

УДК (539.3+624.07):534.1

Динамический расчет пространственных нелинейных колебаний участка трубопровода с жесткими опорами

А.И. Муницын, Л.Н. Крайнова, Ф.Б. Огурцов
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: munitsyn@rambler.ru, krainova_larisa@mail.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: В прикладных задачах большой интерес представляет динамический расчет трубопроводов высокого давления в гидравлических системах машин. В связи с тем, что под действием вибрационной нагрузки трубопровод может совершать как плоские, так и пространственные колебания и для различных режимов движения характерны качественно различные поля напряжений и, соответственно, различные прочностные характеристики, актуальным является решение проблемы поиска всех режимов движения, что позволит более объективно оценить работу реального трубопровода.

Материалы и методы: Математическая модель пространственных нелинейных колебаний трубопровода построена на основе уравнений механики твердого деформируемого тела. Решение задачи получено методом Бубнова–Галеркина с учетом нескольких форм колебаний и нескольких гармоник в отрезке ряда Фурье. Для численного построения амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик использовался метод продолжения решения по параметру. Проверка основных теоретических положений выполнена на экспериментальном стенде для исследования вынужденных колебаний трубопровода, представляющем собой физическую модель трубопровода.

Результаты: Разработаны методика и комплекс программ для расчета нелинейных колебаний трубопровода. Проведены теоретические и экспериментальные исследования пространственных нелинейных колебаний участка трубопровода с учетом давления жидкости, начального прогиба и геометрической нелинейности, обусловленной неподвижными в продольном направлении опорами.

Выводы: Предложенные алгоритмы расчета целесообразно использовать при проектировании систем трубопроводов в инженерных конструкциях.

Ключевые слова: вибрация, трубопровод, пространственные колебания, геометрическая нелинейность, резонанс.

Dynamic Calculation of Three-Dimension Nonlinear Oscillations of Pipeline Section with Fixed Supports

A.I. Munitsyn, L.N. Krainova, F.B. Ogurtsov
Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation
E-mail: munitsyn@rambler.ru, krainova_larisa@mail.ru

Abstract

Background: In applied problems the dynamic calculation of high pressure pipelines in hydraulic systems of vehicles is of great interest. Under the influence of vibrating load acting in the same plane, at the big fluctuation amplitudes pipeline can be both flat and spatial variation. For different modes of movement qualitatively different stress fields are typical and consequently different strength characteristics. The solution to the problem of finding all the modes of movement will allow objectively assessing the real line.

Materials and methods: The mathematical model of three-dimension nonlinear oscillations of the pipeline is based on the equations of mechanics of deformable solid body. The Bubnov – Galerkin method helps to solve the problem in accordance with several forms of variation and multiple harmonics in the range of Fourier series. For the numerical construction of amplitude-frequency and phase-frequency characteristics the continuation method was used. The theoretical provisions verification is implemented under the test-bed for research of forced vibration of pipeline that is a physical model of the pipeline.

Results: The methodology and software system for calculation of nonlinear oscillations of the pipeline were designed. Theoretical and experimental studies of spatial nonlinear oscillations pipeline section in view of the fluid pressure, initial curvature and geometrical non-linearity due to fixed in the longitudinal direction bearings are conducted.

Conclusions: The proposed calculation algorithm is useful when designing piping systems within engineering construction.

Key words: vibration, pipeline, three-dimension oscillations, geometrical non-linearity, resonance.

Исследование пространственных нелинейных колебаний стержня с неподвижными шарнирными опорами и стержня с двумя жесткими заделками показало, что существует взаимосвязь колебаний в двух ортогональных направлениях, что свидетельствует о наличии плоских и пространственных форм движения стержня [1–5]. Для вынуж-

денных колебаний в окрестности главного резонанса существует диапазон частот, при которых возможны как устойчивые колебания в одной плоскости с внешней нагрузкой, так и пространственные. В последнем случае результирующее движение поперечных сечений стержня происходит по эллипсу. При колебаниях трубопровода с непод-

вижными опорами также существует нелинейная взаимосвязь колебаний в двух ортогональных направлениях, что приводит к неоднозначности решений [6–9]. Важной составляющей обеспечения надежности трубопроводной системы современных машин при эксплуатации является расчет всех режимов движения трубопровода.

