

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК 621.927

Антон Валерьевич Огурцов

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, e-mail: ogurtsovav@mail.ru

Евгений Иванович Крупнов

ФГБОУВО «Ивановский государственный политехнический университет», кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой гидравлики, теплотехники и инженерных сетей, Россия, Иваново, e-mail: ekруп@list.ru

Елена Руфимовна Кормашова

ФГБОУВО «Ивановский государственный политехнический университет», кандидат технических наук, доцент кафедры гидравлики, теплотехники и инженерных сетей, Россия, Иваново, e-mail: iast@ivgpu.com

Вадим Евгеньевич Мизонов

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, e-mail: mizonov46@mail.ru

Расчет нестационарного теплообмена в многослойных средах с помощью теории цепей Маркова

Авторское резюме

Состояние вопроса. Расчет нестационарного теплообмена в многослойных разнородных средах является часто встречающейся задачей во многих отраслях производства, в том числе в высокотемпературных металлургических технологиях получения и обработки металлов, сплавов и изделий из них. Подобного рода вопросы возникают при проектировании зданий, сооружений, конструкций. В большинстве случаев для расчета применяются модели, основанные на приближенном решении классических уравнений теплопроводности. Недостатком таких моделей является сложная вычислительная процедура, связанная с необходимостью решения большого количества уравнений и определения большого количества идентификационных параметров. В настоящее время расчет одного режима передачи тепла между секциями составной конструкции требует 6–8 часов работы компьютера средней мощности. В связи с этим разработка дискретных моделей, требующих на порядок меньших затрат машинного времени, имеет актуальный характер.

Материалы и методы. Предлагаемая математическая модель процесса основана на теории цепей Маркова. Многослойная среда представлена совокупностью малых, но конечных ячеек, каждой из которых поставлены в соответствие доли содержащейся в них теплоты, переносимые в соседние ячейки, пропорциональные коэффициенту теплопроводности и обратно пропорциональные теплоемкости, плотности материала и размеру ячейки.

Результаты. Разработана матричная модель, описывающая перенос тепла между ячейками в многослойном материале на основе теории цепей Маркова. Описано построение матрицы переходных вероятностей, произведен расчет текущих векторов состояния – распределения теплоты и температуры с учетом неравномерности температуры нагревателя.

Выводы. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных показало адекватное описание математической моделью реального процесса. Анализ параметров идентификации модели дал удовлетворительный результат.

Ключевые слова: нестационарный теплообмен, теория цепей Маркова, вектор состояния, распределение температуры, коэффициент теплопроводности, рекуррентное равенство, матрица переходных вероятностей, численный эксперимент

Anton Valerievich Ogurtsov

Ivanovo State Power Engineering University, Candidate of Engineering Sciences, (PhD), Associate Professor of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, e-mail: ogurtsovav@mail.ru

Evgenii Ivanovich Krupnov

Ivanovo State Polytechnic University, Candidate of Engineering Sciences, (PhD), Associate Professor, Head of Hydraulics, Heating Engineering, Pipelines and Networks Department, Russia, Ivanovo, e-mail: ekrup@list.ru

Elena Rufimovna Kormashova

Ivanovo State Polytechnic University, Candidate of Engineering Sciences, (PhD), Associate Professor of Hydraulics, Heating Engineering, Pipelines and Networks Department, Russia, Ivanovo, e-mail: iast@ivgpu.com

Vadim Evgenievich Mizonov

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences, Professor of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, e-mail: mizonov46@mail.ru

Calculation of non-stationary heat exchange in multi-layer media by means of the theory of Markov chains

Abstract

Background. Calculation of non-stationary heat exchange in multi-layer dissimilar media is the problem, which is often found in many industries including high temperature metallurgic technologies of production and treatment of metals, alloys and their products. The similar problems arise during the design of buildings and structures. The models used for calculation are mainly based on approximate solutions of classical heat conduction equations. The drawback of such models is a complex computational procedure, associated with the need to solve a large number of equations and to define a large number of identification parameters. At present, the calculation of one mode of heat transfer between the sections of a composite structure requires 6–8 hours of operation of a computer of average power. In this regard, the development of discrete models that require less computer time is of current importance.

