

ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКА

УДК 621.314.225

Дмитрий Юрьевич Вихарев

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», ассистент кафедры автоматического управления электроэнергетическими системами, Россия, Иваново, e-mail: dvikhareff@yandex.ru

Андрей Юрьевич Мурзин

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», кандидат технических наук, декан электроэнергетического факультета, Россия, Иваново, e-mail: murzin-64@mail.ru

Никита Андреевич Родин

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», старший преподаватель кафедры автоматического управления электроэнергетическими системами, Россия, Иваново, e-mail: nikita_iv_96@mail.ru

Аналитический расчет собственной индуктивности вторичной обмотки трансформатора тока с тороидальным магнитопроводом

Авторское резюме

Состояние вопроса. Исследование установившихся и переходных процессов в трансформаторах тока основано на составлении схемы замещения и расчете ее параметров. Одним из элементов схемы замещения является индуктивность рассеяния вторичной обмотки, значение которой главным образом определяется степенью равномерности намотки. Результаты исследований, а также справочные данные указывают на необходимость учета индуктивности рассеяния при выполнении инженерных расчетов. В настоящее время индуктивность рассеяния определяются экспериментальным способом. Существующие аналитические методы расчета этого параметра не могут быть применены для получения точных результатов в силу предположения о равномерности намотки вторичной обмотки при расчете ее собственной индуктивности. Таким образом, разработка способа аналитического расчета собственной индуктивности вторичной обмотки с учетом степени ее равномерности является актуальной задачей.

Материалы и методы. Для определения индуктивности рассеяния использованы методы математического моделирования электрических цепей. Аналитические выражения для расчета собственной индуктивности вторичной обмотки основаны на применении векторного потенциала магнитного поля. Для преобразования полученных выражений к итоговому виду использованы методы векторного анализа.

Результаты. Сформулировано аналитическое выражение для расчета собственной индуктивности вторичной обмотки трансформатора тока с учетом степени ее равномерности. Проведена верификация расчетных выражений на основе результатов эксперимента с применением тороидальной обмотки с регулируемым углом сектора ее намотки.

Выводы. Полученные в ходе исследования аналитические выражения могут быть использованы для расчета индуктивности рассеяния вторичной обмотки трансформатора тока и составления его схемы замещения.

Ключевые слова: трансформатора тока, индуктивность рассеяния, собственная индуктивность, векторный потенциал

Dmitry Yurievich Vikharev

Ivanovo State Power Engineering University, Teaching Assistant of Automatic Control of Electrical Power Systems Department, Russia, Ivanovo, e-mail: dvikhareff@yandex.ru

Andrey Yurievich Murzin

Ivanovo State Power Engineering University, Candidate of Engineering Sciences (PhD), Dean of Electrical Power Engineering Department, Russia, Ivanovo, e-mail: murzin-64@mail.ru

Nikita Andreevich Rodin

Ivanovo State Power Engineering University, Senior Lecturer of Automatic Control of Electrical Power Systems Department, Russia, Ivanovo, e-mail: nikita_iv_96@mail.ru

Analytical calculation of self-Inductance of the secondary winding of a current transformer with a toroidal magnetic core

Abstract

Background. The study of steady-state and transient processes in current transformers relies on constructing an equivalent circuit and calculating its parameters. One of the elements of the equivalent circuit is the leakage inductance of the secondary winding. Its value is primarily determined by the degree of the uniformity of the winding. The research results, as well as reference data indicate the necessity to take into account leakage inductance during engineering calculations. Currently, leakage inductance is determined experimentally. Existing analytical methods to calculate this parameter cannot be applied to obtain accurate results due to the assumption of uniformity of the winding when calculating the self-inductance of the secondary winding. Thus, to develop a method for analytical calculation of the self-inductance of the secondary winding considering the degree of its uniformity is an urgent task.

Materials and methods. To determine the leakage inductance, methods of mathematical modeling of electrical circuits have been used. The analytical expressions to calculate self-inductance of the secondary winding are based on the use of the magnetic vector potential. Methods of vector analysis have been applied to transform the derived expressions into their final form.

Results. The authors have formulated an analytical expression to calculate the self-inductance of the secondary winding of a current transformer considering the degree of the uniformity of the winding. The calculated expressions have been verified based on the experimental results obtained with a toroidal winding with an adjustable sector angle of the winding.

Conclusions. The analytical expressions obtained during the study can be used to calculate the leakage inductance of the secondary winding of a current transformer and to construct its equivalent circuit.

Key words: current transformer, leakage inductance, self-inductance, magnetic vector potential

DOI: 10.17588/2072-2672.2026.1.049-058

Состояние вопроса. Электромагнитные трансформаторы тока с тороидальным магнитопроводом (ТТ) широко применяются для измерения тока в электрических цепях напряжением от 0,4 до 750 кВ. Исследование установившихся и переходных процессов в ТТ проводится с помощью схемы замещения, детально описанной в [1]. Одним из ее основных параметров является индуктивность рассеяния вторичной обмотки $L_{\sigma 2}$, значение которой зависит от степени равномерности намотки обмотки. В соответствии с нормативно-технической документацией [2], значение индуктивности $L_{\sigma 2}$ должно быть указано в паспорте ТТ с классом точности 5PR, 10PR, TPY, TPZ. Индуктивность рассеяния используется для расчета сопротивления вторичной цепи ТТ при определении времени до насыщения магнитопровода в переходных режимах электроэнергетических систем (ЭЭС) [3], а также при выборе типа ТТ на стадии проектирования [4, 5]. Техническое обслуживание ТТ также проводится с использованием $L_{\sigma 2}$ при определении параметров рабочей точки характеристики

намагничивания [2]. Значением индуктивности рассеяния в большинстве инженерных расчетов для современных ТТ можно пренебречь по причине ее малого значения [2, 6]. Однако в справочных материалах содержится информация о значении $L_{\sigma 2}$, сопоставимом с омическим сопротивлением вторичной обмотки R_2 [1]. Это может быть обусловлено неравномерной намоткой вторичной обмотки как фазных ТТ [6], так и ТТ нулевой последовательности [7]. Исследования [8] показывают, что неучет $L_{\sigma 2}$ при расчете времени до насыщения ТТ может привести к существенному изменению полученных результатов и, как следствие, неправильному выводу о его пригодности к работе в переходных режимах ЭЭС. Таким образом, индуктивность рассеяния вторичной обмотки может оказывать существенное влияние на работу ТТ.