Для решения поставленной проблемы сформулирована краевая задача о колебаниях трубопровода с неподвижными в продольном направлении опорами, начальным прогибом и наличием давления жидкости. Система дифференциальных уравнений, описывающая вынужденные колебания трубопровода в двух ортогональных плоскостях, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha^4 \ddot{v} + v^{IV} + \alpha^2 \beta (v'' + v_0'') + \tau \dot{v}^{IV} + \alpha^4 \sigma \dot{v} - \\ - 4\gamma_0 \varepsilon_0 (v'' + v_0'') = q_v(x) \cos(\theta t + \psi_1), \\ \alpha^4 \ddot{w} + w^{IV} + \alpha^2 \beta (w'' + w_0'') + \tau \dot{w}^{IV} + \alpha^4 \sigma \dot{w} - \\ - 4\gamma_0 \varepsilon_0 (w'' + w_0'') = q_w(x) \cos(\theta t + \psi_2), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 ((v')^2 + (w')^2 + 2v'v_0' + 2w'w_0') dx,$$

где v, w – безразмерные перемещения точек оси трубопровода вдоль осей y и z ; $v_0(x), w_0(x)$ – начальный прогиб в плоскостях xy и xz соответственно, отнесенный к длине трубы L ; ε_0 – деформация оси стержня; штрихами обозначено дифференцирование по безразмерной координате x , направленной вдоль оси стержня; точками – дифференцирование по безразмерному времени $\dot{} = \omega_1 t$, где ω_1 – первая собственная частота колебаний прямолинейной трубы; τ, σ – безразмерные коэффициенты диссипации в модели внутреннего и внешнего трения; q_v, q_w – безразмерная распределенная нагрузка; также введены безразмерная нелинейность γ_0 и безразмерное давление β :

$$\gamma_0 = \frac{FL^2}{4I}, \quad \beta = \frac{\pi p L^2 r^2}{\alpha^2 EI},$$

где F – площадь поперечного сечения трубы; I – осевой момент инерции сечения ($I_y = I_z = I$ для правильных сечений в виде кольца); α – корень уравнения частот; p – избыточное давление рабочей жидкости; r – внутренний радиус сечения; E – модуль упругости материала трубы; $q_v(x) \cos(\theta t + \psi_1)$ и $q_w(x) \cos(\theta t + \psi_2)$ – внешние гармонические нагрузки во взаимно перпендикулярных направлениях.

Система (1) дополнена граничными условиями: для элемента трубы с двумя заделками – $v = w = v' = w' = 0$ при $x = 0, 1$; для элемента трубы с шарнирно неподвижными опорами – $v = w = v'' = w'' = 0$ при $x = 0, 1$.

Для решения системы нелинейных уравнений (1) и построения амплитудно-частотных (АЧХ) и фазочастотных характеристик использовались метод Бубнова–Галеркина с учетом нескольких форм колебаний и нескольких гармоник в отрезке ряда Фурье и метод продолжения решения по параметру. Приведенный алгоритм, включая иссле-

дование устойчивости полученных решений, реализован в пакете прикладных программ [10].

Исходные данные о решаемой краевой задаче заносятся пользователем в файл данных. Операторы дифференциальных уравнений в частных производных (1) записываются в виде

$$L_i(v, w, x, t) = 0. \quad (2)$$

Согласно методу Бубнова–Галеркина, решение представляется в виде

$$\begin{aligned} v(x, t) = \sum_{p=1}^P \varphi_{1p}(t) V_p(x), \\ w(x, t) = \sum_{p=1}^P \varphi_{2p}(t) V_p(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где $V_p(x)$ – базисные функции по координате, которые должны быть линейно независимыми при любых P , удовлетворять всем граничным условиям и быть представительными, т.е. любая допустимая функция должна аппроксимироваться данной системой функций с заданной степенью точности.

