

## МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

---

---

УДК 536.2.02

### ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ В СЛОЯХ<sup>1</sup>

В.Е. МИЗОНОВ, А.В. МИТРОФАНОВ, Е.В. БАСОВА, Е.А. ШУИНА  
ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
г. Иваново, Российская Федерация  
E-mail: mizonov46@mail.ru

#### Авторское резюме

**Состояние вопроса.** Теплопроводность является важной составной частью тепловых процессов в энергетике, строительстве, химических технологиях и других отраслях. Теоретическому и экспериментальному исследованию теплопередачи путем теплопроводности посвящено множество исследований, в которых в настоящее время основное внимание уделяется нелинейной теплопроводности, когда свойства материала меняются при изменении температуры, а окружающие условия – с течением времени. Одной из причин возникновения нелинейности являются возможные фазовые переходы в материале, например его плавление или сушка. Задачи моделирования таких процессов также поставлены и решены во многих работах. Однако подавляющее большинство из них относится к фазовым переходам в однослойном, а не многослойном материале. Моделирование теплопроводности в многослойной среде с фазовыми переходами в отдельных ее слоях требует дополнительных исследований, являющихся предметом настоящего исследования.

**Материалы и методы.** Для решения поставленной задачи используется метод математического моделирования. Модель использует математический аппарат теории цепей Маркова. Она адаптирована к многослойной среде, в отдельных слоях которой могут происходить фазовые переходы. Перенос теплоты теплопроводностью и тепловые процессы при фазовых превращениях описаны классическими уравнениями теплового баланса. Изучение влияния параметров на протекание процесса выполнено численными методами.

**Результаты.** Разработана математическая модель, позволяющая описывать переходные тепловые процессы в многослойной среде с возможными фазовыми переходами в отдельных слоях. Приведены результаты расчета кинетики теплового процесса нагрева трехслойной стенки, в которой легкоплавкий промежуточный слой окружен двумя тугоплавкими слоями. Полученные результаты физически не противоречивы и подтверждают работоспособность модели.

**Выводы.** Разработанная модель нелинейной теплопроводности в многослойной среде с фазовыми переходами может быть успешно использована для расчета разнообразных физико-химических процессов в слоях: сушки, промерзания и оттаивания, химических процессов (например, пиролиза) и других.

**Ключевые слова:** нелинейная теплопроводность, многослойная среда, переходные тепловые процессы, фазовые превращения, поле температур, плавление

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №18-08-00028).

# THEORETICAL STUDY OF NON-LINEAR HEAT CONDUCTION IN MULTI-LAYER MEDIUM WITH PHASE TRANSFORMATION IN THE LAYERS

V.E. MIZONOV, A.V. MITROFANOV, E.V. BASOVA, E.A. SHUINA  
Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation  
E-mail: mizonov46@mail.ru

## Abstract

**Background.** The heat conduction is an important part of heat transfer processes in power engineering, civil engineering, chemical technologies, etc. Variety of researches is devoted to theoretical and experimental study of the heat transfer by the heat conduction. At present, the main attention is concentrated on the non-linear heat conduction when the material properties change with the temperature variation, and the outside conditions change with time. One of the reasons of non-linearity appearance is the phase transformation in the material due to its melting, or drying. The problems of modeling of such processes are also set up and solved in many works. However, the overwhelming majority of such works is related to single-layer materials but not to multi-layer once. Modeling of the heat conduction in a multi-layer medium with phase transformation in its separate layers requires additional investigation, which is the objective of the present paper.

**Materials and methods.** In order to solve the problem, the method of mathematical modeling is used. The model uses the mathematical tools of the theory of Markov chains. It is adapted to the case of multi-layer medium, the phase transformation can occur in separate parts of which. The heat transfer by heat conduction and heat processes during the phase transformation are described by the classical equations of heat balance. The numerical experiments were used to investigate the influence of parameters on the process behavior.

**Results.** A mathematical model that allows describing transient heat processes in a multi-layer medium with the possibility of phase transformation in its separate layers is developed. The results of heat process calculation for heating up the three-layer wall with the low-melt intermediate layer surrounded by high-melting layers are presented. The obtained results are consistent physically and validate workability of the model.