Materials and methods. The proposed model of the process is based on the theory of Markov chains. A multi-layer medium is presented as a chain of small but finite cells. Each of them contains a certain amount of heat that can be transferred to the neighboring cells. The part of the transferred heat is directly proportional to the heat conduction coefficient and in inverse proportion to the material heat capacity, material density and the cell length.

Results. The matrix model to describe heat transfer between cell in a multi-layer media based on the theory of Markov chains is developed. Construction of the matrix of transition probabilities is described, evolution of the state vectors i.e. distribution of heat and temperature is carried out, and non-uniformity of the heater temperature is taken into account.

Conclusions. Comparison of calculated and experimental data has showed the adequate description of the real process using the model. Analysis of identification parameters has given a satisfactory result.

Key words: non-stationary heat exchange, the theory of Markov chains, state vector, temperature distribution, heat conduction coefficient, recurrent equality, matrix of transition probabilities, numerical experiment

DOI: 10.17588/2072-2672.2021.1.060-066

Введение. Расчет переноса теплоты в многослойных средах является сложной

нелинейной задачей, не имеющей аналитических решений. Однако проведение та-

ких расчетов необходимо для разработки энергосберегающих мероприятий, обеспечивающих рациональные параметры в энергетических, металлургических, строительных и других процессах. Традиционные численные методы не позволяют использовать их в инженерной практике из-за неуниверсальности и сложности используемых программ [1–7]. Для оптимального управления переходными режимами энергетических или теплотехнологических установок необходим расчет нестационарных температурных полей в элементах зданий, сооружений, конструкций, машин и оборудования. Для этого необходимы удобные модели с малым числом параметров идентификации.

Методы исследования. Построение модели теплообмена выполним на основе теории цепей Маркова, которая при сохранении ясного физического понимания процессов дает возможность использовать апробированный математический аппарат. Теплообмен в многослойной среде представим как марковский процесс с дискретным шагом по времени и по координате. Считаем, что тепловые свойства равномерно распределены по объему слоев материала. Результирующее распределение температур строится в поперечном направлении, поэтому модель базируется на одномерной цепи. Для описания состояния выберем вектор-столбец, составленный из значений количества теплоты в каждой ячейке $Q = \{q_i\}$, где $i = \overline{1, m}$; m – общее число ячеек многослойного материала. Каждая ячейка имеет качественно однотипные свойства, которые, однако, могут различаться количественно (рис. 1). Через промежуток времени Δt , называемый временем перехода, вектор Q_k изменится и станет Q_{k+1} . Считая Δt постоянным, заменим непрерывное время его дискретными моментами $t_k = k \cdot \Delta t$ и будем рассматривать k как целочисленные моменты условного времени. Связь между векторами состояния до и после k -го перехода описывается следующей матричной формулой:

$$Q_{k+1} = P Q_k, \quad (1)$$

где P – матрица переходных вероятностей, элементы которой p_{ij} показывают вероятность перехода количества теплоты из j -й ячейки вектора состояния в i -ю.

Дальнейшее моделирование процесса теплообмена сводится к определению матрицы переходных вероятностей и расчету температур в каждой ячейке.