Для элемента трубы с шарнирно-неподвижными опорами $V_p(x) = \sin p\pi x$, $p = 1, 2, \dots$

Для элемента трубы с жесткими опорами

$$V_p(x) = V^* [(\sin \alpha - sh \alpha)(ch \alpha x - \cos \alpha x) + (ch \alpha - \cos \alpha)(sh \alpha x - \sin \alpha x)],$$

где $\alpha = 4,730$, $V^* = 0,0173$ – для первой формы колебаний; $\alpha = 7,853$, $V^* = 0,0007776$ – для второй формы колебаний; $\alpha = 10,955$, $V^* = 0,0000335$ – для третьей формы колебаний трубопровода и т.д. Формы колебаний нормированы из условия

$$\int_0^1 V_p^2 dx = 1.$$

Начальный прогиб трубопровода v_0 и w_0 также раскладывается по базисным функциям. Полагаем, что начальный прогиб совпадает с первой базисной функцией:

$$\begin{aligned} v_0(x) = \varphi_{01} V_0(x), \\ w_0(x) = \varphi_{02} V_0(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в уравнения (2) и удовлетворяя условиям ортогональности к базисным функциям по координате, получаем систему нелинейных уравнений относительно вектор-функции $\varphi_{s,n}(t)$ ($s = 1, 2$; $n = 1, 2, \dots, N$; $N = P$). Неизвестная вектор-функция T -периодических решений записывается в виде отрезка ряда Фурье:

$$\varphi_{s,n}(t) = \sum_{m=1}^M A_{s,n,m} f_m(t). \quad (5)$$

Удовлетворяя условиям ортогональности к базисным функциям по времени, получаем систему нелинейных уравнений относительно частоты и амплитуд колебаний $A_{s,n,m}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k,n_1,m_1} C_k D_{i,k,p,n} S_{k,q,m} \theta^j A_{s,n,m} + \\ & + \sum_{k,n_1,n_2,m_1,m_2} C_k D_{i,k,p,n_1,n_2} S_{k,q,m_1,m_2} A_{s_1,n_1,m_1} A_{s_2,n_2,m_2} + \\ & + \sum_{k,n_1,n_2,n_3,m_1,m_2,m_3} C_k D_{i,k,p,n_1,n_2,n_3} S_{k,q,m_1,m_2,m_3} A_{s_1,n_1,m_1} \times \\ & \times A_{s_2,n_2,m_2} A_{s_3,n_3,m_3} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Индекс i соответствует номеру уравнения (2); k – номеру слагаемого в уравнениях (3); p, q – номерам базисных функций в условиях ортогональности по функциям координат и времени; s – номер перемещений v и w в уравнениях (1); n – номер базисной функции в разложении по координате (3); m – номер базисной функции в разложении по времени (5). Число неизвестных равно $2PM$ и совпадает с числом уравнений системы. Многомерные массивы D и S формируются методом прямого численного интегрирования. Практически все интегралы могут быть получены аналитически, однако использование численных методов позволяет избавиться от рутинных выкладок.

Решение начинается с точки θ^0, A_{nm}^0 ($n = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, M$), которая должна быть решением системы (6). Как правило, такую точку всегда можно найти из решения линейной задачи для малых амплитуд колебаний. Если среднеквадратичная относительная погрешность решения меньше допустимой точности r_0 , то процесс вычислений продолжается. По заданному значению ведущей переменной $\Delta\theta^j$ или одному из ΔA_{nm}^j определяются остальные приращения неизвестных и, соответственно, находятся частоты и амплитуды колебаний. Если погрешность больше допустимой, то делается попытка уменьшить шаг ведущей переменной. В силу неоднозначности получаемых амплитудно-частотных зависимостей, это не всегда приводит к успеху. В этом случае в качестве ведущей переменной принимается та, изменение которой было максимальным на предыдущем шаге. В особых точках определитель системы (6) равен нулю и возможно ветвление решений. В окрестности этих точек необходимо проводить поиск всех возможных решений. Исследование устойчивости полученных решений производится на основе второго метода Ляпунова с использованием QR-алгоритма. По результатам вычислений строятся АЧХ отдельных гармоник колебаний либо АЧХ конкретной точки элемента трубопровода, формы движения элемента трубопровода для любой точки АЧХ.