**Conclusions.** The developed model of non-linear heat conduction in multi-layer medium with phase transformation in its layers can be successfully used to calculate various physicochemical processes in the layers: drying, freezing and defrosting, pyrolysis, and others.

**Key words:** non-linear heat conduction, multi-layer medium, transient heat processes, phase transformation, temperature field, melting

**DOI:** 10.17588/2072-2672.2020.1.053-059

**Состояние вопроса.** Задача о моделировании и расчете теплопередачи через многослойную плоскую стенку путем теплопроводности с возможностью возникновения в отдельных слоях фазовых переходов возникает во многих отраслях промышленности, например в энергетике, строительстве, химической технологии и других. Ее решению посвящено много исследований, но поскольку аппаратное оформление исследуемых объектов весьма разнообразно, разнообразны и расчетные схемы моделирования и используемые математические методы.

Решение задачи теплопроводности в плоской прямоугольной пластине, нагреваемой перемещающимся по эллиптической траектории локальным тепловым источником, описано в [1], где с использованием метода функции Грина получено аналитическое решение задачи. Однако, во-первых, такая траектория источника была

единственно возможной для получения аналитического решения, а во-вторых, возможность фазовых переходов вообще не рассматривалась. Аналогичная задача применительно к процессу сварки решалась в [2], где использовался метод Петрова-Галеркина, но основное внимание уделено влиянию количества узловых точек на точность решения, а не на его физические особенности. В [3] представлено аналитическое и численное решение задачи теплопроводности при нагреве пластины лазерным источником, но снова переменность свойств и возможные фазовые переходы остались за пределами задачи. Нестационарная теплопроводность в двухслойном материале с неидеальным контактом между слоями описана в [4], где методом разделения переменных получено аналитическое решение, для чего источниковый член в уравнении теплопроводности также раскладывался в ряд Фурье. Не-

смотря на то, что сам метод хорошо известен, полученное решение было эффективно использовано для экспериментального исследования термического сопротивления контакта между слоями. Аналитический метод расчета температурного поля в полубесконечном теле, вызванного тепловым источником, движущимся с переменным направлением по его поверхности, описан в [5]. Но и здесь фазовые переходы в теле не приняты во внимание. Позднее в [6] в модель был введен процесс плавления, но только как локальный фактор, изменяющий теплоотдачу от источника к телу. Теоретическое и экспериментальное исследование плавления тонкой проволоки описано в [7, 8], где нижний конец проволоки получал теплоту от электрического разряда. Однако описанный подход вряд ли применим для рассматриваемой задачи. В [9] использован метод движущейся сетки для моделирования взрывной реакции с движущимся источником теплоты. Метод позволяет избежать трудностей, связанных с представлением движущегося источника дельта-функцией. Моделирование теплопередачи при плавлении около движущегося горизонтального или цилиндрического теплового источника представлено в [10]. Домен расплава представлен двумя зонами: зоной непосредственного контакта и зоной устойчивого расплава. Основное внимание уделено контактной зоне, но весь расплав оставлен без внимания. Таким образом, анализ перечисленных и других работ, несмотря на их несомненную ценность для теории теплопроводности, показывает, что они не могут рекомендовать универсальный и достоверный подход к решению поставленной задачи.

Цикл выполненных нами ранее исследований, обобщенных в [11, 12], показал, что эффективным инструментом для задач рассматриваемого класса является математический аппарат теории цепей Маркова. Ниже предлагается обобщение этого подхода на расчетную схему рассматриваемой конфигурации.

**Теория.** Рассматривается ячеечная модель теплопроводности через плоскую стенку, состоящую из нескольких слоев с различными теплофизическими свойствами. Расчетная схема модели показана на рис. 1.