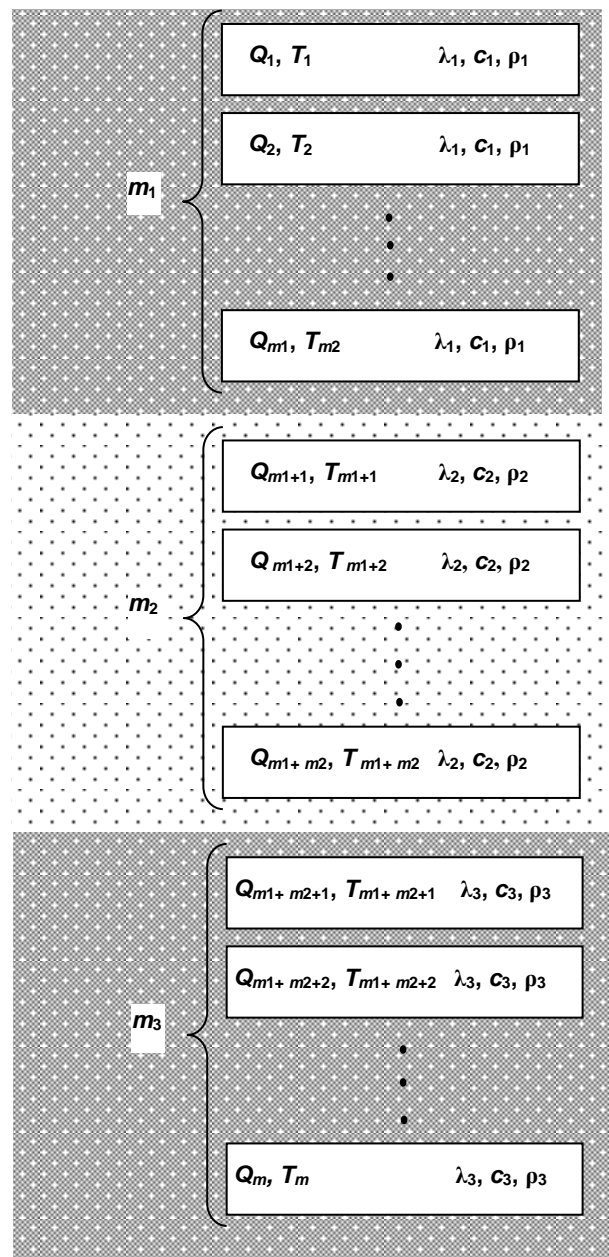


Рис. 1. Расчетная схема процесса

Для построения матрицы переходных вероятностей рассмотрим сначала перетоки теплоты Q между ячейками в течение одного временного перехода Δt – времени перехода между состояниями k и $k+1$. Начнем рассмотрение процесса только с двух соседних ячеек j и $j+1$, не граничащих с окружающей средой. При различных температурах T_1 и T_2 в ячейках между ними возникает тепловой поток, который приведет к изменению количества теплоты

в ячейках, что может быть описано формулами [8]:

$$\begin{aligned}
 Q_j^{k+1} &= Q_j^k - \Delta Q_j^k = Q_j^k - \lambda_j S (T_j^k - T_{j+1}^k) \frac{\Delta t}{\Delta x} = \\
 &= Q_j^k - \lambda_j S \left(\frac{Q_j^k}{c_j \rho_j V_j \Delta x_j} - \frac{Q_{j+1}^k}{c_j \rho_j V_{j+1} \Delta x_{j+1}} \right) \Delta t = \quad (2) \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda_j S \Delta t}{c_j \rho_j V_j \Delta x_j} \right) Q_j^k + \frac{\lambda_j S \Delta t}{c_j \rho_j V_{j+1} \Delta x_{j+1}} Q_{j+1}^k; \\
 Q_{j+1}^{k+1} &= Q_{j+1}^k + \Delta Q_{j+1}^k = \\
 &= \frac{\lambda_j S \Delta t}{c_j \rho_j V_j \Delta x_j} Q_j^k + \left(1 - \frac{\lambda_j S \Delta t}{c_j \rho_j V_{j+1} \Delta x_{j+1}} \right) Q_{j+1}^k, \quad (3)
 \end{aligned}$$

где λ_j – коэффициент теплопроводности; S и V_j – площадь поверхности и объем ячейки; c_j и ρ_j – удельная теплоемкость и плотность материала.