Значение индуктивности $L_{\sigma 2}$ возможно определить экспериментальным способом на основе регулировки угловой погрешности ТТ при заданных первичном и вторичном токах [9]. Этот способ может быть использован для идентификации

параметров ТТ при его техническом обслуживании. На стадии разработки, а также при расчете параметров ТТ, находящегося в эксплуатации, могут применяться аналитические способы, основанные на определении индуктивности рассеяния в схеме замещения. Известно, что индуктивность $L_{\sigma 2}$ рассчитывается по выражению

$$L_{\sigma 2} = L_2 - n_{\text{ном}} M_{12}, \quad (1)$$

где L_2 – индуктивность вторичной обмотки ТТ; $n_{\text{ном}}$ – номинальный коэффициент трансформации ТТ; M_{12} – коэффициент взаимной индукции между первичной и вторичной обмотками.

Значение индуктивности рассеяния не зависит от степени насыщения магнитопровода [9]. По этой причине значения L_2 , M_{12} могут быть рассчитаны для первичной и вторичной обмоток, расположенных в вакууме. Известные аналитические выражения для определения индуктивности L_2 и коэффициента взаимной индукции M_{12} детально описаны в [10]. При использовании известных расчетных выражений индуктивность $L_{\sigma 2}$ имеет нулевое значение. Это обусловлено тем, что индуктивность L_2 зависит от степени равномерности намотки вторичной обмотки, что не учитывается при ее расчете. По этой причине разработка аналитического способа определения индуктивности вторичной обмотки L_2 , учитывающего описанное свойство, является актуальной задачей.

Материалы и методы. В справочных материалах представлены аналитические выражения для расчета индуктивности тороидальной обмотки L_2 и коэффициента взаимной индукции M_{12} . Выражения основаны на допущении о равномерности намотки и имеют следующий вид [10]:

$$L_2 = \frac{\mu_0 w_2^2 d}{2\pi} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right); \quad (2)$$

$$M_{12} = \frac{\mu_0 w_1 w_2 d}{2\pi} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right), \quad (3)$$

где μ_0 – магнитная постоянная в системе СИ; w_1 , w_2 – число витков первичной и вторичной обмоток соответственно; d – высота магнитопровода; R_1 , R_2 – внутренний и внешний радиусы магнитопровода.

Используя понятие коэффициента трансформации $n_{\text{ном}} = w_2/w_1$, можно определить, что индуктивность рассеяния, рассчитанная по выражению (1), имеет нулевое значение:

$$L_{\sigma 2} = \left(\frac{\mu_0 w_2^2 d}{2\pi} - \frac{w_2}{w_1} \frac{\mu_0 w_1 w_2 d}{2\pi} \right) \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) = 0. \quad (4)$$

Значение коэффициента взаимной индукции не зависит от расположения витков вторичной обмотки. Это обусловлено тем, что магнитное поле, создаваемое первичной обмоткой, является осесимметричным. В связи с этим

выражение (3) может быть использовано для расчета индуктивности рассеяния. Магнитное поле, создаваемое тороидальной обмоткой, в общем случае не является осесимметричным. По этой причине индуктивность вторичной обмотки L_2 не может быть рассчитана по выражению (2) для определения параметров схемы замещения ТТ.

Для расчета собственной индуктивности тороидальной обмотки предлагается использовать понятие векторного потенциала магнитного поля. Его применение для определения потокосцеплений витков катушки имеет ряд преимуществ, детально описанных в [11]: простота математических выкладок при формулировке конечного вида расчетного выражения; возможность использования меньшего объема вычислительных мощностей при расчете определенных интегралов по сравнению с другими методами. Выражение для векторного потенциала, создаваемого элементом проводника с током, с учетом калибровки для решения задач магнитостатики имеет вид [12]

$$\vec{dA} = \frac{\mu_0 I \vec{dl}}{4\pi r}, \quad (5)$$

где \vec{dA} – векторный потенциал магнитного поля, создаваемого элементом бесконечно тонкого проводника с током $I \vec{dl}$; μ_0 – магнитная постоянная в системе СИ; I – сила тока, протекающего через элемент бесконечно тонкого проводника; r – расстояние от элемента бесконечно тонкого проводника с током до точки, в которой производится расчет векторного потенциала \vec{dA} .

При формулировке итоговых выражений для расчета векторного потенциала и магнитного потока через отдельные витки принимается упрощение в части геометрической конфигурации тороидальной катушки. Это упрощение заключается в представлении тороидальной катушки как совокупности короткозамкнутых витков прямоугольной формы, располагающихся в осевых сечениях тороидального магнитопровода. В таком случае для расчета магнитных потоков используется выражение, содержащее циркуляцию векторного потенциала магнитного поля [13]:

$$\Phi = \oint_l \vec{A} \cdot \vec{dl}, \quad (6)$$

где Φ – магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром l ; \vec{A} – векторный потенциал магнитного поля; l – замкнутый контур для вычисления циркуляции; \vec{dl} – элемент длины контура интегрирования l .

