УДК 681.5.013

Синтез селективно инвариантных систем управления[1]

А.Р. Гайдук
ФГАОУВО «Южный федеральный университет», г. Таганрог, Российская Федерация
ООВО (Ассоциация) «Кисловодский гуманитарно-технический институт», г. Кисловодск, Российская Федерация
E-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Известно, что в настоящее время существенно возросли требования к точности систем управления, что делает актуальными методы компенсации влияния внешних воздействий. Возможности традиционного метода повышения точности путем увеличения коэффициента усиления системы ограничены резким уменьшением степени устойчивости, т.е. робастности системы, и увеличением перерегулирования и колебательности её переходных процессов. В особенности, эти ограничения проявляются в системах с управлением по отклонению. В целях преодоления этих сложностей был предложен метод абсолютной инвариантности, обеспечивающий полную компенсацию влияния на ошибку системы любых ограниченных воздействий. Однако соответствующие системы могут быть реализованы лишь в очень редких случаях. Практически всегда могут быть реализованы системы оптимального управления, но в системах этого типа ошибка лишь минимальна и не может быть нулевой. Таким образом, для решения задачи резкого повышения точности систем управления необходим метод полной компенсации влияния внешних возмущений на ошибку системы, свободный от указанных недостатков.
Материалы и методы: Для решения задачи полной компенсации влияния внешних воздействий на ошибку системы используется свойство селективной инвариантности и принцип управления по выходу и воздействиям. Параметрическая грубость свойства селективной инвариантности достигается за счет применения принципа внутренних спектральных моделей, который реализуется на основе $K(p)$-изображений внешних воздействий. Управление по выходу и воздействиям позволяет устранить противоречивость требований по устойчивости и точности, а также обеспечить реализуемость устройства управления.
Результаты: Разработан аналитический метод синтеза физически реализуемых, селективно инвариантных систем управления, в которых полностью компенсируется влияние на ошибку системы внешних воздействий с известными $K(p)$-изображениями. Установлено, что ошибка системы, обусловленная этими внешними воздействиями, остается нулевой при отклонениях от расчетных значений большинства, кроме спектрозадающих, параметров системы до тех пор, пока она остается устойчивой.
Выводы: Управление по выходу и воздействиям с использованием принципа внутренних спектральных моделей позволяет аналитическим методом с применением современных информационных технологий создавать системы управления повышенного качества для различных отраслей народного хозяйства.

Ключевые слова: система управления, ошибка системы, селективная инвариантность, спектральная модель, принцип внутренних моделей, параметрическая грубость.

Design of selectively invariant control systems

A.R. Gaiduk
Southern Federal University, Taganrog, Russian Federation
Kislovodsk Humanitarian-Technical Institute, Kislovodsk, Russian Federation
E-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Abstract

Background: It is known that requirements for the control systems accuracy have essentially increased, which makes methods of external disturbance effect compensation relevant. The potential of the traditional method of improving accuracy by increasing the control system gains is limited by a sharp reduction in stability degree, i.e. system robustness, and increase in the overshooting and fluctuation of its transients. Such restrictions are particularly common in deviation control systems. It is suggested that these problems can be solved by a method of absolute invariancy ensuring full compensation of the effects of any limited disturbances on the system error. However, it is extremely difficult to implement such systems. In real systems of optimal control the error is minimal but cannot be equal to zero. Therefore, the problem of significantly increasing the accuracy of control systems can be solved by a method of full compensation of the effects of external disturbances on the system error, and this method should not have such drawbacks.
Materials and methods: The study employed the property of selective invariancy and the output and impact control principle to solve the problem of full compensation of the effect of external disturbances on system error. Parametric robustness of selective invariancy is reached by using the principle of internal spectral models realized based on $K(p)$-images of external disturbances. Output and impact control eliminates the contradiction between stability and accuracy requirements and ensures the ability to implement the control device.
Results: The authors have developed an analytical method of designing physically realizable, selectively invariant control systems in which the effect of external disturbances with known $K(p)$-images on the system error is fully compen-

[1] Статья подготовлена в рамках выполнения работ в ЮФУ по грантам № 16-08-00013 А и № 16-58-00226 Бел_а Российского фонда фундаментальных исследований.

sated. They also found that the system error caused by these external disturbances remains equal to zero in case of deviations of most of the system parameters (except spectrum-determining ones) from the design values as long as the system remains stable.

Conclusions: Output and impact control based on the principle of internal spectral models allows developing control systems of better quality for various branches of economy by applying the analytical and modern information technologies.

Key words: control system, system error, selective invariancy, spectral model, internal model principle, parametrical robustness.

DOI: 10.17588/2072-2672.2017.1.046-055

Введение. Системы автоматического управления (САУ), ошибки которых, обусловленные внешними воздействиями, нулевые или постоянные, но достаточно малые, являются наиболее привлекательными с точки зрения обеспечения требуемых показателей качества процессов управления. Одним из эффективных способов обеспечения этих свойств является придание САУ свойства инвариантности к внешним воздействиям [1–3]. Как известно, существуют абсолютно и селективно инвариантные системы [1, 4, 5]. Отличительной особенностью селективной (избирательной) инвариантности системы к некоторому воздействию является стремление к нулю отклонения системы, вызванного данным воздействием, т.е. ошибка системы по этому воздействию практически равна нулю. В этом смысле селективная инвариантность аналогична свойству астатизма, но охватывает более широкий класс воздействий.

Кроме того, условия достижимости селективной инвариантности значительно мягче условий абсолютной инвариантности, что позволяет применять селективно инвариантные системы гораздо чаще. Прежде всего, для обеспечения селективной инвариантности не требуется измерять воздействие и создавать второй канал его влияния на ошибку системы. С другой стороны, требуется априорная информация о модели воздействия, что является основной трудностью обеспечения данного типа инвариантности.

Как известно, чаще всего синтез селективно инвариантных систем осуществляется с использованием *K*(*p*)-изображения (*K*(*D*)-изображения) воздействий, введенного еще в 50-х годах прошлого века академиком В.С. Кулебакиным [2, 3]. При этом если в структуре устройства управления (регулятора) реализуются внутренние спектральные модели внешних воздействий, то свойство селективной инвариантности системы является грубым (робастным) к большинству параметров системы [6, 7].

