матрица, каждый столбец которой описывает распределение частиц по размерам в измельченной части фракции; **I** – единичная матрица.

Обе матрицы (или одна из них) считаются зависящими от подводимой к материалу энергии, и если на каждом нагружении энергия считается одинаковой, то и матрицы считаются постоянными. Таким образом, подводимая к материалу удельная энергия учитывается неявно, а баланс энергии вообще не рассматривается. Модели с **P** = const относятся к линейным моделям кинетики измельчения.

Необходимо выяснить, может ли соблюдаться энергетический баланс, если единственным ограничением на матрицу измельчения является равенство (2), а если равенство (2) не является единственным ограничением, то какие дополнительные ограничения должны быть приняты, чтобы этот баланс соблюдался, если справедлива или несправедлива гипотеза о независимом измельчении фракций.

Начнем анализ модели со случая, когда справедлива гипотеза о независимом измельчении фракций. В этом случае можно рассматривать процесс измельчения фракции j со средним размером x_j независимо от измельчения других фракций. Для того чтобы преобразовать фракцию в ее осколки с размерами x_k, $k = j,\ldots,m$, в соответствии с матрицей измельчения **P**, необходима следующая величина энергии:

$$\mathbf{E}_j = \sum_{k=j}^{m} e_{kj}\mathbf{P}_{kj}\mathbf{f}_j, \qquad (4)$$

где $\mathbf{e}_{kj}$ – энергия полного перехода фракции j во фракции меньшего размера k.

Гипотеза о пропорциональном распределении энергии между фракциями приводит к тому, что удельная энергия, подведенная к каждой фракции, одинакова и равна удельной энергии, подведенной ко всему материалу. В этом случае равенство (4) приобретает вид

$$\mathbf{E} = \sum_{k=j}^{m} \mathbf{e}_{kj}\mathbf{P}_{kj}. \qquad (5)$$

Величины $\mathbf{e}_{kj}$ могут быть рассчитаны в соответствии с принятым энергетическим законом измельчения [2, 3]. В частности, для законов Риттингера и Кика они рассчитываются по формулам:

$$e_{kj} = c_R\left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_j}\right); \qquad (6)$$

$$e_{kj} = c_K \ln\left(\frac{x_j}{x_k}\right), \qquad (7)$$

где c_R и c_K – коэффициенты, зависящие от свойств материала.

В дальнейшем будем использовать закон Риттингера, согласно которому увеличение удельной поверхности материала прямо пропорционально подводимой удельной энергии. Традиционным подходом к построению матрицы измельчения **P** является экспериментальное измельчение отдельных фракций при некоторой удельной энергии E, определение фракционного состава измельченного материала и использование его как соответствующих столбцов матрицы. Для того чтобы описать эти фракционные составы, обычно подбираются некоторые функции, никак не относящиеся к энергетическому балансу процесса. Возьмем для примера часто используемые функции измельчения в следующем виде:

$$S_j = a(E)x_j/x_1, \qquad (8)$$

$$B_{kj} = 1/(m-j), \qquad (9)$$

где x_1 – средний размер самой крупной фракции; $a(E)$ – коэффициент пропорциональности, зависящий от удельной энергии, причем если E = const при каждом нагружении, то a и вся матрица **P** также считаются постоянными.

Рис. 1,а иллюстрирует эволюцию фракционного состава и рост удельной поверхности A_i для последовательных нагружений материала при условии a = const на каждом нагружении. Рост удельной поверхности очевидно не пропорционален возрастающей полной энергии, подведенной к материалу. Кинетическое уравнение (1) в этом случае линейно, но энергетический баланс вообще не принят во внимание. Линейный рост удельной поверхности в модели может быть достигнут путем подгонки коэффициента a на каждом отдельном нагружении. Результат такого описания показан на рис. 1,б, где линейность роста удельной поверхности соблюдается, но матрица измельчения уже меняется от нагружения к нагружению.