Представление катушки в виде совокупности отдельных друг от друга короткозамкнутых витков позволяет ввести следующее выражение для потокосцепления катушки с учетом принципа суперпозиции магнитных полей:

$$\Psi = \sum_i \left(\sum_j \Phi_{ij} \right), \quad (7)$$

где i – порядковый номер витка катушки, для которой выполняется расчет потокоцепления Ψ ; j – порядковый номер витка катушки, которая создает магнитное поле, обуславливающее потокоцепление Ψ (при расчете собственного потокоцепления катушки множества i -х и j -х витков совпадают); Φ_{ij} – магнитный поток, созданный электрическим током j -го витка, через контур i -го витка.

Задачу о расчете собственной индуктивности тороидальной обмотки предлагается решить в условиях равномерного распределения плотности электрического тока в сечении проводника обмотки, т. е. при протекании силы тока низкой частоты. Такое упрощение физической модели исследуемого объекта обусловлено значением частоты изменения электрических параметров промышленных электрических сетей, при котором влиянием поверхностного эффекта можно пренебречь.

Формулировка принципа расчета потокоцепления, согласно выражению (7), указывает на необходимость определения векторного потенциала магнитного поля, созданного отдельным витком катушки. Для расчета магнитных потоков, входящих в состав выражения (7), требуется решить задачу об определении векторного потенциала \vec{A} , созданного прямоугольной рамкой из бесконечно тонкого проводника с током. Результаты решения такой задачи могут быть распространены и на витки с заданной формой сечения проводника [11]. Прямоугольная рамка с током, создающая векторный потенциал \vec{A} в пространстве, изображена на рис. 1.

Согласно выражению (5) и принципу суперпозиции магнитных полей, для определения векторного потенциала \vec{A} , созданного прямоугольной рамкой, необходимо произвести векторное суммирование элементарных векторных потенциалов $d\vec{A}$, созданных бесконечно малыми элементами длины проводника с током $d\vec{l}$.

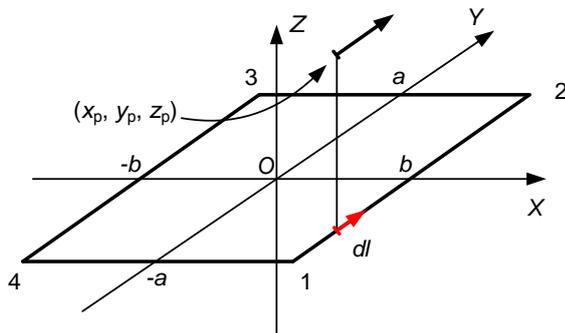


Рис. 1. Схема расположения прямоугольной рамки из бесконечно тонкого проводника с током

Предел такой векторной суммы при устремлении модуля $d\vec{l}$ к нулю равен криволинейному интегралу следующего вида:

$$\vec{A} = \oint_l \vec{dA}, \quad (8)$$

где l – контур прямоугольной рамки с током.

Стоит отметить, что результатом вычисления криволинейного интеграла, входящего в состав выражения (8), является вектор. Расчет интеграла такого вида может быть произведен с помощью криволинейного интеграла второго рода с учетом выражения (5) следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\vec{i} \oint \frac{dx}{r} + \vec{j} \oint \frac{dy}{r} + \vec{k} \oint \frac{dz}{r} \right) = \\ &= \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы, образующие ортонормированный базис; A_x, A_y, A_z – функции, определяющие ортогональные составляющие векторного потенциала \vec{A} .

При расположении прямоугольной рамки в плоскости XOY (см. рис. 1) координата z каждого элемента с током $d\vec{l}$ не изменяется, следовательно, результат вычисления криволинейного интеграла по этой координате равен нулю. Расчет оставшихся криволинейных интегралов по замкнутому контуру l можно упростить аналогичным способом. Так как значение координаты x элемента с током $d\vec{l}$ не изменяется на участках 1–2 и 3–4, а координаты y – на участках 4–1 и 2–3, результат вычисления соответствующих интегралов по этим контурам равен нулю. С учетом описанных свойств контура l расчетное выражение для векторного потенциала \vec{A} примет следующий вид:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\vec{i} \left[\int_{l_{4-1}} \frac{dx}{r} + \int_{l_{2-3}} \frac{dx}{r} \right] + \vec{j} \left[\int_{l_{1-2}} \frac{dy}{r} + \int_{l_{3-4}} \frac{dy}{r} \right] \right). \quad (10)$$

Путем преобразования интегралов в выражении (10) определяются ортогональные составляющие векторного потенциала \vec{A} .

Для упрощения итоговой записи введем следующие функции:

$$\begin{aligned} \alpha_x(q_p, a, b) &= \\ &= (b - x_p) + \sqrt{(b - x_p)^2 + (a - y_p)^2 + z_p^2}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \alpha_y(q_p, a, b) &= \\ &= (a - y_p) + \sqrt{(b - x_p)^2 + (a - y_p)^2 + z_p^2}; \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда итоговые выражения для ортогональных составляющих векторного потенциала \vec{A} примут вид:

$$\begin{aligned} A_x(q_p, a, b, l) &= \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[\frac{\alpha_x(q_p, -a, b) \alpha_x(q_p, a, -b)}{\alpha_x(q_p, -a, -b) \alpha_x(q_p, a, b)} \right]; \end{aligned} \quad (13)$$

$$A_y(q_p, a, b, l) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[\frac{\alpha_y(q_p, a, b) \alpha_y(q_p, -a, -b)}{\alpha_y(q_p, -a, b) \alpha_y(q_p, a, -b)} \right]; \quad (14)$$

$$A_z(q_p, a, b, l) = 0. \quad (15)$$

Формулы (13)–(15) могут быть использованы как для расчета собственной индуктивности витка с учетом формы сечения проводника, так и для расчета коэффициентов взаимной индукции между отдельными витками.

При определении собственного потокосцепления прямоугольной рамки из провода с заданной формой сечения возникает задача о расчете магнитных потоков двух прямоугольных рамок, расположенных в параллельных плоскостях. Система, состоящая из двух прямоугольных рамок, расположенных в параллельных плоскостях, изображена на рис. 2.