В последнее время появилось довольно много работ, посвященных селективно инвариантным системам, но по отношению к гармоническим воздействиям с неизвестными априори частотами и постоянной составляющей. При этом задача синтеза линейных или нелинейных систем управления, с полной компенсацией влияния таких воздействий, решается без применения *K*(*p*)-изображений [8–10]. Задача подавления влияния внешних воздействий на ошибку системы с применением метода инвариантных эллипсоидов рассматривается в [11]. В этом случае возмущения могут быть любыми по форме, но с ограниченной интенсивностью. Однако метод инвариантных эллипсоидов не обеспечивает полную компенсацию влияния возмущений на ошибку системы.

Оригинальный метод полной компенсации влияния возмущений в системах управления предложен в [12] для случая как линейных, так и нелинейных объектов, приводимых к нормальной канонической форме. При этом возмущение описывается системой уравнений в переменных состояния. Фактически, обеспечиваемая этим методом инвариантность является селективной, причем система уравнений в переменных состояния, описывающая возмущение, является просто другой формой записи модели возмущения и полностью соответствует его *K*(*p*)-изображению. Этот факт был показан еще в [13].

Рассмотрим задачу синтеза линейных систем управления, селективно инвариантных как к задающему, так и к возмущающим внешним воздействиям. При этом, естественно, будем предполагать, что *K*(*p*)-изображения воздействий, к которым необходимо обеспечить селективную инвариантность, известны. Задача решается методом аналитического синтеза систем с управлением по выходу и воздействиям (АСС УВВ) при использовании принципа внутренних спектральных моделей. Это позволяет установить условия разрешимости задачи синтеза селективно инвариантных систем управления, и обеспечить грубость свойства селективной инвариантности к большинству параметров синтезируемой системы.

Постановка задачи. Предполагается, что полный объект управления (ОУ) описывается уравнением «вход-выход» следующего вида:

$$A(p)y = B_0(p)u + B_1(p)f_1, \qquad (1)$$

где $y = y(t)$ – управляемая переменная; $u = u(t)$ – управление; $f_1 = f_1(t)$ – неизмеряемое возмущение; $A(p)$, $B_0(p)$, $B_1(p)$ – полиномы степеней n, m_0, m_1 с известными коэффициентами, соответственно [5].

Подчеркнем, что возмущение $f_1(t)$ может быть эквивалентной суммой нескольких реальных неизмеряемых возмущений.

Как отмечалось выше, для обеспечения селективной инвариантности нет необходимости измерять возмущения, поэтому рассматривается объект, не имеющий измеряемых возмущений. В связи с этим уравнение устройства управления (УУ), реализующего управление по выходу и воздействиям, имеет вид

$$R(p)u = Q_0(p)(g + f_0) - L(p)y, \tag{2}$$

где $R(p)$, $Q_0(p)$, $L(p)$ – полиномы степеней r, q_0, l, коэффициенты которых должны быть найдены в процессе синтеза САУ [5, 7].

Схема системы, УУ которой реализует управление (2), приведена на рис. 1, где УУ имеет два входа, но в общем случае их число может быть больше. При этом УУ должно реализовываться в виде одного динамического блока, независимо от числа входов, что позволяет обеспечить минимальную сложность замкнутой системы [7].

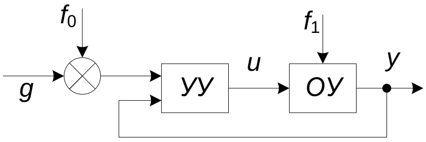

Рис. 1. Схема системы с управлением по выходу и воздействиям

Подчеркнем, что в рассматриваемом случае на основном входе системы, кроме задающего воздействия g = $g(t)$, действует возмущение $f_0 = f_0(t)$. Степени полиномов в уравнении (2) должны удовлетворять условию физической реализуемости:

$$\mu_{yy} = \min\{r - q_0,\ r - l\} \ge \mu^*_{yy}, \tag{3}$$

где μ_{yy} – значение относительного порядка УУ (2); μ^*_{yy} – устанавливаемое проектировщиком САУ значение относительного порядка УУ, обусловленное свойствами элементов, которые используются для реализации УУ. Например, если предполагается использовать безынерционные операционные усилители, то $\mu^*_{yy} = 0$. Если используются инерционные усилители или же микропроцессоры, способные дважды проинтегрировать уравнение (2) за один период дискретизации, то $\mu^*_{yy} = 1$.

Рассогласованием замкнутой системы (1), (2) является величина $\varepsilon = g + f_0 - y$, а уравнение «вход-выход» системы, записанное относительно отклонения $\delta_{sys} = g - y$ с учетом указанных условий, имеет следующий вид:

$$D(p)\delta_{sys} = H_{\delta g}(p)g - H_{\delta 0}(p)f_0 - H_{\delta 1}(p)f_1, \tag{4}$$

где

$$D(p) = R(p)A(p) + B_0(p)L(p); \tag{5}$$

$$H_{\delta g}(p) = R(p)A(p) + B_0(p)[L(p) - Q_0(p)]; \tag{6}$$

$$H_{\delta 0}(p) = B_0(p)Q_0(p); \tag{7}$$

$$H_{\delta 1}(p) = R(p)B_1(p). \tag{8}$$

Как известно, $K(p)$-изображения регулярных воздействий – это некоторые полиномы, которые можно определить как знаменатели изображений по Лапласу этих воздействий [5]. В рассматриваемом случае это полиномы $G(p)$, $F_0(p)$ и $F_1(p)$. В тех случаях, когда воздействия заданы их уравнениями в переменных состояния, $K(p)$-изображения определяются как характеристические полиномы этих уравнений [12, 13]. Например, если воздействие $g = g(t)$ описывается уравнениями

$$\dot{x}_g = G_g x_g, \quad g = c_g^T x_g, \tag{9}$$

то его $K(p)$-изображение – полином $G(p)$ = = $\det(pE - G_g)$, где E – единичная матрица. Естественно, справедливо и обратное соотношение, т.е. для каждого $K(p)$-изображения можно записать соответствующие уравнения типа (9).

В соответствии с определением, система, описываемая уравнением (4), является селективно инвариантной [3] к воздействиям $g = g(t)$ и $f_j = f_j(t)$, j = 0, 1, т.е. $\lim \delta_{sys}(t) = 0$ при $t \to \infty$, если полиномы $H_{\delta g}(p)$ и $H_{\delta j}(p)$ содержат в виде множителей $K(p)$-изображения этих воздействий. Другими словами, система (1), (2) или (4) является селективно инвариантной, если $H_{\delta g}(p)$ и $H_{\delta j}(p)$, j = 0, 1, содержат в виде множителей полиномы $G(p)$ и $F_j(p)$, j = 0, 1, а все корни полинома $D(p)$ имеют достаточно отрицательные вещественные части и ни один из них не совпадает с корнями этих полиномов [3, 4, 5].