Таким образом, на каждом нагружении каждый столбец матрицы **P** должен удовлетворять одновременно условиям (2) и (5). Однако, если число наблюдаемых фракций $m > 2$, существует бесконечное число комбинаций элементов столбца, удовлетворяющих этим условиям, т. е. матрица **P** не может быть восстановлена единственным образом.

В матрице измельчения каждый столбец описывает фракционный состав продуктов измельчения отдельной фракции, причем число исходов этого случайного события, удовлетворяющих балансу массы фракций, бесконечно.В работе [4] предложено использовать принцип максимума информационной энтропии этого события, чтобы выбрать наиболее вероятное распределение:

$$\mathbf{H} = -\sum_{k=j}^{m} \mathbf{P}_{kj} \ln \mathbf{P}_{kj} \Rightarrow \max, \; j = 1,2,\ldots,m. \qquad (10)$$

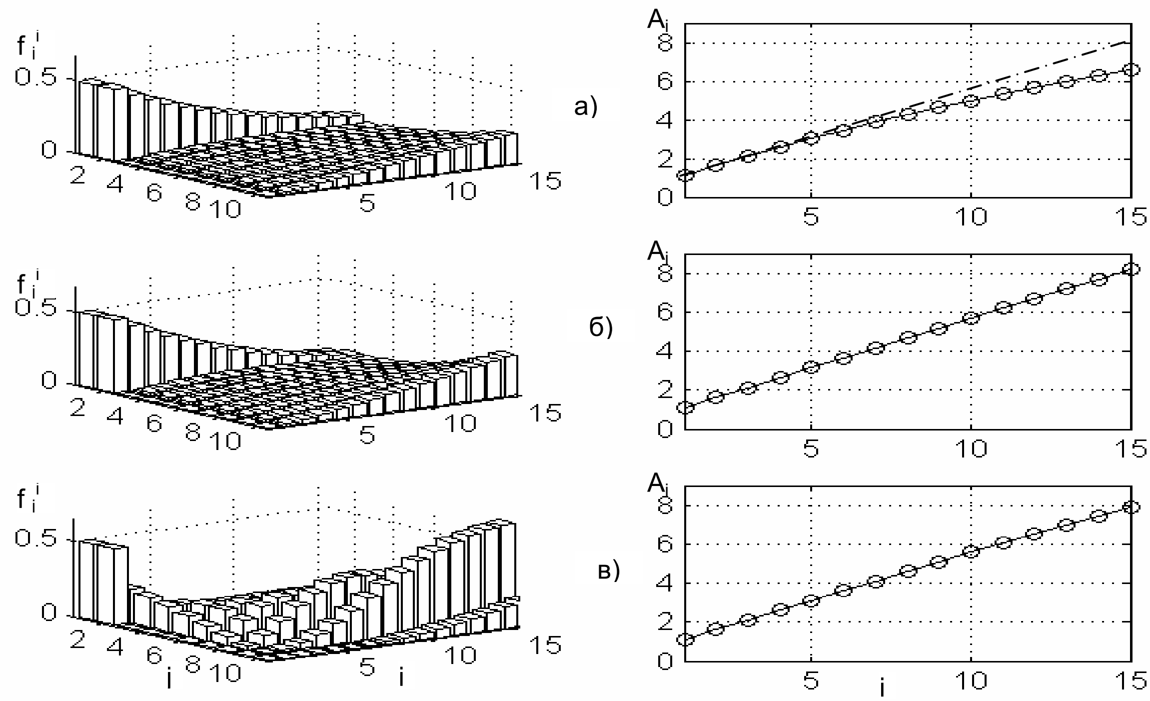

Рис. 1. Эволюция фракционного состава (слева) и рост удельной поверхности материала (справа): а – при постоянной матрице измельчения (**P** = const; $\Delta A_i \neq$ const); б – при подгоняемой матрице измельчения (**P** ≠ const; ΔA_i = const); в – при энтропийной модели измельчения (**P** = const; ΔA_i = const)