Подстрочный индекс 1 у наименований геометрических размеров и координат обозначает прямоугольную рамку, через которую рассчитывается магнитный поток, а подстрочный индекс 2 – рамку, которая создает магнитное поле.

В соответствии с выражением (6), магнитный поток определяется циркуляцией векторного потенциала \vec{A} :

$$\Phi_1 = \oint_{l_1} A_x dx + \oint_{l_1} A_y dy + \oint_{l_1} A_z dz, \quad (16)$$

где l_1 – контур прямоугольной рамки, через которую рассчитывается магнитный поток Φ_1 ; A_x, A_y, A_z – ортогональные составляющие векторного потенциала \vec{A} , определяющиеся выражениями (13)–(15).

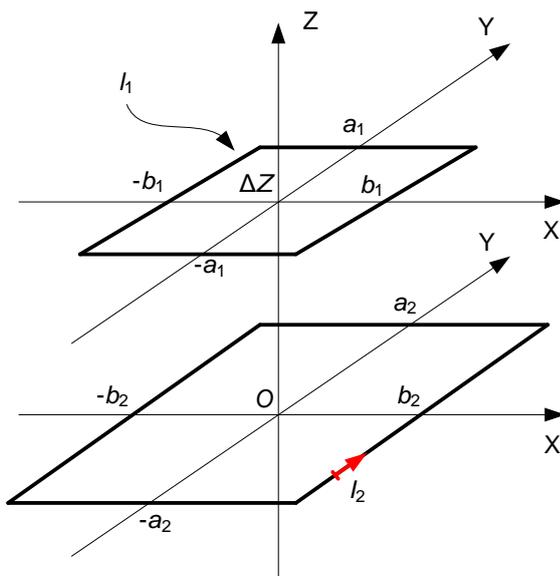


Рис. 2. Схема системы, состоящей из двух прямоугольных рамок, расположенных в параллельных плоскостях

Выражение (16) может быть приведено к итоговому виду с применением вспомогательных матриц U и V :

$$U(a_1, b_1, a_2, b_2, \Delta Z, l_2) = \begin{bmatrix} -(b_1 - b_2) A_x(b_1, a_2, \Delta Z, a_1, b_2, l_2) \\ -(b_1 + b_2) A_x(-b_1, a_2, \Delta Z, a_1, b_2, l_2) \\ -2b_2 A_x(b_2, a_2, \Delta Z, a_1, b_1, l_2) \\ (a_1 - a_2) A_y(b_2, a_1, \Delta Z, a_2, b_1, l_2) \\ (a_1 + a_2) A_y(b_2, -a_1, \Delta Z, a_2, b_1, l_2) \\ 2a_2 A_y(b_2, a_2, \Delta Z, a_1, b_1, l_2) \end{bmatrix}; \quad (17)$$

$$V(a_1, b_1, a_2, b_2, \Delta Z) = \begin{bmatrix} \alpha_x(b_1, -a_1, \Delta Z, b_2, -a_2) \\ -\alpha_x(b_1, a_1, \Delta Z, b_2, -a_2) \\ \alpha_x(b_1, a_1, \Delta Z, -b_2, -a_2) \\ -\alpha_x(b_1, -a_1, \Delta Z, -b_2, -a_2) \end{bmatrix}; \quad (18)$$

где l_2 – сила тока, протекающего по прямоугольной рамке, расположенной в плоскости XOY .

Итоговое выражение для вычисления магнитного потока через прямоугольную рамку имеет вид

$$\Phi_1 = 2 \left(\sum_{n=1}^6 U_n + \frac{\mu_0 I_2}{\pi} \sum_{k=1}^4 V_k \right), \quad (19)$$

где n и k – порядковый номер строки в векторах U и V соответственно.

Выражение (19) может быть использовано для определения потокосцепления прямоугольной рамки из проводника с заданным сечением, а также для расчета коэффициента взаимной индукции двух прямоугольных рамок, расположенных в параллельных плоскостях.

При равномерном распределении плотности тока по сечению проводника потокосцепление витка определяется, согласно [10], следующим выражением:

$$\Psi = \frac{1}{S_{\text{пр}}} \int_S \Phi dS, \quad (20)$$

где Ψ – потокосцепление витка с магнитным полем, которое создано протекающим по нему электрическим током; Φ – магнитный поток через бесконечно тонкий контур, соответствующий определенному элементу сечения dS ; $S_{\text{пр}}$ – площадь сечения проводника, образующего виток; S – поверхность, образованная сечением проводника.

Выражение (20) определяет среднее значение магнитного потока Φ по сечению проводника.

Для определения магнитного потока Φ , входящего в состав выражения (20), необходимо представить объемную прямоугольную рамку совокупностью бесконечно тонких прямоугольных контуров с током dI . Магнитный поток Φ через

отдельный контур может быть определен на основе принципа суперпозиции магнитных полей:

$$\Phi = \int_S d\Phi(dl), \quad (21)$$

где $d\Phi$ – элементарный магнитный поток, созданный током dl .

Магнитный поток, определяемый выражением (19), линейно зависит от силы тока, поэтому может быть введено понятие удельного потока Φ' .

В этом случае элементарный поток может быть определен как

$$d\Phi = \Phi' dl. \quad (22)$$

При равномерном распределении плотности тока по сечению проводника элементарный ток dl может быть определен как

$$dl = j dS = \frac{I}{S_{\text{пр}}} dS, \quad (23)$$

где j – модуль вектора плотности тока; dS – площадь элемента сечения проводника; I – сила тока, протекающего в объемном проводнике рассматриваемой прямоугольной рамки.