Полная толщина стенки  $L$  разбита на  $m$  ячеек малой, но конечной длины

$\Delta x = L/m$ , внутри которых все теплофизические свойства и параметры считаются распределенными равномерно. Поперечное сечение ячеек принято равным условной единице. Правый край стенки ( $j = m$ ) теплоизолирован, а через левый край ( $j = 1$ ) возможен подвод или отвод теплоты. Все теплофизические свойства стенки и параметры ее теплового состояния представлены векторами-столбцами размера  $m \times 1$ :  $\rho$  – плотность;  $c$  – удельная теплоемкость;  $Q$  – теплота;  $T$  – температура. Следует особо отметить представление теплопроводности  $\lambda$ . Если плотность и удельная теплоемкость приписываются к каждой отдельной ячейке, то теплопроводность является атрибутом пары соседних ячеек и должна быть приписана к одной из них – правой или левой. Это показано на рис. 1, где выделены две ячейки, разделенные скачком свойств. Здесь теплопроводность приписана к правой ячейке. Тепловое состояние процесса фиксируется в дискретные моменты времени  $t_k = (k - 1)\Delta t$ , где  $\Delta t$  – продолжительность,  $k$  – номер временного перехода.

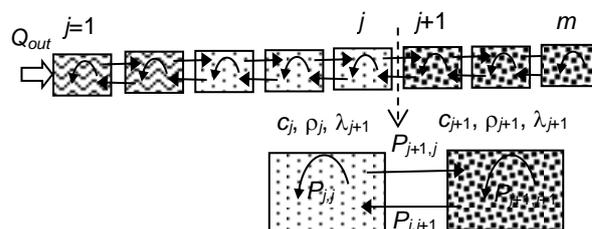


Рис. 1. Схематическое представление процесса теплопроводности через многослойную плоскую стенку

Кинетика теплового состояния процесса описывается рекуррентным матричным равенством

$$\mathbf{Q}^{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^k + \Delta\mathbf{Q}_e^k, \quad (1)$$

где  $\mathbf{P}$  – матрица теплопроводности (матрица переходных вероятностей в терминах теории цепей Маркова), которая описывает перенос теплоты между ячейками путем теплопроводности в течение одного временного перехода. Правила ее построения подробно описаны в [11].

Ниже приведен фрагмент матрицы  $\mathbf{P}$ , относящийся к показанному на рис. 1 скачку свойств:

$$P = \begin{bmatrix} \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \frac{\lambda_{j+1}}{c_{j+1}\rho_{j+1}} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} & 0 & \dots \\ \dots & \frac{\lambda_{j+1}}{c_j \rho_j} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} & 1 - \frac{\lambda_{j+1} + \lambda_{j+2}}{c_{j+1}\rho_{j+1}} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \frac{\lambda_{j+2}}{c_{j+1}\rho_{j+1}} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где кружками отмечено описанное выше правило подстановки коэффициента теплопроводности.

Необходимо отметить, что скачок свойств может быть приписан к каждой паре ячеек. Тогда модель будет описывать процесс с переменной по толщине стенки теплопроводностью, которая может меняться с течением времени, например, при изменении температуры.

Вектор  $\Delta Q_e^k$  описывает подвод или отвод теплоты от внешних источников. Для показанной на рис. 1 расчетной схемы он имеет единственный ненулевой элемент

$$\Delta Q_{e1}^k = \alpha(T_{out}^k - T_1^k), \quad (3)$$

где  $T_{out}^k$  – в общем случае переменная температура окружающей среды;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи.

Переход от распределения по ячейкам теплоты  $Q^k$  к распределению температуры осуществляется по формуле

$$T^k = Q^k / c^k J(\rho^k \Delta x), \quad (4)$$

где оператор  $J$  означает поэлементное деление векторов.

Модель, представленная равенствами (1)–(4), позволяет описывать теплопроводность в составной стенке (в том числе, и нелинейную), но не принимает во внимание возможные фазовые переходы в слоях, которые могут иметь разнообразный характер. Для определенности рассмотрим фазовый переход плавление/отвердевание как один из возможных. Для этого необходимо выполнять тепловую диагностику ячеек за пределами матричного равенства (1). Эта диагностика осуществляется следующим образом.

Рассмотрим тепловое состояние  $j$ -й ячейки. Масса твердого вещества в ячейке составляет  $MS_j = \rho_j \Delta x$ , масса расплавленного вещества  $ML_j^k$ . Если  $T_j^{k+1} > T_j^k$ , то происходит ее нагрев, и если при этом  $ML_j^k$  становится равной  $MS_j$ , то это означает,

что процесс плавления закончился, т. е. фазовый переход завершился.