Решение оптимизационной задачи (10) должно подчиняться ограничениям (2) и (5), т. е. автоматически удовлетворять условиям баланса массы фракций и энергии. Это решение выглядит следующим образом:

$$P_{kj} = \frac{\exp(\mu_j e_{kj})}{\sum\limits_{k=j}^{m} \exp(\mu_j e_{kj})}, \qquad (11)$$

где неопределенные множители Лагранжа μ_j должны быть определены из нелинейного уравнения

$$\mathbf{E} = \sum_{k=j}^{m} e_{kj} \exp(\mu_j e_{kj}). \qquad (12)$$

Графики на рис. 1,в показывают эволюцию фракционного состава, полученную с постоянной матрицей, удовлетворяющей одновременно условиям баланса массы фракций и энергии, и свидетельствуют о линейном росте удельной поверхности (рис. 1,в, справа).

Теперь обратимся к случаю, когда измельчение фракции считается зависимым от присутствия окружающих ее фракций. Основным вопросом при этом является распределение подводимой энергии между фракциями измельчаемого материала. Описанные в работе [5] результаты экспериментального исследования этого распределения при измельчении сжатием показали, что оно существенно отличается от распределения, пропорционального массе фракций. Отличие предложено описывать функцией расщепления энергии

$$K_{Sj} = E_j/(E\,f_j), \qquad (13)$$

которая в общем случае заранее неизвестна.

С учетом сказанного уравнение энергетического баланса должно использоваться не в виде (5), а в виде (4), где учтено влияние фракционного состава f_j. Поскольку этот состав меняется от нагружения к нагружению, то и матрица **P** уже не будет постоянной, т. е. модель становится нелинейной в принципе.

Энергетический баланс должен соблюдаться не по каждой отдельной фракции, а по всем фракциям вместе

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=j}^{m} \mathbf{e}_{kj} \mathbf{P}_{kj} \mathbf{f}_j. \qquad (14)$$

Формулировка принципа максимума энтропии будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{H} = -\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=j}^{m} \mathbf{P}_{kj} \ln P_{kj} \Rightarrow \max, \qquad (15)$$