Таким образом, для решения задачи синтеза селективно инвариантной к внешним воздействиям системы (рис. 1) необходимо найти степени полиномов и значения коэффициентов из уравнения (2) так, чтобы: а) замкнутая система была устойчивой; б) выполнялось условие физической реализуемости (3) и в) выполнялись условия селективной инвариантности к каждому из воздействий $g = g(t)$, $f_0 = f_0(t)$ и $f_1 = f_1(t)$ при заданных полиномах $G(p)$, $F_0(p)$ и $F_1(p)$.

Решение задачи. Из указанных условий селективной инвариантности и соотношений (6), (7) и (8) выводим тождества:

$$R(p)A(p) + B_0(p)[L(p) - Q_0(p)] \equiv G(p)\tilde{H}_g(p); \tag{10}$$

$$B_0(p)Q_0(p) \equiv F_0(p)\tilde{H}_0(p); \tag{11}$$

$$R(p)B_1(p) \equiv F_1(p)\tilde{H}_1(p), \tag{12}$$

где $\tilde{H}_g(p)$, $\tilde{H}_0(p)$ и $\tilde{H}_1(p)$ – некоторые полиномы.

Для того чтобы выполнение равенств в выражениях (10)–(12) не зависело от большинства параметров системы, полином $R(p)$ в уравнении (2) берется в виде

$$R(p) = \Phi(p)\tilde{R}(p), \tag{13}$$

где $\tilde{R}(p)$ – произвольный полином. При этом полином $\Phi(p)$ формируется в соответствии с равенством

$$\Phi(p) = \underset{j=0,1}{\text{НОК}}\{\bar{G}(p), \Phi_j(p)\}, \qquad (14)$$

где НОК – наименьшее общее кратное;

$$\bar{G}(p) = G(p) / \Phi_{00}(p);$$

$$\Phi_{00}(p) = \text{НОД}\{A(p), G(p)\}, \qquad (15)$$

а полиномы $\Phi_j(p)$ определяются выражением

$$\Phi_j(p) = \begin{cases} F_j(p), \text{ если } f_j(t) \neq 0, \\ 1, \text{ если } f_j(t) \equiv 0, \end{cases} \quad j = 0, 1. \qquad (16)$$

Полиномы $\tilde{H}_g(p)$ и $\tilde{H}_0(p)$ в тождествах (10), (11) являются произвольными, поэтому можно положить $\tilde{H}_j(p) = \bar{H}_j(p)B_0(p)$, $j = g$, 0. Это позволяет указанные тождества представить следующим образом:

$$R(p)A(p) + B_0(p)[L(p) - Q_0(p)] \equiv G(p)\bar{H}_g(p)B_0(p); \qquad (17)$$

$$B_0(p)Q_0(p) \equiv F_0(p)\bar{H}_0(p)B_0(p). \qquad (18)$$

Согласно (13)–(16), произведение $R(p)A(p)$ включает $K(p)$-изображения всех воздействий, приложенных к системе, в том числе и $g(t)$, т.е. включает и полином $G(p)$, поэтому это произведение в тождестве (17) можно опустить. В результате из тождеств (17) и (18) следует, что условия селективной инвариантности к воздействиям $g(t)$ и $f_0(t)$ на основном входе системы выполняются, если:

$$B_0(p)[L(p) - F_0(p)\bar{H}_0(p) - G(p)\bar{H}_g(p)] \equiv 0; \qquad (19)$$

$$Q_0(p) \equiv F_0(p)\bar{H}_0(p). \qquad (20)$$

Тождеству (19), очевидно, соответствует полиномиальное уравнение

$$F_0(p)\bar{H}_0(p) + G(p)\bar{H}_g(p) \equiv L(p) \qquad (21)$$

относительно полиномов $\bar{H}_0(p)$ и $\bar{H}_g(p)$. В этом уравнении:

$$\det\bar{H}_0(p) = n_g - 1; \qquad (22)$$

$$\deg\bar{H}_g(p) = \max\{l - n_g;\ n_{f0} - 1\}, \qquad (23)$$

где $n_g = \deg G(p)$, $n_{f0} = \deg F_0(p)$, $l = \deg L(p)$.

Условия разрешимости сформулированной задачи синтеза селективно инвариантных систем существенно зависят от выбора корней полинома $D(p)$ в уравнениях (4), (5). Если все корни этого полинома назначаются независимо от корней полиномов $A(p)$ и $B_0(p)$ из уравнения объекта управления (1), то замкнутая система называется «системой с независимыми полюсами». Если же часть корней полинома $D(p)$ назначаются с учетом корней полиномов $A(p)$ и $B_0(p)$, то замкнутая система называется «системой с согласованными полюсами» [7]. Системы первого типа имеют повышенный порядок и сложность, но пониженную робастность. В то же время системы с согласованными полюсами, как правило, имеют более низкий порядок, т.е. меньшую сложность, и повышенную робастность, поэтому они являются предпочтительными [14, 15].

Как известно, корни характеристического полинома устойчивой системы располагаются в некоторой области комплексной плоскости, параметры которой связаны с показателями качества этой системы [5]. Полагая полином $A(p)$ нормированным по старшей степени p, обозначим эту область символом $\Omega_п$. В целях синтеза систем управления с согласованными полюсами проводится факторизация полиномов $A(p)$ и $B_0(p)$ следующим образом:

$$A(p) = A_\Omega(p)A_{\bar{\Omega}}(p), \quad B_0(p) = B_\Omega(p)B_{\bar{\Omega}}(p), \qquad (24)$$

где $A_\Omega(p)$, $B_\Omega(p)$ – нормированные по старшей степени p полиномы, корни которых совпадают с корнями полиномов $A(p)$ и $B_0(p)$, расположенными в области $\Omega_п$, построенной, исходя из требуемого качества синтезируемой инвариантной системы.