Так как модель базируется на одномерной цепи $S = 1$, то

$$\frac{S}{V_j \Delta x_j} = \frac{1}{V_{j+1} \Delta x_{j+1}}. \quad (4)$$

Соотношения (2) и (3) с учетом (4) могут быть записаны в матричной форме [3]:

$$\begin{bmatrix} Q_{j+1}^k \\ Q_{j+1}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\lambda_j \Delta t}{c_j \rho_j \Delta x_j^2} \right) & \frac{\lambda_j \Delta t}{c_j \rho_j \Delta x_{j+1}^2} \\ \frac{\lambda_j \Delta t}{c_j \rho_j \Delta x_j^2} & \left(1 - \frac{\lambda_j \Delta t}{c_j \rho_j \Delta x_{j+1}^2} \right) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где на главной диагонали переходной матрицы размещены доли теплоты, остающейся в течение времени перехода Δt в секции, а на примыкающих к ней диагоналях – доли теплоты, переходящей вниз и вверх по ходу последовательности ячеек. Обобщая полученный результат на произвольную последовательность из m ячеек, изменение теплового состояния цепи можно описать матричным равенством (1). Структура матрицы переходных вероятностей \mathbf{P} имеет вид [8]

$$\mathbf{P} = \{ p_{ij} \} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_{32} & p_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & p_{m-1,m-1} & p_{m-1,m} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & p_{m,m-1} & p_{m,m} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где

$$p_{j+1,j} = \frac{\lambda_j \Delta t}{c_j \rho_j \Delta x^2}; \quad (7)$$

$$p_{j-1,j} = \frac{\lambda_{j-1} \Delta t}{c_j \rho_j \Delta x^2}. \quad (8)$$

Указанные события образуют полную группу событий, суммарная вероятность которых равна единице:

$$p_{j,j} + p_{j+1,j} + p_{j-1,j} = 1. \quad (9)$$

Следовательно, элементы главной диагонали матрицы переходных вероятностей \mathbf{P} имеют вид

$$p_{j,j} = 1 - p_{j+1,j} + p_{j-1,j}. \quad (10)$$

Переходная матрица \mathbf{P} описывает эволюцию аддитивного свойства, подчиненного закону сохранения полного запаса количества теплоты в объеме всех ячеек. Поэтому сумма элементов матрицы в каждом столбце должна быть равна единице, что автоматически обеспечивается равенством (10). Суммы же элементов по строкам в общем случае не равны единицам, что свидетельствует о неравномерности асимптотического распределения запасов теплоты по секциям. Кроме того, ни один из элементов матрицы не должен быть отрицательным, что накладывает ограничение на выбор продолжительности временного перехода Δt , размера ячейки Δx и количества ячеек в каждом слое m_j . При невыполнении этого условия вычислительная процедура оказывается неустойчивой.

Входными данными модели являются:

- число и размер ячеек каждого слоя;
- коэффициенты теплопроводности и теплопередачи материалов каждого слоя;
- плотности и теплоемкости материалов каждого слоя;
- параметры начального внешнего распределения температур;
- значение температуры внутри многослойного тела;
- число временных переходов.

Так как коэффициенты теплопроводности, плотности и теплоемкости материалов каждого слоя являются характеристиками каждой ячейки [9, 10], их удобно представить в матричной форме:

$$\lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \\ \dots \\ \lambda_m^k \end{bmatrix}; \quad (11)$$

$$\rho^k = \begin{bmatrix} \rho_1^k \\ \rho_2^k \\ \dots \\ \rho_m^k \end{bmatrix}; \quad (12)$$

$$c^k = \begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ \dots \\ c_m^k \end{bmatrix}. \quad (13)$$

В реальных условиях прогрева многослойного материала возникает необходимость учета неравномерности подачи наружного тепла. Многослойный материал помещают в печь, и сперва начинается прогрев воздуха с некоторой начальной температуры до требуемой. Пусть по условиям опыта прогрев с начальной температуры до требуемой температуры произошел за 3 часа. Аппроксимируем изменение за это время линейной функцией (рис. 2).