Пусть на  $k$ -м временном переходе температура ячейки превысила температуру плавления  $T_{me}$ , т. е.

$$T_j^{k+1} > T_{me} \quad (5)$$

и при этом

$$ML_j^k = MS_j. \quad (6)$$

Тогда фазового перехода уже не происходит, а температура ячейки остается какой была,  $T_j^{k+1} := T_j^k$ .

Однако если  $ML_j^k < MS_j$ , то в ячейке возможен фазовый переход, который поглотит теплоту

$$\Delta Q_{jme}^k = (T_j^{k+1} - T_{me}) c_j^k \rho_j^k \Delta x, \quad (7)$$

что вызовет прирост массы расплава

$$\Delta ML_j^k = \Delta Q_{jme}^k / q_{me}, \quad (8)$$

где  $q_{me}$  – скрытая теплота плавления, и текущая масса расплава составит

$$ML_j^{k+1} = ML_j^k + \Delta ML_j^k. \quad (9)$$

При этом температура ячейки до полного завершения в ней фазового перехода не изменится, т. е.  $T_j^{k+1} = T_{me}$ .

Если ячейка охлаждается ( $T_j^{k+1} < T_j^k$ ), то знаки в описанной выше процедуре плавления меняются на противоположные.

По аналогичной схеме в модель теплопроводности может быть подключен алгоритм любого фазового перехода или химической реакции, что делает ее пригодной для моделирования широкого класса физико-химических процессов, связанных с теплопроводностью.

**Результаты.** Целью численных экспериментов с моделью было показать ее работоспособность и физическую непротиворечивость. Расчеты выполнены для трехслойной стенки толщиной  $L = 0,1$  м, разделенной на  $m = 20$  ячеек длиной  $0,005$  м. Крайние слои стенки считаются тугоплавкими и занимают по 6 ячеек, а внутренний слой, занимающий 8 ячеек, – легкоплавким с температурой плавления  $T_{me} = 40$  °С и скрытой теплотой плавления  $q_{me} = 4 \cdot 10^5$  Дж/кг. Считается, что плотность и удельная теплоемкость слоев одинаковы и составляют  $1000$  кг/м<sup>3</sup> и  $400$  Дж/кг·град соответственно. Теплопроводность внешних слоев принята равной  $0,8$  Вт/м·град, а внутреннего (легкоплавкого) –  $0,2$  Вт/м·град. Первоначально все слои стенки имеют одинаковую температуру  $T_j^1 = 20$  °С. С левой стороны

стенки действует тепловой источник с температурой  $T_{out}^k = 60\text{ }^\circ\text{C}$  с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha = 20\text{ Вт/м}^2$ . Правый край стенки теплоизолирован. Расчеты выполнены для  $\Delta t = 3\text{ с}$ .

На рис. 2 показана эволюция распределения температуры в стенке при постоянной температуре теплового источника.

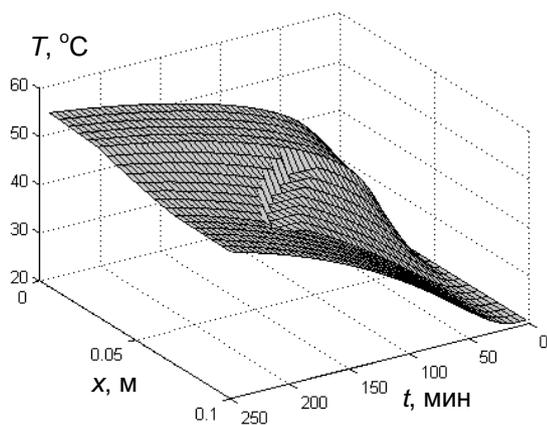


Рис. 2. Эволюция распределения температуры в стенке при постоянной температуре теплового источника

Анализ полученных данных показывает, что, во-первых, график температуры меняет угол наклона при переходе от слоя к слою, а во-вторых, ясно просматривается зона фазового перехода, когда температура остается постоянной. Более наглядно это видно на рис. 3, где показаны графики изменения наружной и внутренней поверхности стенки, а также середины легкоплавкого слоя. На последнем ясно виден период плавления средней ячейки.