С учетом (21), (22) выражение (23) примет вид

$$\begin{aligned} \Phi(a_1, b_1, I) = \\ = \frac{I}{S_{\text{пр}}} \int_S \Phi(a_1, b_1, a_2(S), b_2(S), \Delta z(S)) dS, \end{aligned} \quad (24)$$

где a_1, b_1 – геометрические параметры прямоугольной рамки, через которую рассчитывается магнитный поток Φ ; $a_2(S), b_2(S)$ – геометрические параметры прямоугольной рамки, создающей магнитное поле (значение параметров зависит от положения элемента dS); $\Delta z(S)$ – расстояние между плоскостями, в которых располагаются прямоугольные рамки (значение параметра зависит от положения элемента dS).

Собственная индуктивность объемной прямоугольной рамки определяется следующим выражением с учетом формул (20), (24):

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{1}{S_{\text{пр}}^2} \iint_S \left(\int_S \Phi'(Q(S_1, S_2)) dS_2 \right) dS_1; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} Q(S_1, S_2) \equiv \\ \equiv (a_1(S_1), b_1(S_1), a_2(S_2), b_2(S_2), \Delta z(S_1, S_2)), \end{aligned} \quad (26)$$

где $Q(S_1, S_2)$ – совокупность параметров, от которых зависит функция Φ' ; $a_1(S_1), b_1(S_1)$ – геометрические параметры прямоугольной рамки, через которую рассчитывается магнитный поток в соответствии с выражением (24) (значение параметров зависит от положения элемента dS_1); $a_2(S_2), b_2(S_2)$ – геометрические параметры прямоугольной рамки, создающей магнитное поле (значение параметров зависит от положения элемента dS_2); $\Delta z(S_1, S_2)$ – расстояние между плоскостями, в которых располагаются

прямоугольные рамки (значение параметра зависит от положений элементов dS_1, dS_2).

При расчете собственной индуктивности прямоугольной рамки из провода круглого сечения поверхностные интегралы, входящие в состав выражений (25) и (26), могут быть выражены с помощью кратных определенных интегралов:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{S_{\text{пр}}^2} \times \\ \times \int_{-R_{\text{пр}}}^{R_{\text{пр}}} \int_{-\sqrt{R_{\text{пр}}^2 - z_1^2}}^{\sqrt{R_{\text{пр}}^2 - z_1^2}} \left(\int_{-R_{\text{пр}}}^{R_{\text{пр}}} \int_{-\sqrt{R_{\text{пр}}^2 - z_2^2}}^{\sqrt{R_{\text{пр}}^2 - z_2^2}} \Phi'(Q(x_1, x_2, z_1, z_2)) dz_2 dx_2 \right) dz_1 dx_1; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, z_1, z_2) \equiv \\ \equiv (a + x_1, b + x_1, a + x_2, b + x_2, z_1 - z_2), \end{aligned} \quad (28)$$

где $Q(x_1, x_2, z_1, z_2)$ – совокупность параметров, от которых зависит функция Φ' ; a, b – геометрические параметры бесконечно тонкой прямоугольной рамки, положение которой соответствует центру сечения проводника.

Выражения (25) и (26) позволяют определить значение индуктивности прямоугольной рамки с учетом формы сечения проводника. Аналитический расчет в этом случае сопряжен с рядом трудностей, обусловленных наличием большого количества определенных интегралов, например как в выражении (27), и сложным видом функции магнитного потока Φ' . Собственная индуктивность L в таком случае может быть рассчитана с помощью численных методов интегрирования.

При определении собственной индуктивности тороидальных катушек возникает задача по расчету коэффициента взаимной индукции двух прямоугольных рамок, расположенных в осевых сечениях тороидальной катушки. Пример расположения таких прямоугольных рамок изображен на рис. 3.

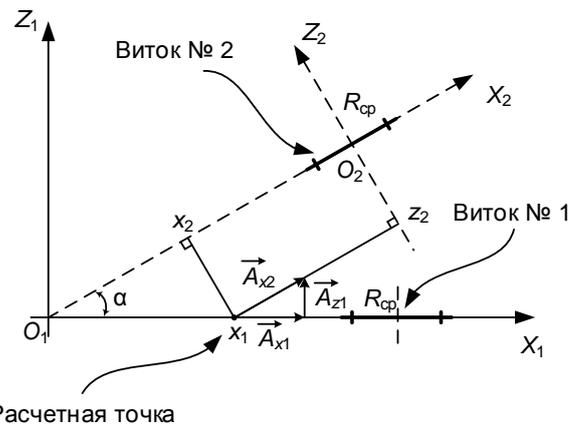


Рис. 3. Схема расположения прямоугольных рамок в осевых сечениях тороидальной катушки

Необходимо отметить, что подстрочный индекс 1 у наименований геометрических размеров и координат соответствует прямоугольной

рамке, через которую рассчитывается магнитный поток, а подстрочный индекс 2 – рамке, которая создает магнитное поле. При формулировке расчетных выражений принимается, что прямоугольные рамки имеют одинаковые размеры a, b .

Магнитный поток через прямоугольную рамку № 1 определяется выражением:

$$\Phi_1 = \oint_{l_1} A_{x1} dx + \oint_{l_1} A_{y1} dy + \oint_{l_1} A_{z1} dz, \quad (29)$$

где A_{x1}, A_{y1}, A_{z1} – ортогональные составляющие векторного потенциала \vec{A} , созданного током рамки № 2, в системе координат, связанной с осью симметрии тороидальной катушки.

Векторный потенциал \vec{A} в системе координат, связанной с витком № 2, описывается функциями A_{x2}, A_{y2}, A_{z2} , которые определяются формулами (13)–(15). Расчетные выражения для ортогональных составляющих A_{x1}, A_{y1}, A_{z1} могут быть получены путем преобразования функций A_{x2}, A_{y2}, A_{z2} . Это преобразование должно учитывать изменение координат расчетной точки и ортогональных составляющих вектора при переходе из одной системы координат в другую.