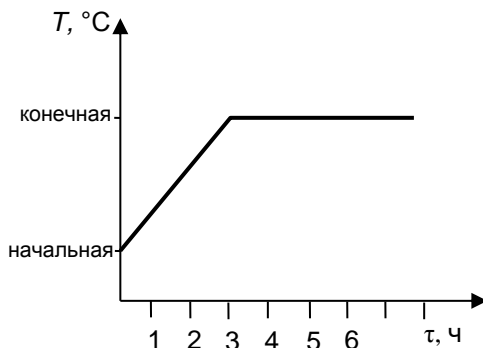


Рис. 2. Нестационарная подача тепла

Так как на разных участках значение температуры в печи описывается различными функциями, представим температуры печи на каждом временном переходе в матричной форме:

$$T_{out1}^k = T_{in1} + k_1 \Delta\tau_1; \quad (14)$$

$$T_{out2}^k = T_{in2} + k_2 \Delta\tau_2, \quad (15)$$

где T_{out1}^k – температура воздуха в печи над верхним слоем материала; T_{out2}^k – температура воздуха в печи под нижним слоем материала; k_1, k_2 – тангенс угла наклона прямой линии; T_{in1}^k, T_{in2}^k – начальные темпера-

туры воздуха в печи над верхним и под нижним слоем.

Для того чтобы воспользоваться основным расчетным равенством (1), необходимо вычислить количество теплоты, передаваемое за один временной переход верхнему ($j=1$) и нижнему ($j=m$) слою.

Для этого воспользуемся формулами:

$$Q_1^{k+1} = Q_1^k + \alpha_1 S (T_{out1}^k - T_1^k) \Delta t; \quad (16)$$

$$Q_m^{k+1} = Q_m^k + \alpha_2 S (T_{out2}^k - T_m^k) \Delta t. \quad (17)$$

где α_1 и α_2 – коэффициенты теплопередачи, так как модель базируется на одномерной цепи $S=1$.

В соотношения (16) и (17) входят значения температур наружных ячеек на каждом временном переходе. Поэтому необходимо уточнение значения температур ячеек на каждом временном переходе. Вектор температур рассчитаем по формуле

$$T_j^k = \frac{Q_j^k}{c_j \rho_j \Delta x_j}. \quad (18)$$

Следует отметить, что при стационарной подаче наружного тепла температуры T_{out1}^k, T_{out2}^k имеют постоянное значение, а при нестационарной – значение температуры рассчитывается согласно (14) и (15).

Результаты исследования. Анализ работы модели проводился на примере трехслойного теплоизоляционного материала. Первый и третий слой – бетон с плотностью $\gamma = 2350 \text{ кг/м}^3$, теплоемкостью $c = 470 \text{ Дж/К}\cdot\text{кг}$, коэффициентом теплопроводности $\lambda = 1,5 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$. Второй слой – пенопласт с плотностью $\gamma = 100 \text{ кг/м}^3$, теплоемкостью $c = 1650 \text{ Дж/К}\cdot\text{кг}$, коэффициентом теплопроводности $\lambda = 0,05 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$. Высота первого слоя – 120 мм, высота второго слоя – 150 мм, высота третьего слоя – 80 мм.

Параметрами модели являются: временной переход Δt , размер ячейки Δx ; количество ячеек в каждом слое m_1, m_2, m_3 ; коэффициенты теплопередачи α_1 и α_2 , зависящие от способа нагрева наружных поверхностей.

Качество описания моделью реального процесса без учета нестационарности внешнего прогрева иллюстрирует рис. 3.

Рис. 4 иллюстрирует эволюцию прогрева трехслойного материала при неограниченном временном росте с шагом по ко-

личеству временных переходов $k = 2400$, что соответствует двум часам. Т. е. нижняя кривая – распределение температур через 2 часа, следующая кривая выше – через 4 часа и т.д. При неограниченном росте времени температура материала выравнивается с температурой наружной среды.