Полиномы $R(p)$, $L(p)$, $Q_0(p)$ из уравнения (2) УУ и характеристический полином $D(p)$ замкнутой системы (1), (2) с согласованными полюсами ищутся в следующем виде:

$$R(p) = \Phi(p)B_\Omega(p)\tilde{R}(p); \quad L(p) = A_\Omega(p)\tilde{L}(p);$$
$$Q_0(p) = F_0(p)A_\Omega(p)\tilde{Q}(p)M_\Omega(p); \qquad (25)$$

$$D(p) = A_\Omega(p)B_\Omega(p)D^*(p)M_\Omega(p), \qquad (26)$$

где $\tilde{R}(p)$, $\tilde{L}(p)$, $\tilde{Q}(p)$ – вспомогательные полиномы, степени и коэффициенты которых определяются решениями полиномиальных уравнений, вытекающих из соотношений (5), (8), (21), с учетом условий (14)–(16) и (22)–(26); $M_\Omega(p)$ – назначаемый полином, корни которого лежат в области $\Omega_п$, а степень определяется равенством

$$\deg M_\Omega(p) = \max\{0;\ 2n + \mu^*_{yy} - 1 - n_N\}, \qquad (27)$$

где $n_N = \deg[A_\Omega(p)B_\Omega(p)D^*(p)]$.

В равенстве (26) $D^*(p)$ – это знаменатель желаемой передаточной функции синтезируемой системы (1), (2) по задающему воздействию. Его степень, а также степени полиномов $\tilde{R}(p)$, $\tilde{L}(p)$ определяются из условия равенства числа неизвестных N_k (ими являются коэффициенты полиномов $\tilde{R}(p)$ и $\tilde{L}(p)$) числу уравнений N_y в системе алгебраических уравнений, эквивалентной вытекающему из (5), в силу соотношений (25), (26), полиномиальному уравнению

$$A_{\bar{\Omega}}(p)\Phi(p)\tilde{R}(p) + B_{\bar{\Omega}}(p)\tilde{L}(p) = \tilde{D}(p), \qquad (28)$$

где $\tilde{D}(p) = D^*(p)M_\Omega(p)$.

Указанная система алгебраических уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_0 & \ddots & \alpha_1 & \alpha_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \beta_1 & \ddots & \vdots & \alpha_1 & \ddots & 0 \\ \beta_{\bar{m}} & \vdots & \ddots & \alpha_{\tilde{n}} & \vdots & \ddots & \alpha_0 \\ 0 & \beta_{\bar{m}} & \ddots & 0 & \alpha_{\tilde{n}} & \ddots & \alpha_1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \alpha_{\tilde{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_{\tilde{l}} \\ \rho_0 \\ \vdots \\ \rho_{\tilde{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_0 \\ \tilde{\delta}_1 \\ \tilde{\delta}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{\delta}_{\tilde{\eta}} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

где β_i, α_i, λ_i, ρ и $\tilde{\delta}_i$ – коэффициенты полиномов $B_{\bar{\Omega}}(p)$, $\tilde{A}(p) = A_{\bar{\Omega}}(p)\Phi(p)$, $\tilde{L}(p)$, $\tilde{R}(p)$ и $\tilde{D}(p)$. Отметим также, что указанное выше число неизвестных коэффициентов в системе (29) $N_k = \deg\tilde{R}(p) + \deg\tilde{L}(p) + 2 = \tilde{r} + \tilde{l} + 2$, а число уравнений $N_y = \deg\tilde{D}(p) + 1 = \tilde{\eta} + 1$.

Из условий разрешимости полиномиальных уравнений (21), (28) и определения селективно инвариантной системы вытекают условия разрешимости задачи синтеза САУ данного типа. Так как корни каждого полинома $G(p)$, $F_0(p)$ и $F_1(p)$ образуют спектр соответствующего воздействия, то эти условия разрешимости носят спектральный характер и заключаются в отсутствии одинаковых корней у полиномов: $G(p)$ и $F_0(p)$; $G(p)$ и $B_{\bar{\Omega}}(p)$; $F_0(p)$ и $B_{\bar{\Omega}}(p)$; $F_1(p)$ и $B_{\bar{\Omega}}(p)$, а также у полиномов $G(p)$, $F_0(p)$, $F_1(p)$ и $D(p)$.

Другими словами, задача синтеза селективно инвариантных систем управления имеет решение, если возможно спектральное разделение регулярных воздействий, приложенных к основному входу системы, и если можно обеспечить устойчивость синтезируемой системы управления при условии, что корни $K(p)$-изображений воздействий и корни характеристического полинома системы не совпадают. Условие устойчивости легко обеспечивается, если внешние воздействия полиномиальные, гармонические или экспоненциальные, но возрастающие. Указанные условия разрешимости задачи синтеза селективно инвариантных систем значительно проще условий разрешимости задачи синтеза систем с наблюдателями воздействий и абсолютно инвариантных систем [7].

Замечание. Если $K(p)$-изображения воздействий $g(t)$, $f_0(t)$ или $f_1(t)$ неизвестны, то можно ограничиться приданием синтезируемой системе порядков астатизма ν_g^* по $g(t)$ и ν_{f1}^* по $f_1(t)$. Для этого достаточно принять $G(p) = p^{\nu_g^*}$, $F_1(p) = p^{\nu_{f1}^*}$. Однако в этом случае недопустимо наличие полиномиального возмущения $f_0(t)$ на основном входе системы, так как в противном случае задача синтеза не будет иметь решения, поскольку нули полиномов G(p) и $F_0(p)$ при этом будут совпадать. Однако при другом характере возмущения $f_0(t)$, например экспоненциальном или гармоническом, решение будет существовать, при выполнении условий разрешимости (10)–(12).

В тех случаях, когда некоторые корни полиномов $B_1(p)$ и $F_1(p)$ совпадают, причем эти корни не изменяются при изменении параметров объекта, целесообразно при формировании полинома $\Phi(p)$ по формулам (14), (15) эти корни не учитывать. Отметим также, что если возмущение $f_0(t)$ отсутствует, то уравнения (18) и (21) не составляются, а полином $Q_0(p)$ находится непосредственно из тождества (10).

Приведенные выше соотношения составляют алгоритм аналитического синтеза селективно инвариантных систем управления при заданных $K(p)$-изображениях всех или части внешних воздействий. Для иллюстрации предложенного алгоритма приведем численный пример.