Расчетные выражения для ортогональных составляющих A_{x1}, A_{y1}, A_{z1} на основе анализа рис. 3 могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_{x1}(x_1, y_1, z_1 = 0) = \\ = A_{x2}(x_2(x_1), y_2(y_1), z_2(x_1)) \cos(\alpha); \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} A_{y1}(x_1, y_1, z_1 = 0) = \\ = A_{y2}(x_2(x_1), y_2(y_1), z_2(x_1)); \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} A_{z1}(x_1, y_1, z_1 = 0) = \\ = A_{z2}(x_2(x_1), y_2(y_1), z_2(x_1)) \sin(\alpha). \end{aligned} \quad (32)$$

Для записи итогового вида выражения для расчета магнитного потока необходимо преобразовать криволинейные интегралы, входящие в состав формулы (29), следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_1(a, b, R_{cp}, \alpha, l) = \int_{-b}^b A_{x1}(x, -a, 0) dx + \int_b^{-b} A_{x1}(x, a, 0) dx + \\ + \int_{-a}^a A_{y1}(b, y, 0) dy + \int_a^{-a} A_{y1}(-b, y, 0) dy. \end{aligned} \quad (33)$$

Согласно [10], коэффициент взаимной индукции определяется следующим выражением:

$$M = \frac{\Phi_1(a, b, R_{cp}, \alpha, l)}{I} = \Phi'_1(a, b, R_{cp}, \alpha). \quad (34)$$

Выражение (34) позволяет определить значение коэффициента взаимной индукции двух прямоугольных рамок, расположенных в осевых сечениях тороидальной катушки. Учет формы сечения проводника в таком расчете не требуется, так как зачастую поперечные размеры проводника намного меньше расстояния между прямоугольными рамками.

Результаты исследования. Согласно [10], собственная индуктивность катушки определяется выражением

$$L = \frac{\Psi}{I}, \quad (35)$$

которое с учетом (7) может быть представлено следующим образом:

$$L = \frac{1}{I} \sum_i \left(\sum_j \Phi_{ij} \right) = \sum_i L_i + \sum_i \left(\sum_j M_{ij} \right), \quad (36)$$

где L_i – собственная индуктивность витка тороидальной катушки, рассчитываемая в соответствии с выражением (27); M_{ij} – коэффициент взаимной индукции между витками тороидальной катушки, рассчитываемый в соответствии с выражением (34) (при вычислении множества i и j совпадают, однако для обеспечения корректности полученного результата коэффициенты взаимной индукции, соответствующие одинаковым значениям переменных i и j , должны быть приняты равными нулю).

Для верификации сформулированных выражений проведен эксперимент с применением тороидальной обмотки. Его суть заключается в измерении собственной индуктивности тороидальной катушки. Для проведения эксперимента была изготовлена тороидальная катушка, обмотка которой имеет ответвления через фиксированное количество витков (рис. 4).

Тороидальная катушка, изготовленная для проведения измерений, имеет следующие параметры:

- внешний диаметр тора 105 мм;
- внутренний диаметр тора 57 мм;
- высота тора 36,5 мм;
- диаметр проводника обмотки 0,8 мм;
- количество секторов намотки 11;
- количество витков в каждом секторе 16 (за исключением последнего сектора, который имеет 19 витков).

Измерение индуктивности секторов тороидальной обмотки осуществлялось с помощью измерителей иммитанса АКТАКОМ АМ-3001, АКТАКОМ АММ-3320 при различных частотах напряжения измерительного сигнала. Результаты измерений представлены в табл. 1.