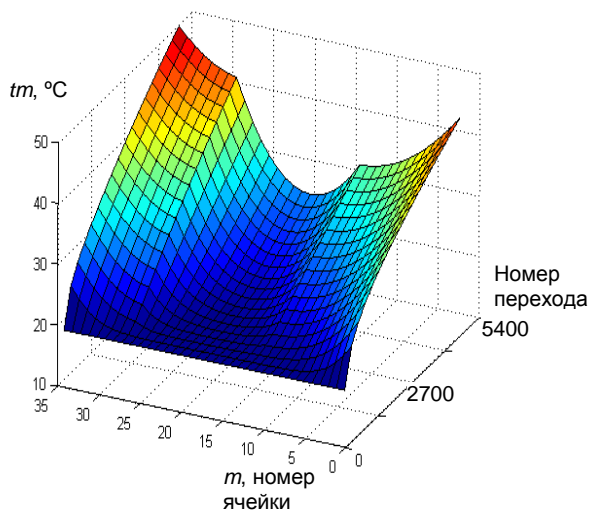


Рис. 3. Эволюция прогрева трехслойного материала за 4,5 часа: количество ячеек в слоях – $m_1 = 12$, $m_2 = 15$, $m_3 = 8$; начальная температура материала – $18\text{ }^\circ\text{C}$; наружная температура – $100\text{ }^\circ\text{C}$; время перехода – $\Delta t = 3\text{ с}$; размер ячейки – $\Delta x = 0,01\text{ м}$

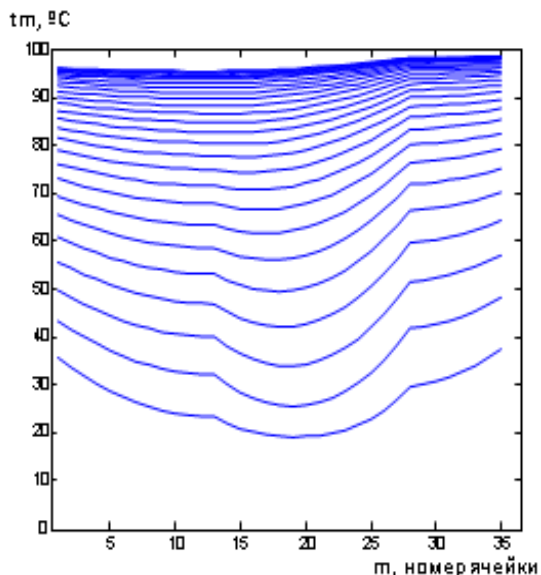


Рис. 4. Эволюция прогрева трехслойного материала при неограниченном временном росте: количество ячеек в слоях – $m_1 = 12$, $m_2 = 15$, $m_3 = 8$; начальная температура материала – $18\text{ }^\circ\text{C}$; наружная температура – $100\text{ }^\circ\text{C}$; время перехода – $\Delta t = 3\text{ с}$; размер ячейки – $\Delta x = 0,01\text{ м}$

При учете нестационарности подачи внешней температуры результат численного эксперимента приведен на рис. 5.