а решение оптимизационной задачи (15) примет вид

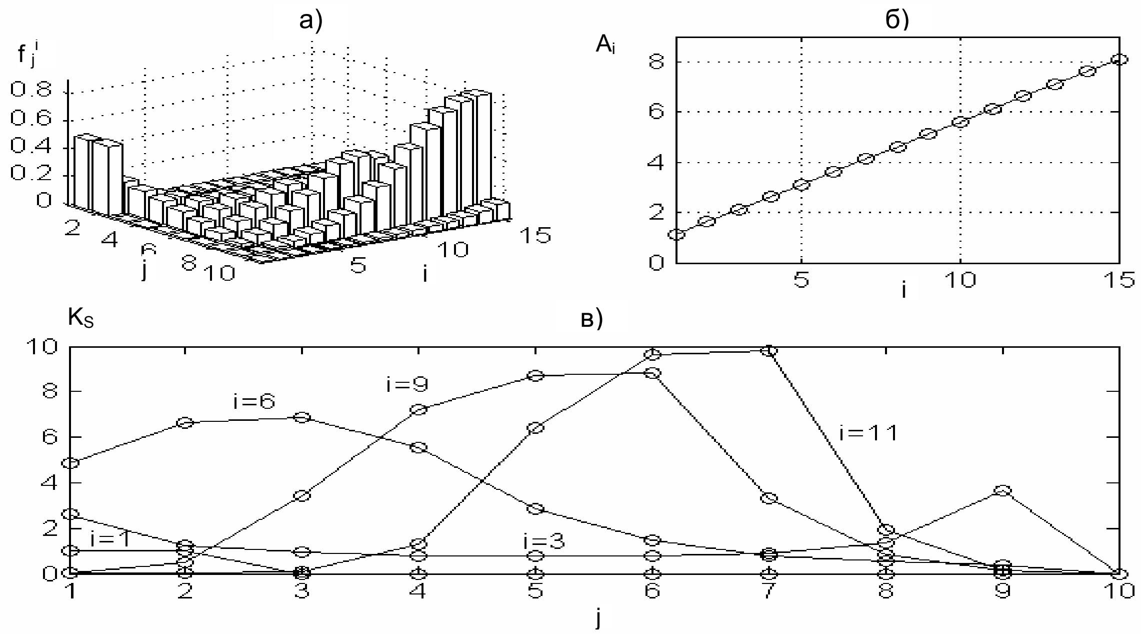

Рис. 2. Зависимое измельчение фракций: а – эволюция фракционного состава; б – рост удельной поверхности; в – функция расщеплении энергии при различных номерах нагружений

$$P_{kj} = \frac{\exp(\mu e_{kj} f_j)}{\sum_{k=j}^{m} \exp(\mu e_{kj} f_j)}, \qquad (16)$$

где неопределенный множитель Лагранжа μ становится одинаковым для всех фракций и определяется из уравнения(14) после подстановки в него выражения (16). Затем, используя выражение (4), можно рассчитать энергию, пришедшуюся на j-ю фракцию, и функцию расщепления энергии K_{Sj} по выражению (13).

Некоторые результаты моделирования рассматриваемого случая показаны на рис. 2, где на каждом нагружении подводится одинаковая энергия, соответствующая одинаковому росту удельной поверхности, равному 0,2. На рис. 2,а показана эволюция фракционного состава материала от нагружения к нагружению. Качественно она соответствует эволюции, показанной на рис. 1,в, но отличается количественно. График на рис. 2,б подтверждает линейный рост удельной поверхности, однако, чтобы обеспечить его в рассматриваемом случае, матрица **P** должна меняться от нагружения к нагружению. Рис. 2,в иллюстрирует функцию расщепления энергии для нескольких нагружений. Поскольку она зависит от фракционного состава нагружаемых частиц, который меняется в процессе измельчения, происходит и значительное изменение этой функции. Эти чисто расчетные результаты находятся в хорошем качественном соответствии с экспериментальными данными работы [5] для измельчения сжатием.

Таким образом, выполненное исследование позволяет утверждать, что при гипотезе о независимом измельчении фракций популяционно-балансовая модель с искусственно введенной постоянной селективной и распределительной матрицей не может одновременно удовлетворить балансу массы фракций и энергии, что делает ее некорректной. Применение принципа максимума энтропии позволяет найти такую постоянную матрицу измельчения, которая поддерживает оба условия. Однако при зависимом измельчении фракций модель кинетики с постоянной матрицей невозможна вообще.

Список литературы

1. Austin L.G. A Discussion of Equations for the Analysis of Batch Grinding. *Powder Technology*, 106 (1999) 71–77.

2. Bernotat S., Schonert K. *Size Reduction. Ullmann's Encyclopedia of Industrial Chemistry*. VCH, Weinheim, 1988.

3. Austin L.G. A Commentary on the Kick, Bond and Rittinger Laws of Grinding. *Powder Technology*, 7 (1973) 315–318.

4. Zhukov V., et al. The modelling of grinding process by means of the principle of maximum entropy. *Powder Technology*, 95 (1998) 248–253.

5. Liu J., Schonert K. Modelling of Interparticle Breakage. *Proc. 8-th European Symp. on Comminution*. Vol. 1. Stockholm, 1994, pp. 102–115.

Мизонов Вадим Евгеньевич,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики,
e-mail: mizonov46@mail.ru

Газимагомедова Марина Алибегаджиевна,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
аспирант кафедры прикладной математики,
e-mail: 08_marina_89@mail.ru

Лезнова Нина Руфиновна,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики,
e-mail: vladimir.leznov@gmail.com

Беляков Антон Николаевич,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат технических наук, докторант кафедры прикладной математики,
e-mail: ab_pm@mail.ru