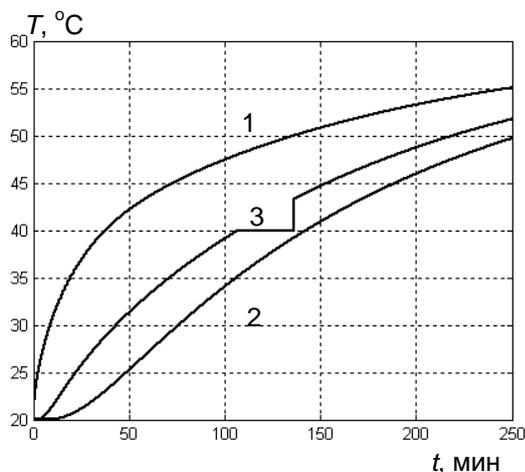


Рис. 3. Изменение во времени температуры наружной поверхности стенки (1), внутренней поверхности стенки (2) и середины легкоплавкого слоя (3)

На рис. 4 показано зарождение, развитие и окончание зоны плавления. Эта зона зарождается со стороны действия теплового источника, распространяется внутрь и заканчивается у поверхности внутреннего тугоплавкого слоя.

Ширина и волнистость границы зоны расплава обусловлена конечностью размеров ячеек. Плавление последующей ячейки не начинается до тех пор, пока полностью не закончится плавление предыдущей.

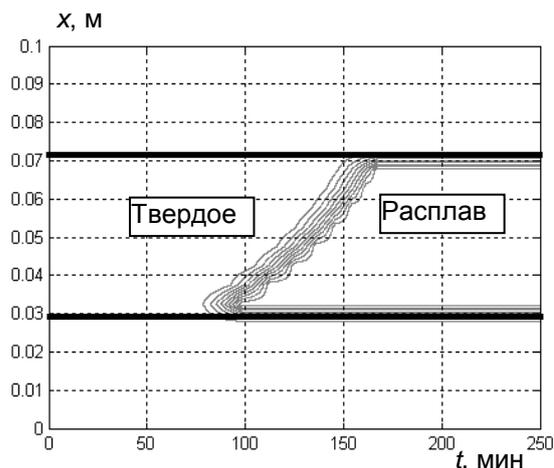


Рис. 4. Зарождение, распространение и окончание зоны расплава

Выше упоминалось, что модель может успешно работать не только при постоянной температуре теплового источника, но и при произвольном ее графике  $T_{out}^k$ . На рис. 5–7 приведены те же графики, что и на рис. 2–4, но для скачкообразного изменения температуры теплового источника: при  $t \leq 150\text{ мин}$   $T_{out}^k = 60\text{ }^\circ\text{C}$ ; при  $t > 150\text{ мин}$   $T_{out}^k = 20\text{ }^\circ\text{C}$  (т. е. источник выключается).

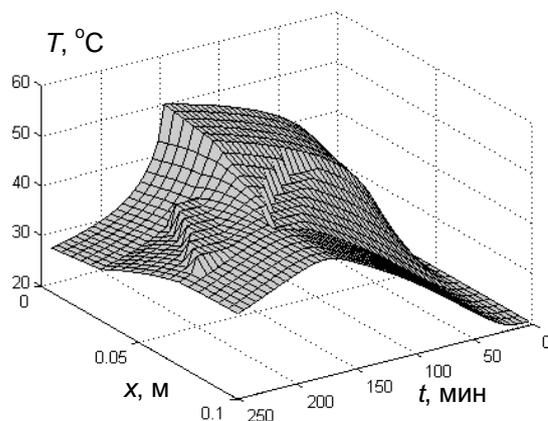


Рис. 5. Эволюция распределения температуры в стенке при скачкообразном изменении температуры теплового источника

Рис. 5 иллюстрирует эволюцию распределения температуры в стенке для двух периодов: нагрева и охлаждения, причем при охлаждении имеет место обратный фазовый переход – отвердевание расплава.