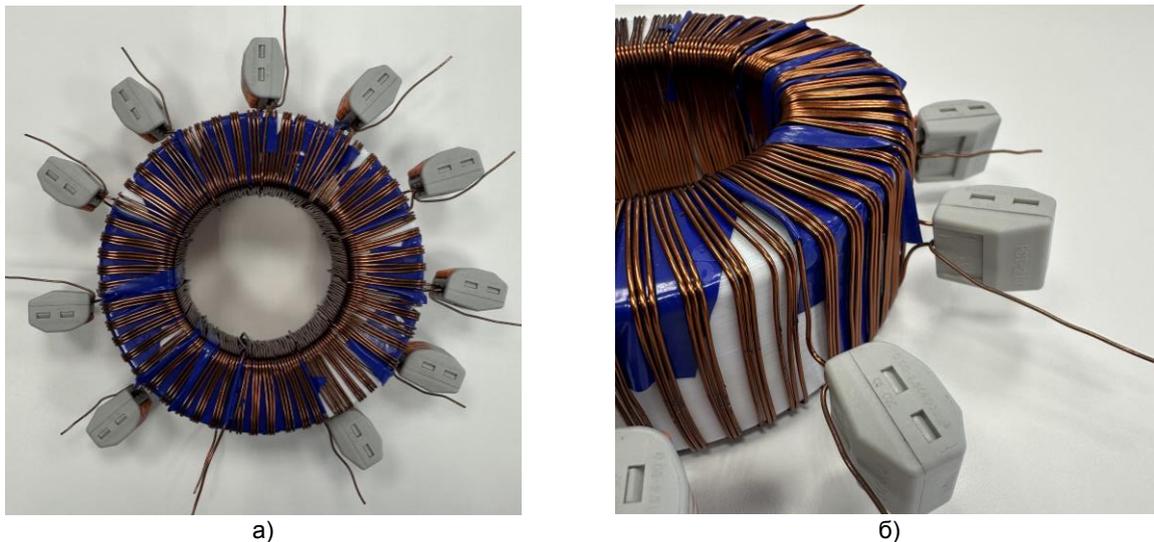


Рис. 4. Тороидальная катушка для проведения испытаний по измерению индуктивности

Таблица 1. Результаты измерений индуктивности секторов тороидальной обмотки

Число витков	Угол сектора катушки, градус	Значение индуктивности сектора тороидальной обмотки, мкГн					
		АКТАКОМ АМ-3001			АКТАКОМ АММ-3320		
		100 Гц	1 кГц	10 кГц	100 Гц	1 кГц	10 кГц
16	32,14	9,25	9,11	9,06	9,00	8,60	8,74
32	64,29	21,88	21,62	21,66	21,00	21,20	21,36
48	96,43	35,30	35,12	35,12	34,00	34,80	34,82
64	128,57	48,59	48,54	48,45	47,00	48,30	48,23
80	160,71	62,69	62,52	62,55	61,00	62,40	62,27
96	192,86	77,09	76,91	76,91	76,00	76,80	76,63
112	225,00	91,10	91,18	91,10	90,00	90,80	90,80
128	257,14	105,70	105,61	105,68	106,00	105,80	105,40
144	289,29	121,40	121,33	121,36	121,00	121,50	121,10
160	321,43	138,10	138,14	138,16	138,00	138,10	138,01
179	360,00	162,12	162,06	162,06	162,00	162,10	162,21

Расчет индуктивности секторов тороидальной катушки с помощью предложенного аналитического метода производится в соответствии с выражением (36). Для определения степени соответствия результатов расчета измеренным значениям используется понятие относительной погрешности:

$$\Delta = \frac{L_{\text{расч}} - L_{\text{изм}}}{L_{\text{изм}}} 100\%, \quad (37)$$

где $L_{\text{расч}}$ – расчетное значение индуктивности в соответствии с выражением (36); $L_{\text{изм}}$ – измеренное значение индуктивности.

Результаты расчета индуктивности секторов тороидальной катушки с помощью предложенной методики и значения относительной погрешности представлены в табл. 2. Значение погрешности Δ приведены для результатов измерений индуктивности на частоте 10 кГц

Таблица 2. Результаты расчета индуктивности обмотки с помощью разных методик и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными

Число витков	Угол сектора катушки, градус	Расчетное значение индуктивности $L_{\text{расч}}$ (выражение (36)), мкГн	Расчетное значение индуктивности $L_{\text{расч(упр)}}$ по упрощенной методике (выражение (2)), мкГн	Относительная погрешность Δ , %			
				АКТАКОМ АМ-3001		АКТАКОМ АММ-3320	
				$\Delta L_{\text{расч}}$	$\Delta L_{\text{расч(упр)}}$	$\Delta L_{\text{расч}}$	$\Delta L_{\text{расч(упр)}}$
16	32,14	8,74	1,27	-3,49	-85,90	0,04	-85,39
32	64,29	21,59	5,11	-0,30	-76,42	1,10	-76,09
48	96,43	35,27	11,49	0,39	-67,29	1,29	-67,00
64	128,57	49,23	20,24	1,62	-57,83	2,08	-57,64
80	160,71	63,33	31,91	1,26	-48,97	1,72	-48,75
96	192,86	77,53	45,96	0,83	-40,23	1,19	-40,02
112	225,00	91,83	62,56	0,80	-31,33	1,14	-31,10
128	257,14	106,25	81,71	0,54	-22,68	0,81	-22,47
144	289,29	120,92	103,42	-0,37	-14,78	-0,15	-14,60
160	321,43	136,23	127,68	-1,40	-7,59	-1,29	-7,48
179	360,00	160,62	159,80	-0,88	-1,40	-0,97	-1,48

В табл. 2 также представлены значения индуктивности, полученные с помощью упрощенного выражения (2), и относительная погрешность полученных результатов.

Согласно полученным данным (табл. 2), максимальное значение относительной погрешности составляет не более 3,5 %. Верификация предложенных аналитических выражений по данным физического эксперимента указывает на возможность их применения в практических расчетах.

Упрощенная методика позволяет получить точные результаты только в случае равномерного распределения обмотки. При намотке обмотки в секторе с углом приблизительно 320 градусов погрешность расчета составляет около 7,5 %.

Выводы. Верификация аналитических выражений с учетом степени равномерности намотки вторичной обмотки на основе результатов физического эксперимента указывает на возможность их применения в целях определения параметров схемы замещения ТТ.

Список литературы

1. **Королев Е.А.** Расчеты допустимых нагрузок в токовых цепях релейной защиты. – М.: Энергия, 1980. – 207 с.
2. **ГОСТ Р 70507.2-2024.** Трансформаторы измерительные. Ч. 2. Технические условия на трансформаторы тока. – М.: Российский институт стандартизации, 2024. – 32 с.
3. **ГОСТ Р 58669-2019.** Единая энергетическая система и изолированно работающие энергосистемы. Релейная защита. Трансформаторы тока измерительные индуктивные с замкнутым магнитопроводом для защиты. Методические указания по определению времени до насыщения при коротких замыканиях. – М.: Стандартинформ, 2020. – 58 с.
4. **ГОСТ Р 71403-2024.** Единая энергетическая система и изолированно работающие энергосистемы. Релейная защита и автоматика. Методические указания по определению параметров электромагнитных трансформаторов тока для обеспечения правильного функционирования релейной защиты в переходных режимах. – М.: Российский институт стандартизации, 2024. – 11 с.
5. **О стандартизации требований к трансформаторам тока и быстродействующим устройствам релейной защиты в переходных режимах коротких замыканий / С.Л. Кужеков, А.А. Дегтярев, Н.А. Дони и др. // Энергоэксперт. – 2022. – № 4(84). – С. 22–30. – EDN ARBRVH.**
6. **Вавин В.Н.** Трансформаторы тока. – М.; Л.: Энергия, 1966. – 105 с.
7. **Сирота И.М.** Трансформаторы и фильтры напряжения и тока нулевой последовательности. – Киев: Наукова думка, 1983. – 267 с.
8. **Разработка методики выбора трансформаторов тока с учетом их работы в переходных режимах / А.А. Яблоков, А.В. Панащатенко, А.С. Лифшиц, А.Е. Петров // Энергетик. – 2024. – № 2. – С. 40–47. – EDN MEBDSR.**
9. **Авторское** свидетельство № 311217 А1 СССР, МПК G01R 27/26. Способ измерения индуктивности

рассеяния обмоток трансформаторов тока: № 1400992/18–10; заявл. 02.02.1970; опубл. 09.08.1971 / И.М. Сирота; заявитель – Институт электродинамики АН Украинской ССР. – EDN GNZAAD.