Пример. Синтезировать электромеханическую систему с двигателем постоянного тока [16], в которой заданная часть описывается следующим уравнением «вход-выход»:

$$(p^2 + 50p + 2651)y = 42570{,}6u - (5p + 250)f_1, \quad (30)$$

где y – угловая скорость Ω вращения вала электродвигателя; f_1 – возмущение – синусоидальный момент нагрузки, причем $f_1 = M_0 + M_1\sin(\omega_1 t)$ при $\omega_1 = \Omega/10$.

Система управления должна компенсировать влияние возмущения f_1 на ошибку $\delta_{sys} = g - y$, иметь астатизм первого порядка к задающему воздействию $g(t) = \Omega^* 1(t)$, где Ω^* – заданное значение угловой скорости Ω, при отсутствии перерегулирования и длительности переходного процесса не более 0,1 с. Устройство управления реализуемо при $\mu_{yy}^* = 0$.

Отметим, что в уравнении (30), как и в [16], для повышения робастности синтезируемой системы, согласно [15], опущена малая постоянная времени T_{cg} = 0,001 с силового преобразователя, питающего электродвигатель.

В соответствии с постановкой задачи [16], угловая частота момента нагрузки – возмущения f_1 определяется выражением $\omega_1 = \Omega/10$, т.е. ω_1^* зависит от значения Ω^* задающего воздействия – заданного значения угловой скорости Ω. Так как в общем случае значение Ω^* может принимать различные значения, то изложим процедуру синтеза электромеханической системы без использования конкретного значения Ω^*.

Из условия астатизма первого порядка к задающему воздействию $g(t) = \Omega^* 1(t)$ следует, что $G(p) = p$; при этом $K(p)$-изображение возмущения f_1 – полином $F_1(p) = p(p^2 + \omega_1^2)$, а $F_0(p) = 1$, так как возмущение f_0 отсутствует. Исходя из известных корневых оценок и требуемой длительности переходного процесса, область $\Omega_п$ определим следующими двумя условиями: $\operatorname{Re} p_\Omega \le -30$, $\max\{\operatorname{arctg}|\operatorname{Im} p_{\Omega i}| / |\operatorname{Re} p_{\Omega i}|\} \approx 0$ [5].

Полином $A(p) = p^2 + 50p + 2651$ из уравнения объекта (30) имеет корни $p_{1,2} = -25 \pm 45{,}011j$, а $B_0(p) = 42570{,}6$; поэтому объект является полным, а $A_\Omega(p) = B_\Omega(p) = 1$; $A_{\bar\Omega}(p) = p^2 + 50p + 2651$; $B_{\bar\Omega}(p) = \beta_0 = 42570{,}6$; $\Phi_{00}(p) = \text{НОД}\{A(p), G(p)\} = 1$. Следовательно, в соответствии с выражениями (14)–(16), $\Phi(p) = p(p^2 + \omega_1^2)$.

Перейдем к определению степеней полиномов $\tilde R(p)$, $\tilde L(p)$ и $\tilde D(p)$. По формулам (25), (26) находим $R(p) = \Phi(p)\tilde R(p)$, $L(p) = \tilde L(p)$, $Q_0(p) = \tilde Q(p) M_\Omega(p)$, $D(p) = D^*(p) M_\Omega(p)$, т.е. $\tilde r = \deg \tilde R(p) = r - 3$, так как $\deg \Phi(p) = 3$, а по условию (3) $\tilde l = \deg \tilde L(p) = r$, так как $\mu_{yy}^* = 0$. Поэтому $N_k = \tilde r + \tilde l + 2 = 2r - 1$, а $N_y = 1 + \deg A_{\bar\Omega}(p) R(p) = r + 3$. Из условия $N_k = N_y$ получаем $r = 4$. Тогда $\eta = \deg D^* = n + r = 2 + 4 = 6$; переходя к условию (27), находим $n_N = \deg[A_\Omega(p) B_\Omega(p) D^*(p)] = 6$, поэтому $\deg M_\Omega(p) = \max\{0;\ 4 + 0 - 1 - 6\} = 0$, т.е. $M_\Omega(p) = 1$, а $\tilde\eta = \eta = 6$. При этом $\tilde r = 1$, $\tilde l = 4$, т.е. $\tilde L(p) = \lambda_4 p^4 + \lambda_3 p^3 + \lambda_2 p^2 + \lambda_1 p + \lambda_0$, а $\tilde R(p) = \rho_1 p + \rho_0$.

Так как требуется обеспечить астатизм первого порядка по задающему воздействию и отсутствие перерегулирования, то $v_g^* = 1$, $\sigma^* = 0\,\%$, а $n_{\text{таб}} = \eta = 6$. По этим данным из таблицы стандартных передаточных функций [7] выписываются нормированные коэффициенты: $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 6$, $\Delta_2 = 15$, $\Delta_3 = 20$, $\Delta_4 = 15$, $\Delta_5 = 6$, $\Delta_6 = 1$, а также время $t_{\text{р,таб}} = 10{,}5$ с.

Далее определяется среднегеометрический корень $\omega_0 = t_{\text{р,таб}} / t_p^* = 10{,}5/0{,}1 = 105$, что позволяет найти коэффициенты δ_i^* желаемого характеристического полинома $D^*(p)$ по формуле $\delta_i^* = \Delta_i \omega_0^{\eta - i}$, $i = \overline{0,\ 6}$. В данном случае в уравнении (28) $A_{\bar\Omega}(p)\Phi(p) = \alpha_5 p^5 + \alpha_4 p^4 + \alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 = \tilde A(p)$, где $\alpha_5 = 1$; $\alpha_4 = 50$; $\alpha_3 = 2651 + \omega_1^2$; $\alpha_2 = 50\omega_1^2$; $\alpha_1 = 2651\omega_1^2$; $\alpha_0 = 0$.