На рис. 6 показано изменение во времени внешней и внутренней температуры стенки, температуры в среднем сечении легкоплавкого слоя и скачкообразное изменение температуры теплового источника. На кривой 3 присутствуют зоны с постоянной температурой, соответствующие плавлению (слева) и отвердеванию (справа) легкоплавкого материала.

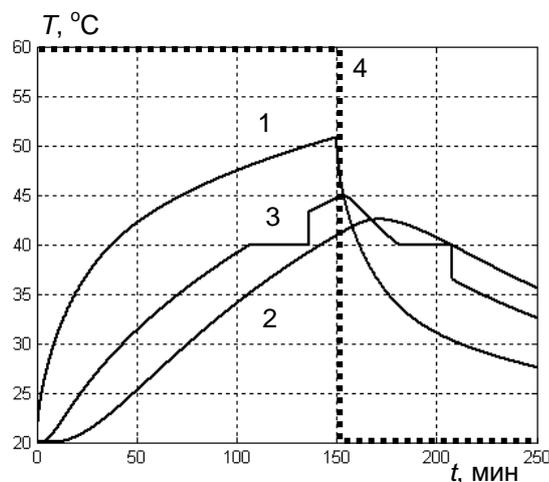


Рис. 6. Изменение во времени температуры наружной поверхности стенки (1), внутренней поверхности стенки (2) и середины легкоплавкого слоя (3) при скачкообразном изменении температуры теплового источника (4)

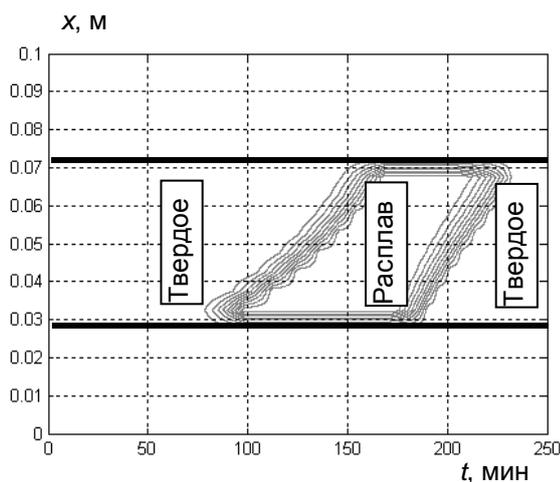


Рис. 7. Зарождение, расширение и сжатие зоны расплава после отключения теплового источника

Рис. 7 иллюстрирует эволюцию положения зоны расплава в легкоплавком материале. Фазовый переход (плавление)

начинается с внешней границы легкоплавкого слоя, распространяется вглубь и постепенно захватывает весь слой. При снижении температуры теплового источника происходит обратный процесс. Фазовый переход (отвердевание) начинается также с внешней границы легкоплавкого слоя, поскольку на ней температура снижается быстрее, и распространяется до внутренней границы, после чего вся стенка возвращается к твердому состоянию.

**Выводы.** Разработанная математическая модель нелинейной теплопроводности в многослойной среде с фазовыми переходами в слоях, апробированная на случае трехслойной стенки с фазовым переходом типа плавление/отвердевание, позволяет рассчитывать кинетику всех теплофизических процессов в стенке и легко может быть обобщена на случай протекания в слоях химических реакций. Основанный на модели компьютерный метод расчета может найти применение в расчете и оптимизации теплоэнергетического оборудования (например, регенеративных теплообменников с фазовыми переходами в насадке), ограждающих конструкций зданий и сооружений, криогенного оборудования и других объектов, связанных тепломассопереносом.

#### Список литературы

1. **Kidawa-Kukla J.** Temperature distribution in a rectangular plate heated by a moving heat source // *Int. J. Heat Mass Transf.* – 2008. – Vol. 51. – P. 865–872.
2. **Shibahara M., Atluri S.N.** The meshless local Petrov-Galerkin method for the analysis of heat conduction due to a moving heat source, in welding // *Int. J. Therm. Sci.* – 2011. – Vol. 50. – P. 984–992.
3. **Van Elsen M., Baelmans M., Mercelis P., Kruth J.-P.** Solutions for modeling moving heat source in a semi-infinite medium and applications to laser material processing // *Int. J. Heat Mass Transf.* – 2007. – Vol. 50. – P. 4872–4882
4. **Belghazi H., El Ganaoui M., Labbe J.C.** Analytical solution of unsteady heat conduction in a two-layered material in imperfect contact subjected to a moving heat source // *Int. J. Therm. Sci.* – 2010. – Vol. 49. – P. 311–318.
5. **Winczek J.** Analytical solution to transient temperature field in a half-infinite body caused by moving volumetric heat source // *Int. J. Heat Mass Transf.* – 2010. – Vol. 53. – P. 5774–5781.
6. **Winczek J.** New approach to modeling of temperature field in surfaced steel elements //