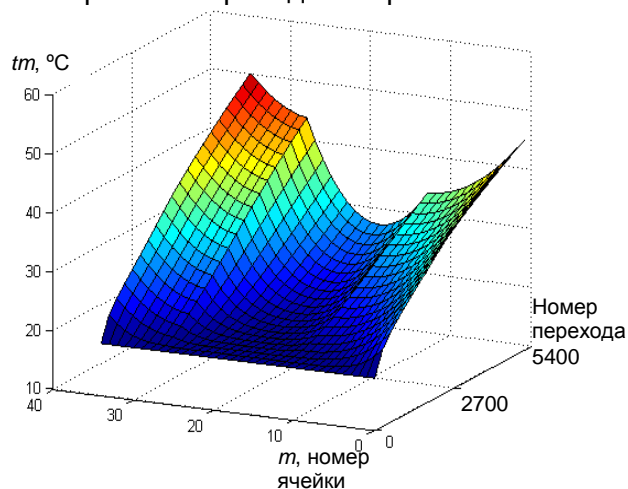


Рис. 5. Эволюция прогрева трехслойного материала с учетом неравномерного наружного прогрева: количество ячеек в слоях – $m_1 = 12$, $m_2 = 15$, $m_3 = 8$; начальная температура материала – $18\text{ }^\circ\text{C}$; наружная температура – $100\text{ }^\circ\text{C}$; время перехода – $\Delta t = 3\text{ с}$; размер ячейки – $\Delta x = 0,01\text{ м}$

Выводы. Сопоставление экспериментальных данных и данных расчета с помощью модели приведено на рис. 6, где точками показаны значения температур, измеренных с помощью термопар через 3 часа после помещения материала в печь и через 6 часов. Начальная температура воздуха в печи – $70\text{ }^\circ\text{C}$. Время прогрева температуры печи до $100\text{ }^\circ\text{C}$ составило 2 часа.

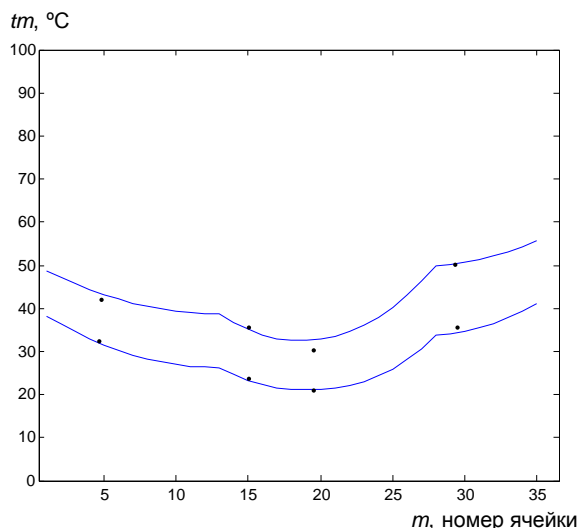


Рис. 6. Сопоставление экспериментальных данных и данных расчета с помощью модели: количество ячеек в слоях – $m_1 = 12$, $m_2 = 15$, $m_3 = 8$; начальная температура материала – $18\text{ }^\circ\text{C}$; наружная температура – $100\text{ }^\circ\text{C}$; время перехода – $\Delta t = 3\text{ с}$; размер ячейки – $\Delta x = 0,01\text{ м}$

Таким образом, на основе однородной марковской цепи построена модель расчета нестационарного теплообмена в многослойной среде, а сопоставление результатов расчетных и экспериментальных исследований показало возможность адекватного описания моделью экспериментальных данных.

Новизна модели заключается в возможности прогнозирования тепловых состояний многослойных сред и в переходе на ее основе к оптимизации тепловых режимов при различных технических или экономических целевых функциях.