Так как $B_{\bar\Omega}(p) = \beta_0 = 42570{,}6$, то матрица в системе (29) является верхней треугольной, а ее решение – коэффициенты ρ_i и λ_i полиномов $\tilde R(p)$ и $\tilde L(p)$ – с учетом равенства $\delta_i^* = \Delta_i \omega_0^{\eta - i}$ определяется следующими выражениями:

$$\rho_1 = \Delta_6 \omega_0^0 / \alpha_5 = 1; \quad \rho_0 = (\Delta_5 \omega_0^1 - \alpha_4 \rho_1)/\alpha_5;$$

$$\lambda_4 = (\Delta_4 \omega_0^2 - \alpha_4 \rho_0 - \alpha_3 \rho_1)/\beta_0;$$

$$\lambda_3 = (\Delta_3 \omega_0^3 - \alpha_3 \rho_0 - \alpha_2 \rho_1)/\beta_0;$$

$$\lambda_2 = (\Delta_2 \omega_0^4 - \alpha_2 \rho_0 - \alpha_1 \rho_1)/\beta_0;$$

$$\lambda_1 = (\Delta_1 \omega_0^5 - \alpha_1 \rho_0 - \alpha_0 \rho_1)/\beta_0;$$

$$\lambda_0 = (\Delta_0 \omega_0^6 - \alpha_0 \rho_0)/\beta_0. \qquad (31)$$

Так как $G(p) = p$, то при $\Phi(p) = p(p^2 + \omega_1^2)$ тождество (10) выполняется уже при $Q(p) = \tilde Q(p) = \kappa_0 = \lambda_0$. Таким образом, степени и коэффициенты всех полиномов УУ (2) определены, и его уравнение с учетом равенств $\rho_1 = 1$ и $\kappa_0 = \lambda_0$ можно записать следующим образом:

$$u(p) = \frac{\kappa_0}{p(p^2 + \omega_1^2)(p + \rho_0)}\varepsilon - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 p + \lambda_3 p^2 + \lambda_4 p^3}{(p^2 + \omega_1^2)(p + \rho_0)} y, \quad (32)$$

где $\varepsilon = g - y$.

Полиномы p и $(p^2 + \omega_1^2)$, являющиеся $K(p)$-изображениями, обеспечивают селективную инвариантность системы к внешним воздействиям. Однако, в соответствии с принципом параметрической грубости (робастности) свойства селективной инвариантности некоторой системы, необходимо, чтобы $K(p)$-изображения внешних воздействий являлись характеристическими полиномами отдельных физических элементов этой системы или каких-либо обособленных процессов, протекающих в ней [7]. Поэтому при реализации найденного УУ необходимо в уравнении (32), прежде всего, выделить в явной форме спектральные модели каждого из внешних воздействий. Для этого дроби из уравнения (32) представляются следующим образом:

$$\frac{\kappa_0}{p(p^2 + \omega_1^2)(p + \rho_0)} = \frac{A_1}{p} + \frac{B_1 p + C_1}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{D_1}{p + \rho_0}; \qquad (33)$$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 p + \lambda_3 p^2 + \lambda_4 p^3}{(p^2 + \omega_1^2)(p + \rho_0)} = A_2 + \frac{B_2 p + C_2}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{D_2}{p + \rho_0}. \qquad (34)$$

Неопределенные коэффициенты A_i, B_i, C_i и D_i, $i = 1, 2$, в (33), (34) находятся любым из известных способов. Например, при $i = 1$ – путем решения системы уравнений

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \rho_0 & \rho_0 & 1 & 0 \\ \omega_1^2 & 0 & \rho_0 & \omega_1^2 \\ \rho_0 \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \kappa_0 \end{bmatrix}. \qquad (35)$$

После определения коэффициентов A_i, B_i, C_i и D_i, $i = 1, 2$, они подставляются в выражения (33), (34), а последние в уравнение (32), после чего записываются уравнения в переменных состояния, соответствующие дробям с одинаковыми знаменателями. При этом целесообразно использовать соотношения канонической наблюдаемой формы, так как УУ (32) имеет два входа [7]. Объединение этих уравнений в одну систему дает уравнения найденного УУ (32) в переменных состояния:

$$\dot{z}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-\omega_1^2&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-\rho_0\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}A_1\\C_1\\B_1\\D_1\end{bmatrix}\varepsilon-\begin{bmatrix}0\\C_2\\B_2\\D_2\end{bmatrix}y;$$

$$u=\begin{bmatrix}1&0&1&1\end{bmatrix}z-A_2y. \qquad (36)$$

Схема, соответствующая системе уравнений УУ (36), представлена на рис. 2. На этой схеме пунктирными линиями выделены спектральные модели *СМ*1 и *СМ*2. Коэффициент ω_1^2 модели *СМ*2 является спектрозадающим. Аналогичный коэффициент модели *СМ*1 равен нулю, так как $G(p) = F_{10}(p) = p$.

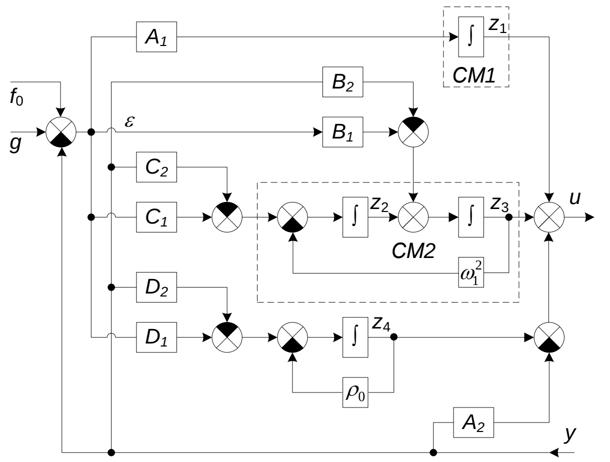

Рис. 2. Структурная схема УУ селективно инвариантной системы

В установившемся режиме модель *СМ*1 генерирует постоянный сигнал, а модель *СМ*2 – гармонический с частотой ω_1. Эти сигналы компенсируют влияние на ошибку системы постоянных составляющих воздействий g и f_1, а также гармонической составляющей воздействия f_1, если эти составляющие присутствуют. При исчезновении какой-либо составляющей соответствующая модель автоматически прекращает генерацию компенсирующего сигнала.

Модели *СМ*1 и *СМ*2 называются спектральными, так как они генерируют сигналы, спектры которых совпадают со спектрами соответствующих внешних воздействий. Амплитуды и фазы выходных сигналов этих моделей определяются системой автоматически по условиям устойчивости замкнутой системы и компенсации отклонений, вызванных этими воздействиями.

Подчеркнем, что при цифровой реализации уравнений УУ (36) в алгоритм управления включается не только дискретный вариант уравнений (36), но и соотношения (31), (33)–(35). Это позволяет автоматически пересчитывать коэффициенты УУ при изменении заданного значения угловой скорости Ω* электродвигателя.