Int. J. Heat Mass Transf. – 2011. – Vol. 54. – P. 4702–4709.

7. **Huang L.J., Ayyaswamy P.S., Cohen I.M.** Melting and solidification of thin wires: class of phase-change problems with a mobile interface – I. Analysis // Int. J. Heat Mass Transf. – 1995. – Vol. 38. – P. 1637–1645.

8. **Cohen I.M., Huang L.J., Ayyaswamy P.S.** Melting and solidification of thin wires: class of phase-change problems with a mobile interface – II. Experimental confirmation // Int. J. Heat Mass Transf. – 1995. – Vol. 38. – P. 1647–1659.

9. **Jingtang Ma, Yingjun Jiang.** Moving mesh methods for blowup in reaction–diffusion

equations with traveling heat source // J. Comput. Phys. – 2009. – Vol. 228. – P. 6977–6990.

10. **Moallemi M.K., Viskn R.** Analysis of melting around a moving heat source // Int. J. Heat Mass Trans. – 1996. – Vol. 29. – P. 1271–1282.

11. **Mizonov V., Yelin N.** Numerical study of melting a rod by a periodically moving local heat source // Int. J. Therm. Sci. – 2015. – Vol. 97. – P. 1–8. doi:10.1016/j.ijthermalsci.2015.06.005

12. **Mizonov V., Yelin N., Sakharov A.** Theoretical study of the thermal state of building envelop in the neighborhood of embedded item // Applied Thermal Engineering. – 2015. – Vol. 79. – P. 149–152.

*Мизонов Вадим Евгеньевич,*

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики, e-mail: mizonov46@mail.ru

*Mizonov Vadim Evgen'evich,*

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering (Postdoctoral degree), Professor of Applied Mathematics Department, e-mail: mizonov46@mail.ru

*Митрофанов Андрей Васильевич,*

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики, e-mail: and2mit@mail.ru

*Mitrofanov Andrey Vasil'yevich,*

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering (Postdoctoral degree), Professor of Applied Mathematics Department, e-mail: and2mit@mail.ru

*Басова Елена Владимировна,*

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», ассистент кафедры высшей математики, e-mail: nowikowa.elena@mail.ru

*Basova Elena Vladimirovna,*

Ivanovo State Power Engineering University, Assistant of Higher Mathematics Department, e-mail: nowikowa.elena@mail.ru

*Шуина Елена Александровна,*

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, зав. кафедрой высшей математики, e-mail: barantseva77@mail.ru

*Shuina Elena Aleksandrovna,*

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering (Postdoctoral degree), Head of Higher Mathematics Department, e-mail: barantseva77@mail.ru

УДК 621.165

## **МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ТЕПЛОМАССОБМЕННЫХ СИСТЕМ С МНОГОКОМПОНЕНТНЫМИ ТЕПЛОНОСИТЕЛЯМИ**

А.Е. БАРОЧКИН, В.П. ЖУКОВ, М.С. ШУМИЛОВА, Е.В. БАРОЧКИН, А.Н. БЕЛЯКОВ  
ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
г. Иваново, Российская Федерация  
E-mail: zhukov-home@yandex.ru

### **Авторское резюме**

**Состояние вопроса.** Ранее нами получено решение задачи теплообмена в многопоточных многоступенчатых теплообменных аппаратах с однокомпонентными теплоносителями. Однако в энергетической, пищевой и нефтехимической отраслях промышленности часто в теплообменных процессах участвуют теплоносители, состоящие из компонентов, теплофизические свойства которых существенно различаются.