Список литературы

1. **Федосов С.В.** Теплоперенос в технологических процессах строительной индустрии. – Иваново: ИПК «ПрессСто», 2010. – 264 с.
2. **Мирам А.О., Павленко В.А.** Техническая термодинамика. Теплообмен: учебник. – М.: АСВ, 2016. – 352 с.
3. **Kong F., Zhang Q.** Effect of heat and mass coupled transfer combined with freezing process on building exterior envelope // *Energy and Buildings*. – 2013. – No. 62. – P. 486–495.
4. **Lü X., Lu T., Viljanen M.** A new analytical method to simulate heat transfer process in buildings // *Appl. Therm. Eng.* – 2006. – No. 26. – P. 1901–1909.
5. **Aguilar F., Solano J.P., Vicente P.G.** Transient modeling of High-inertial thermal bridges in buildings using the equivalent thermal wall method // *Appl. Therm. Eng.* – 2014. – No. 67. – P. 370–377.
6. **Maestrel I.R., Cubillas P.R., Pérez-Lombard R.** Transient heat conduction in multi-layer walls: An efficient strategy for Laplace's method // *Energy and Buildings*. – 2010. – No. 42. – P. 541–546.
7. **Simplified** state space representation for evaluating thermal bridges in building: Modelling, application and validation of a methodology / F. Ascione, N. Bianco, R.F. De Masi, et. al. // *Appl. Therm. Eng.* – 2013. – No. 61. – P. 344–354.
8. **Мизонов В.Е., Елин Н.Н., Баранцева Е.А.** Моделирование и оптимизация теплового состояния в секционированных объемах с внутренними источниками тепла / ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2010. – 128 с.
9. **Бобков С.П.** Моделирование основных процессов переноса с использованием систем клеточных автоматов // *Известия вузов. Химия и химическая технология*. – 2009. – Т. 52, вып. 3. – С. 109–114.
10. **Бобков С.П., Войтко Ю.В.** Использование систем клеточных автоматов для моделирования нелинейных задач теплопроводности // *Известия вузов. Химия и химическая технология*. – 2009. – Т. 52, вып. 11. – С. 126–128.

References

1. Fedosov, S.V. *Teplomassoperenos v tekhnologicheskikh protsessakh stroitel'noy industrii* [Heat and Mass Transfer in Technological Process of Construction Industry]. Ivanovo: IPK «PressSto», 2010. 264 p.
2. Miram, A.O., Pavlenko, V.A. *Tekhnicheskaya termodinamika. Teplomassoobmen* [Engineering Thermodynamics. Heat and Mass Transfer]. Moscow: ASV, 2016. 352 p.
3. Kong, F., Zhang, Q. Effect of heat and mass coupled transfer combined with freezing process on building exterior envelope. *Energy and Buildings*, 2013, no. 62, pp. 486–495.
4. Lü, X., Lu, T., Viljanen, M. A new analytical method to simulate heat transfer process in buildings. *Appl. Therm. Eng.*, 2006, no. 26, pp. 1901–1909.
5. Aguilar, F., Solano, J.P., Vicente, P.G. Transient modeling of High-inertial thermal bridges in buildings using the equivalent thermal wall method. *Appl. Therm. Eng.*, 2014, no. 67, pp. 370–377.
6. Maestrel, I.R., Cubillas, P.R., Pérez-Lombard, R. Transient heat conduction in multi-layer walls: An efficient strategy for Laplace's method. *Energy and Buildings*, 2010, no. 42, pp. 541–546.
7. Ascione, F., Bianco, N., De Masi, R.F., De' Rossi, R., Vanoli, G.P. Simplified state space representation for evaluating thermal bridges in building: Modelling, application and validation of a methodology. *Appl. Therm. Eng.*, 2013, no. 61, pp. 344–354.
8. Mizonov, V.E., Elin, N.N., Barantseva, E.A. *Modelirovanie i optimizatsiya teplovogo sostoyaniya v sektionirovannykh ob'emakh s vnutrennimi istochnikami tepla* [Simulation and optimization of heat condition in sectionalized units with internal sources]. Ivanovo, 2010. 128 p.
9. Bobkov, S.P. Modelirovanie osnovnykh protsessov perenosa s ispol'zovanie sistem kletochnykh avtomatov [Simulation of key transfer processes using cellular automaton systems]. *Izvestiya vuzov. Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya*, 2009, vol. 52, issue 3, pp. 109–114.
10. Bobkov, S.P., Voytko, Yu.V. Ispol'zovanie sistem kletochnykh avtomatov dlya modelirovaniya nelineynykh zadach teploprovodnosti [Application of cellular automaton systems for simulation of nonlinear problems of thermal conductivity]. *Izvestiya vuzov. Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya*, 2009, vol. 52, issue 11, pp. 126–128.