В частности при Ω* = 15,7 рад/с квадрат угловой скорости равен $\omega_1^2=(\Omega^*/10)^2=2{,}465$ (рад/с)^2. В этом случае расчеты по формулам (31), (33)–(35) приводят к уравнениям УУ (36) и УУ на рис. 2, где ρ_0 = 580:

A_1 = 22018,164192; A_2 = 3,141171019;
B_1 = – 22018,00285; B_2 = 68,48293576;
C_1 = – 93,57651212; C_2 = 3099,395496;
D_1 = – 0,161338814; D_2 = – 1382,65570.

В результате моделирования синтезированной системы при этих значениях параметров УУ получена переходная функция, приведенная на рис. 3. Также путем моделирования в Simulink получен переходной процесс по отклонению системы ε при наличии задающего воздействия $g(t)$ = 15,7·1(t) рад/с и возмущения $f_1(t)$ = [5 + 8 sin 1,57(t – 0,3)]·1(t – 0,3). Графики этих воздействий, управления $u(t)$, а также отклонения $\varepsilon(t)$, обозначенного как dsys, приведены на рис. 4.

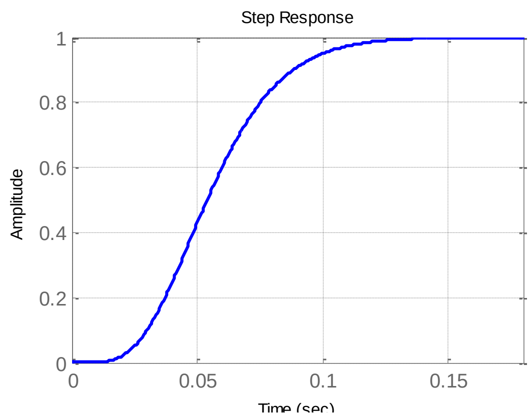

Рис. 3. Переходная функция замкнутой системы

В соответствии с графиками на рис. 3, 4, ошибка системы равна нулю как при отсутствии, так и при наличии возмущений. Управление $u(t)$ существенно зависит от вида внешних воздействий. При 0,1 ≤ t ≤ 0,3 с возмущение $f_1(t)$ отсутствует, поэтому управление – постоянное; при t = 0,3 с возникает это возмущение и управление становится гармоническим, хотя отклонение ε = dsys в установившемся режиме равно нулю. Фактически в этом режиме управление полностью формируется моделями *СМ*1 и *СМ*2, обеспечивая селективную инвариантность системы к внешним воздействиям.

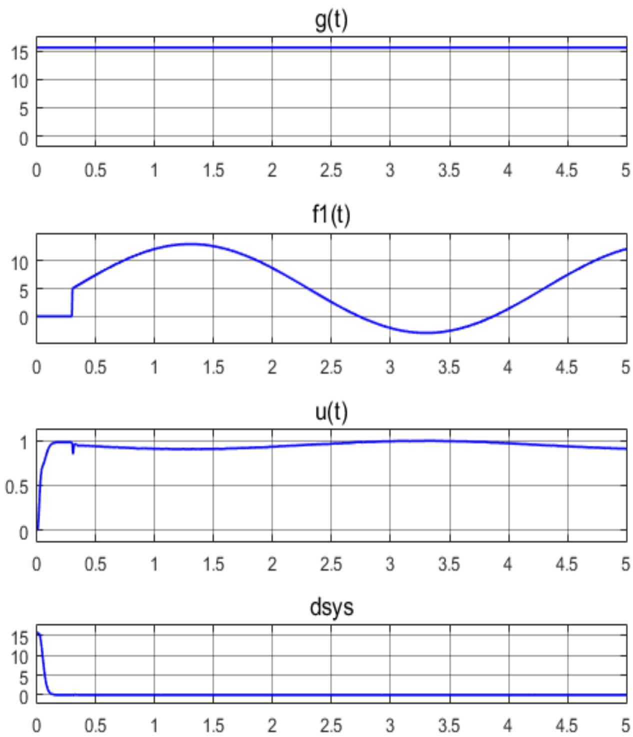

Рис. 4. Воздействия, управление и отклонение системы

Результаты моделирования свидетельствуют, что при малых отклонениях всех параметров, кроме спектрозадающего ω_1^2 (см. рис. 2), система остается селективно инвариантной к внешним воздействиям: g = const, f_1 = [const + $f_m$sin ($\omega_1 t$ + φ)]·1(t – $t_{пп}$), до тех пор, пока система остается устойчивой.

Выводы. Предложенный метод синтеза селективно инвариантных систем управления позволяет аналитически найти параметры устройства управления, которое при известных $K(p)$-изображениях внешних воздействий обеспечивает устойчивость системы, селективную инвариантность к этим воздействиям и параметрическую грубость свойства селективной инвариантности к большинству параметров системы, пока сохраняется устойчивость замкнутой системы. Параметрическая грубость (робастность) свойства селективной инвариантности к внешним воздействиям обеспечивается за счет применения принципа внутренних моделей, который реализуется на основе операторного $K(p)$-изображения внешних воздействий. Предложенный метод может применяться для создания систем управления в пищевой, химической, текстильной, полиграфической и других отраслях промышленного производства, а также в системах специального назначения.

Список литературы

1. **Мисриханов М.Ш.** Инвариантное управление многомерными системами: алгебраический подход. – М.: Наука, 2007.

2. **Кулебакин В.С.** Об основных задачах и методах повышения качества автоматики управляемых систем // Труды II Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Т. II. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 184–207.

3. **Кулебакин В.С.** Операторное *K*(*D*)-изображение функций и его практическое применение // Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского. – 1958. – Вып. 695.

4. **Надеждин П.В.** Получение фильтров Колмогорова-Винера на основе принципа селективной инвариантности // Теория инвариантности, теория чувствительности и их применения: тез. докл. VI Всесоюз. совещ. – М.: ИПУ, 1982. – С. 37–38.

5. **Гайдук А.Р.** Теория автоматического управления: учебник. – М.: Высш. шк., 2010.

6. **Уонэм М.** Линейные многомерные системы управления. – М.: Наука, 1980.

7. **Гайдук А.Р.** Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2012.

8. **Бобцов А.А., Кремлев А.С.** Алгоритм компенсации неизвестного синусоидального возмущения для линейного не минимально фазового объекта // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2008. – № 10. – С. 14–17.

9. **Бобцов А.А.** Адаптивное управление по выходу с компенсацией гармонического смещенного возмущения // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2009. – № 1. – С. 45–48.

10. **Compensation** of Polyharmonic Disturbance of State and Output of a Linear Plant with Delay in the Control Channel / A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov, V.O. Nikiforov and al. // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol. 76, No. 12. – P. 2124–2142.