Проверка основных теоретических положений выполнена на экспериментальном стенде для исследования вынужденных колебаний трубопровода, представляющем собой физическую модель трубопровода, имеющего малую начальную кривизну и двустороннее жесткое закрепление.

С помощью программного обеспечения тестовый сигнал синтезировался в цифровом виде, преобразовывался в аналоговый сигнал с помо-

щью ЦАП и подавался на усилитель мощности, далее на электромагнитный вибровозбудитель, действующий на стержень. Регистрация колебаний производилась датчиками виброускорений KB11 7083 в двух направлениях – в нормальном и тангенциальном. Датчики преобразовывали механические колебания стержня в электрический сигнал. Производилась математическая обработка дискретизированного сигнала в режиме реального времени методом синхронной фильтрации. Выделялась первая гармоническая составляющая исследуемого сигнала и строились амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики, при этом измерялась разность фаз между тестовым сигналом и первой гармоникой вибрационного сигнала. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики выводились на экран компьютера, а также сохранялись на жестком диске в виде файла текстового формата для дальнейшей обработки.

Ниже приводятся результаты испытаний модели трубопровода (диаметр 5 мм, длина 1 м), имеющего начальный прогиб без сжимающей силы, моделирующей внутреннее давление. На рис. 1, 2 представлены амплитудно-частотные характеристики модели трубопровода (внешняя нагрузка приложена под углом к плоскости прогиба). Кривой 1 на рис. 1 соответствует теоретическая зависимость амплитуды колебаний в плоскости возбуждения от частоты возбуждения, кривой 1 на рис. 2 – в плоскости, ортогональной плоскости возбуждения, от частоты возбуждения. Жирными линиями показаны устойчивые решения, точками, наложенными на кривые, – экспериментальные данные.

Установлено, что при увеличении частоты возбуждения плоская форма колебаний переходит в пространственную форму. Точки средней линии трубопровода совершают движение по эллипсу, вблизи максимума пространственной ветви АЧХ движение точек поперечного сечения происходит по окружности. Кривым соответствуют два решения, отличающихся вращением сечений в противоположных направлениях. Решения, соответствующие плоским колебаниям в области резонанса, являются неустойчивыми.

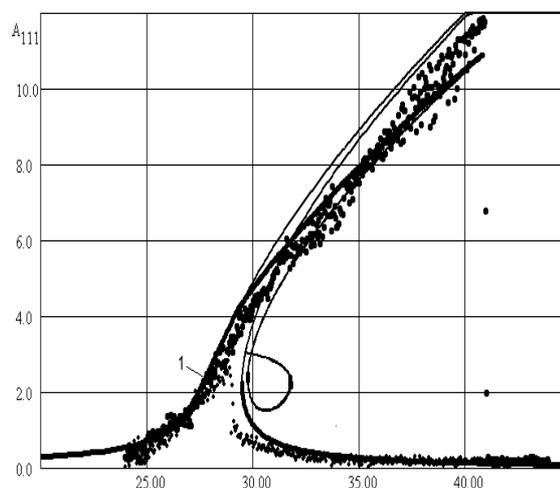


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика в плоскости возбуждения колебаний при $\beta = 0$

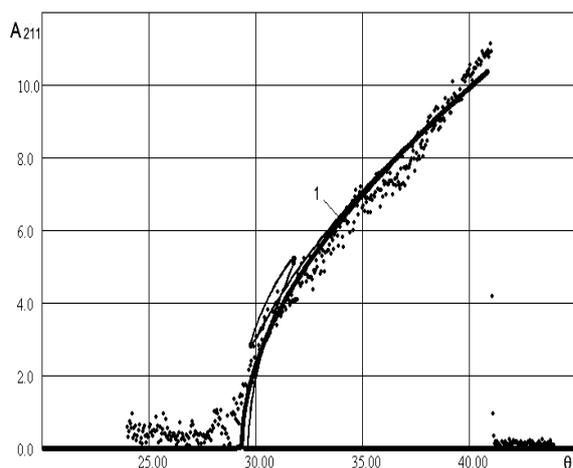


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика в плоскости, ортогональной плоскости возбуждения колебаний, при $\beta = 0$

Проведено сравнение теоретических и экспериментальных данных для модели трубопровода, имеющего начальный прогиб со сжимающей силой (рис. 3, 4).