10. **Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А.** Расчет индуктивностей: Справочная книга. – Л.: Энергия, 1970. – 415 с.

11. **Вихарев Д.Ю., Снитко И.С., Тихонов А.И.** Аналитический расчет индуктивностей рассеяния на основе применения векторного потенциала магнитного поля // Моделирование систем и процессов. – 2021. – Т. 14, № 1. – С. 4–10. DOI: 10.12737/2219-0767-2021-14-1-4-10.

12. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. Т. 2: Теория поля. – М.: Физматлит, 2003. – 536 с.

13. **Говорков В.А., Купалян С.Д.** Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах. – М.: Высш. шк., 1970. – 304 с.

References

1. Korolev, E.A. *Raschety dopustimyykh nagruzok v tokovykh tsepyakh releynoy zashchity* [Calculation of permissible loads in relay protection current circuits]. Moscow: Energiya, 1980. 207 p.
2. GOST R 70507.2-2024. *Transformatory izmeritel'nye. Ch. 2. Tekhnicheskie usloviya na transformatory toka* [Instrument Transformers. Part 2. Technical Specifications for Current Transformers]. Moscow: Rossiyskiy institut standartizatsii, 2024. 32 p.
3. GOST R 58669-2019. *Edinaya energeticheskaya sistema i izolirovanno rabotayushchie energosistemy. Reley'naya zashchita. Transformatory toka izmeritel'nye induktivnye s zamknutym magnitoprovodom dlya zashchity. Metodicheskie ukazaniya po opredeleniyu vremeni do насыshcheniya pri korotkikh замыkaniyakh* [United Power System and Isolated Power Systems. Relay Protection. Inductive Measuring Current Transformers for Protection with a Closed Magnetic Circuit. Methodology Guidelines for Determination of Time to Saturation During Short Circuits]. Moscow: Standartinform, 2020. 58 p.
4. GOST R 71403-2024. *Edinaya energeticheskaya sistema i izolirovanno rabotayushchie energosistemy. Reley'naya zashchita i avtomatika. Metodicheskie ukazaniya po opredeleniyu parametrov elektromagnitnykh transformatorov toka dlya obespecheniya pravil'nogo funktsionirovaniya releynoy zashchity v perekhodnykh rezhimakh* [United Power System and Isolated Power Systems. Relay Protection and Automation. Methodology Guidelines for Determining Parameters of Electromagnetic Current Transformers to Ensure Proper Functioning of Relay Protection in Transient Conditions]. Moscow: Rossiyskiy institut standartizatsii, 2024. 11 p.
5. Kuzhekov, S.L., Degtyarev, A.A., Doni, N.A., Shurupov, A.A., Petrov, D.S. *O standartizatsii trebovaniy k transformatoram toka i bystrodeystvuyushchim ustroystvam releynoy zashchity v perekhodnykh rezhimakh korotkikh замыkaniy* [On Standardization of Requirements for Current Transformers and High-Speed Relay Protection Devices in Transient Short-Circuit Conditions]. *Energoekspert*, 2022, no. 4(84), pp. 22–30. EDN ARBRVH.
6. Vavin, V.N. *Transformatory toka* [Current Transformers]. Moscow; Leningrad: Energiya, 1966. 105 p.
7. Sirota, I.M. *Transformatory i fil'try napryazheniya i toka nulevoy posledovatel'nosti* [Transformers

and Filters for Zero-Sequence Voltage and Current]. Kiev: Naukova dumka, 1983. 267 p.

8. Yablokov, A.A., Panashchatenko, A.V., Lifshits, A.S., Petrov, A.E. Razrabotka metodiki vybora transformatorov toka s uchetom ikh raboty v perekhodnykh rezhimakh [Development of a Methodology for Selecting Current Transformers Considering Their Operation in Transient Conditions]. *Energetik*, 2024, no. 2, pp. 40–47. EDN MEBDSR.

9. Sirota, I.M. *Sposob izmereniya induktivnosti rasseyaniya obmotok transformatorov toka* [A Method for Measuring the Leakage Inductance of Current Transformer Windings]. Avtorskoe svidetelstvo [Inventor's certificate]. No. 311217, 1971. EDN GNZAAD.

10. Kalantarov, P.L., Tseytlin, L.A. *Raschet induktivnostey: spravoch'naya kniga* [Inductance Calculation: Reference Book]. Leningrad: Energiya, 1970. 415 p.

11. Vikharev, D.Yu., Snitko, I.S., Tikhonov, A.I. Analiticheskiy raschet induktivnostey rasseyaniya na osnove primeneniya vektornogo potentsiala magnitnogo polya [Analytical Calculation of Leakage Inductances Based on the Application of the Magnetic Vector Potential]. *Modelirovanie sistem i protsessov*, 2021, vol. 14, no. 1, pp. 4–10. DOI: 10.12737/2219-0767-2021-14-1-4-10.

12. Landau, L.D., Lifshits, E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 2: Teoriya polya* [Theoretical Physics. Vol. 2: Field Theory]. Moscow: Fizmatlit, 2003. 536 p.

13. Govorkov, V.A., Kupalyan, S.D. *Teoriya elektromagnitnogo polya v uprazhneniyakh i zadachakh* [Theory of Electromagnetic Field: Exercises and Problems]. Moscow: Vysshaya shkola, 1970. 304 p.