11. **Назин С.А., Поляк Б.Т., Топтунов М.В.** Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. – 2007. – № 3. – С. 106–125.

12. **Никифоров В.О.** Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – С. 69–73.

13. **Гайдук А.Р.** Оценивание воздействий и инвариантность // Автоматика и телемеханика. – 1984. – № 3. – С. 20–29.

14. **Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б.** Концепция модальной редукции моделей динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2013. – № 12. – С. 2–8.

15. **Гайдук А.Р., Плаксиенко Е.А.** Робастность редуцированных динамических систем автоматизации // Мехатроника, автоматизация и управление. – 2016. – № 5. – С. 308–315.

16. **Копылова Л.Г., Тарарыкин С.В.** Компенсация гармонических возмущений момента нагрузки в следящих электромеханических системах и элементы структурной оптимизации регуляторов // Вестник ИГЭУ. – 2012. – Вып. 6. – С. 44–51.

References

1. Misrikhanov, M.Sh. *Invariantnoe upravlenie mnogomernymi sistemami: algebraicheskiy podkhod* [Invariant control of multivariable systems: an algebraic approach]. Moscow, Nauka, 2007.

2. Kulebakin, V.S. Ob osnovnykh zadachakh I metodakh povysheniya kachestva avtomatiki upravlyaemykh system [On the main goals and methods of quality improvement of controlled system automatics]. *Trudy II Vsecoyuznogo soveshchaniya po teorii avtomaticheskogo regulirovaniya. T. II* [Collected works of the II-nd All-Union Meeting on Theory of Automatic Control]. Moscow; Leningrad, Izdatel'stvo AN SSSR, 1955, pp. 184–207.

3. Kulebakin, V.S. Operatornoe *K*(*D*)-izobrazhenie funktsiy i ego prakticheskoe primenenie [Operational *K(D)*-image of functions and its practical application]. *Trudy VVIA im. N.E. Zhukovskogo*, 1958, issue 695.

4. Nadezhdin, P.V. Poluchenie fil'trov Kolmogorova-Vinera na osnove printsipa selektivnoy invariantnosti [Obtaining Kolmogorov–Wiener filters according to the selective invariancy principle]. *Tezisy dokladov VI Vsesoyuznogo soveshchaniya «Teoriya invariantnosti, teoriya chuvstvitel'nosti i ikh primeneniya»* [Abstracts of the VI-th All-Union Meeting «*Theory of invariancy, theory of sensitivity and their applications*»]. Moscow, IPU, 1982, pp. 37–38.

5. Gaiduk, A.R. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Theory of automatic control: a textbook]. Moscow, Vysshaya shkola, 2010.

6. Uonem, M. *Lineynye mnogomernye sistemy upravleniya* [Linear multivariable control systems]. Moscow, Nauka, 1980.

7. Gaiduk, A.R. *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyy podkhod)*

[Theory and methods of analytical design of automatic control systems (a polynomial approach)]. Moscow, Fizmatlit, 2012.

8. Bobtsov, A.A., Kremlev, A.S. Algoritm kompensatsii neizvestnogo sinusoidal'nogo vozmushcheniya dlya lineynogo ne minimal'no fazovogo ob"ekta [A compensation algorithm of unknown sine-wave disturbance for linear non-minimum phase plant]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2008, no. 10, pp. 14–17.

9. Bobtsov, A.A. Adaptivnoe upravlenie po vykhodu s kompensatsiey garmonicheskogo smeshchennogo vozmushcheniya [Adaptive output control with compensation of harmonically displaced disturbances]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2009, no. 1, pp. 45–48.

10. Pyrkin, A.A., Bobtsov, A.A., Nikiforov, V.O., Kolyubin, S.A., Vedyakov, A.A., Borisov, O.I., Gromov, V.S. Compensation of Polyharmonic Disturbance of State and Output of a Linear Plant with Delay in the Control Channel. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 12, pp. 2124–2142.

11. Nazin, S.A., Polyak, B.T., Toptunov, M.V. Podavlenie ogranichennykh vneshnikh vozmushcheniy s pomoshch'yu metoda invariantnykh ellipsoidov [Suppression of bounded external disturbances by the method of invariant ellipsoids]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2007, no. 3, pp. 106–125.

12. Nikiforov, V.O. Nelineynaya sistema upravleniya s kompensatsiey vneshnikh determinirovannykh vozmushcheniy [A nonlinear control system with compensation of the external deterministic disturbances]. *Izvestiya RAN. Theoriya i sistemy upravleniya*, 1997, no. 4, pp. 69–73.

13. Gaiduk, A.R. Otsenivanie vozdeystviy i invariantnost' [Estimation of disturbances and invariancy]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1984, no. 3, pp. 20–29.

14. Filimonov, A.B., Filimonov, N.B. Kontseptsiya modal'noy reduktsii modeley dinamicheskikh sistem [A concept of modal reduction of dynamic system models]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie,* 2013, no. 12, pp. 2–8.

15. Gaiduk, A.R., Plaksienko, E.A. Robastnost' redutsirovannykh dinamicheskikh sistem avtomatizatsii [Robustness of reduced dynamic automation systems]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2016, no. 5, pp. 308–315.

16. Kopylova, L.G., Tararykin, S.V. Kompensatsiya garmonicheskikh vozmushcheniy momenta nagruzki v sledyashchikh elektromekhanicheskikh sistemakh i elementy strukturnoy optimizatsii regulyatorov [Compensation of load torque harmonic disturbances in servo electromechanical systems and elements of regulator structural optimization]. *Vestnik IGEU*, 2012, issue 6, pp. 44–51.

Гайдук Анатолий Романович,
ФГАОУВО «Южный федеральный университет»,
доктор технических наук, профессор кафедры систем автоматического управления,
ООВО (Ассоциация) «Кисловодский гуманитарно-технический институт»,
зав. кафедрой систем автоматического управления,
телефоны: (8634) 37-16-89, (87937) 2-83-33
e-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Gaiduk, Anatoly Romanovich,
Southern Federal University,
Doctor of Engineering, Professor of the Department of Automatic Control Systems,
Kislovodsk Humanitarian and Technical Institute,
Head of the Department of Automatic Control Systems,
tel.: (8634) 37-16-89, (87937) 2-83-33
e-mail: gaiduk_2003@mail.ru