В результате эксперимента (рис. 1–4 – точки разного диаметра) получены неоднозначные решения, характерные для нелинейных колебаний трубопровода. Существует диапазон частот, в котором, в зависимости от внешних условий, возможны как пространственные, так и плоские режимы колебаний. На рис. 3 и 4 пространственная форма колебаний представлена кривой 1 до точки A_1 . В точке A_1 происходит скачок, далее движение соответствует устойчивому решению $A_2 - A_5$, при этом точки поперечного сечения совершают движение по эллипсу, при дальнейшем увеличении частоты возбуждающей силы – по окружности. В другом случае колебания трубопровода первоначально являются плоскими и происходят исключительно в плоскости возбуждения колебаний.

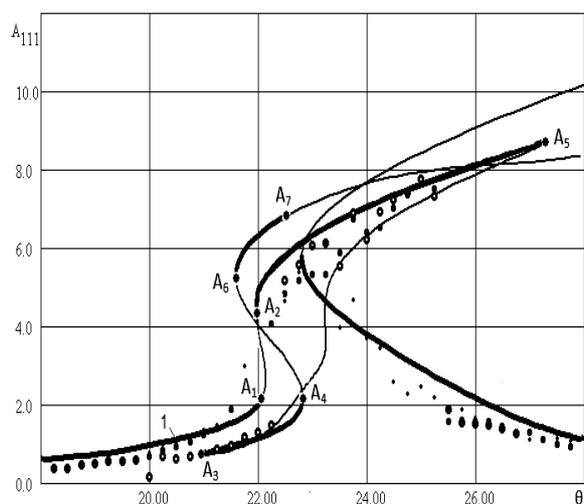


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика в плоскости возбуждения колебаний при $\beta = 1,4$

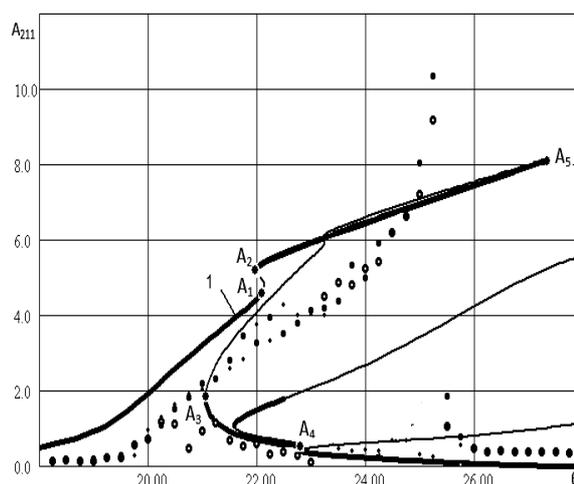


Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика в плоскости, ортогональной плоскости возбуждения колебаний, при $\beta = 1,4$

На рис. 3 и 4 плоская форма колебаний представлена кривой 1 от точки A_3 до точки A_4 . При увеличении частоты происходит скачок на пространственную форму колебаний, при этом точки средней линии трубопровода начинают движение по эллипсу с почти равными полуосями. Вблизи максимума пространственной ветви АЧХ движение сечений происходит по окружности. Результаты теоретических расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Проведенное исследование пространственных нелинейных колебаний трубопровода позволяет получить зависимости амплитуд и фаз колебаний от частоты внешнего возбуждения в зависимости от геометрических параметров задачи, величины избыточного давления жидкости и параметров диссипации, рассчитать вибрационную прочность трубопровода, прогнозировать поведение исследуемой динамической системы во времени при изменении параметров движения.

Список литературы

1. Муницын А.И. Пространственные нелинейные колебания стержня с неподвижными шарнирными опорами // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т. 70. – Вып. 1. – С. 72–80.
2. Муницын А.И. Нелинейные колебания стержня с близкими значениями осевых моментов инерции поперечного сечения // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73. – Вып. 3. – С. 427–438.
3. Муницын А.И., Крайнова Л.Н., Сабанеев Н.А. Пространственные нелинейные колебания стержня с двумя заделками // Вестник ИГЭУ. – 2010. – Вып. 2. – С. 63–65.
4. Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л. Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем. – М.: Высш. шк., 1989. – 384 с.
5. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Изгибные колебания движущегося стержня // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72. – Вып. 5. – С. 759–774.
6. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. – М.: Машиностроение, 1982. – 279 с.
7. Ильгамов М.А., Мишин В.Н. Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // Изв. РАН. МТТ. – 1997. – № 1. – С. 181–192.
8. Крайнова Л.Н., Муницын А.И. Пространственные нелинейные колебания трубопровода при гармоническом воз-

буждении // *Машиностроение и инженерное образование*. – 2010. – № 2. – С. 46–51.

9. Крайнова, Л.Н., Муницын А.И. Пространственные нелинейные колебания трубопроводов // *Международ. науч.-техн. конф. «Вибрация, 2010»*: сб. науч. ст. В 2 ч. – Курск, 2010. – С. 252–257.

10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Расчет нелинейных колебаний трубопровода» № 2011610386 от 11.01.2011 / А.И. Муницын, Л.Н. Крайнова.

References

1. Munitsyn, A.I. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2006, vol. 70, issue 1, pp. 72–80.

2. Munitsyn, A.I. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2009, vol. 73, issue 3, pp. 427–438.

3. Munitsyn, A.I., Krainova, L.N., Sabaneev, N.A. *Vestnik IGEU*, 2010, issue 2, pp. 63–65.

4. Gulyaev, V.I., Bazhenov, V.A., Popov, S.I. *Prikladnye zadachi teorii nelineynykh kolebaniy mekhanicheskikh sistem* [Applied Problems of Theory of Nonlinear Oscillations Vibrations of Mechanical Systems]. Moscow, Vysshaya shkola, 1989. 384 p.

5. Akulenko, L.D., Nesterov, S.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2008, vol. 72, issue 5, pp. 759–774.

6. Svetlitskiy, V.A. *Mekhanika truboprovodov i shlangov* [Mechanics of Pipes and Hoses]. Moscow, Mashinostroenie, 1982. 279 p.

7. Il'gamov, M.A., Mishin, V.N. *Izvestiya RAN. MTT*, 1997, issue 1, pp. 181–192.

8. Krainova, L.N., Munitsyn, A.I. *Mashinostroenie i inzhenerное образование*, 2010, issue 2, pp. 46–51.

9. Krainova, L.N., Munitsyn, A.I. Prostranstvennye nelineynye kolebaniya truboprovodov [Three-dimension Nonlinear Oscillations of Pipelines]. *Sbornik nauchnykh statey Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Vibratsiya 2010», v 2 chastyakh* [Collection of Scientific Articles in International Scientific and Technical Conference «Vibration 2010», in 2 parts]. Kursk, 2010, pp. 252–257.

10. Munitsyn, A.I., Krainova, L.N. *Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM «Расчет нелинейных колебаний трубопровода», № 2011610386 от 11.01.2010 года»* [Certificate of State Registration for Software Program «Calculation of Nonlinear Oscillation Pipeline» № 2011610386, January, 11, 2010].

Муницын Александр Иванович,

ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики,
телефон (4932) 26-97-11,
e-mail: munitsyn@rambler.ru

Крайнова Лариса Николаевна,

ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры теоретической и прикладной механики,
телефон (4932) 26-97-11,
e-mail: krainova_larisa@mail.ru

Огурцов Федор Борисович,

ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики,
телефон (4932) 26-97-11.