

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕХНИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

УДК 621.311.22

**Владимир Павлович Жуков**

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45, e-mail: zhukov-home@yandex.ru

**Антон Валерьевич Огурцов**

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45, e-mail: ogurtsovav@mail.ru

**Александр Сергеевич Шмелев**

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», аспирант кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45, e-mail: shml.alx@gmail.com

**Илья Андреевич Кокулин**

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», аспирант кафедры тепловых электрических станций, Россия, Иваново, телефон (4932)26-99-13, e-mail: ilyakokulin@gmail.com

## Моделирование разделения дисперсных сред в многоступенчатой установке с рециркуляцией нецелевых продуктов

### Авторское резюме

**Состояние вопроса.** Процессы разделения сыпучих материалов по крупности зерен широко используются в строительной, химической, обогатительной и энергетической отраслях промышленности. От эффективности процесса классификации часто зависит эффективность производства, в котором используется полученные порошки. В связи с этим повышение качества готовых порошков на основе моделирования и совершенствования технологий их получения представляется актуальной задачей.

**Материалы и методы.** Моделирование процессов классификации в отдельной ступени и в системе классификаторов выполнено с использованием кривой разделения для отдельной ступени и кривой разделения для анализируемой системы аппаратов.

**Результаты.** Построена модель для одного-, двух- и трехрядного расположения ступеней с учетом и без учета рециркуляции нецелевых продуктов разделения. Показано, что организация рециркуляции существенно повышает качество целевых продуктов. На базе полученных решений разработаны рекомендации по повышению эффективности процессов разделения сыпучих материалов в многоступенчатых классифицирующих системах.

**Выводы.** Предложенные алгоритм и метод расчета, позволяют находить оптимальные схемы и режимы работы классифицирующих многоступенчатых установок.

**Ключевые слова:** дисперсные материалы, классификация по крупности, многоступенчатые системы, кривая разделения, рециркуляция промежуточных продуктов

### Vladimir Pavlovich Zhukov

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences, (Post-doctoral degree), Professor of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45, e-mail: zhukov-home@yandex.ru

### Anton Valerievich Ogurtsov

Ivanovo State Power Engineering University, Candidate of Engineering Sciences (PhD), Associate Professor of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45, e-mail: ogurtsovav@mail.ru

### Alexander Sergeevich Shmelev

Ivanovo State Power Engineering University, Postgraduate Student of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45, e-mail: shml.alx@gmail.com

### Ilya Andreevich Kokulin

Ivanovo State Power University, Postgraduate Student of Thermal Power Plants Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-99-13, e-mail: ilyakokulin@gmail.com

## Modeling the separation of dispersed media in a multistage unit with recirculation of non-target products

### Abstract

**Background.** Processes to separate bulk materials by grain size are widely used in the construction, chemical, mineral processing, and energy industries. The efficiency of the production process that uses the resulting powders often depends on the efficiency of the classification process. Therefore, improving the quality of finished powders based on modeling and improving their production technologies is a pressing issue.

**Materials and methods.** Modeling of classification processes in a separate stage and in a system of classifiers has been performed using a separation curve for a separate stage and the analyzed system of devices.

**Results.** A model has been developed for single-, dual-, and triple-row stage arrangements, with and without recirculation of non-target separation products. It has been shown that recirculation significantly improves the quality of the target products. Based on the obtained solutions, recommendations have been developed to improve the efficiency of bulk material separation processes in multi-stage classification systems.

**Conclusions.** The proposed algorithm and calculation method allow us to find optimal schemes and operating modes of classifying multi-stage installations.

**Key words:** dispersed materials, size classification, multi-stage systems, separation curve, recirculation of intermediate products

**DOI:** 10.17588/2072-2672.2026.1.084-090

**Введение.** Процессы разделения сыпучих материалов по крупности зерен широко используются в строительной, химической, обогатительной и энергетической отраслях промышленности [1–6]. От эффективности данного процесса часто зависит эффективность основного производства, в котором используется полученный порошок. Например, в энергетике от крупности частиц измельченного топлива зависит эффективность и полнота его сгорания в энергетических установках [7–9]. В химической промышленности размер частиц реагента во многом определяет скорость химической реакции и производительность реактора по готовому продукту [10]. Если разделяемые компоненты на обогатительных фабриках различаются по размерам, то разделение частиц по крупности приводит к обогащению продукта целевым компонентом [11–12]. Следует отметить, что в приведенных примерах повышение качества основного производства напрямую зависит от размеров частиц и качества порошков, что, в свою очередь, обуславливает актуальность исследований, направленных на повышение качества приготовления и классификации дисперсных материалов.

**Методы исследования.** Моделирование процессов классификации в отдельной ступени и в системе классификаторов выполнено с использованием кривой разделения [2] и известных комбинаторных соотношений [13].

**Результаты исследования.** Целью исследования является разработка модели многоступенчатого классификатора с рециркуляцией промежуточных нецелевых продуктов, позволяющей решать задачи повышения эффективности разделения путем выбора оптимальных режимов и схем соединения ступеней анализируемых систем.

Для достижения поставленной цели предполагается решение следующих задач:

1) разработка математической модели многоступенчатой классифицирующей установки, учитывающей структуру соединения ступеней и возможность организации рециркуляции промежуточных нецелевых продуктов;

2) постановка и решение задачи выбора оптимальной структуры многоступенчатой классифицирующей системы;

3) постановка задачи выбора оптимального режима многоступенчатого классификатора.

Наибольший интерес при анализе многоступенчатых классификаторов вызывают вопросы выбора числа ступеней, организации потоков частиц между ступенями, получения при классификации нескольких продуктов заданного качества.

На первом этапе при построении модели рассматриваются многоступенчатые классифицирующие системы без организации рециркуляции нецелевых продуктов. Указанные системы представлены на рис. 1 для однорядного (а), двухрядного (б) и трехрядного (в) расположения ступеней. Каждая ступень классификации условно показана треугольником.

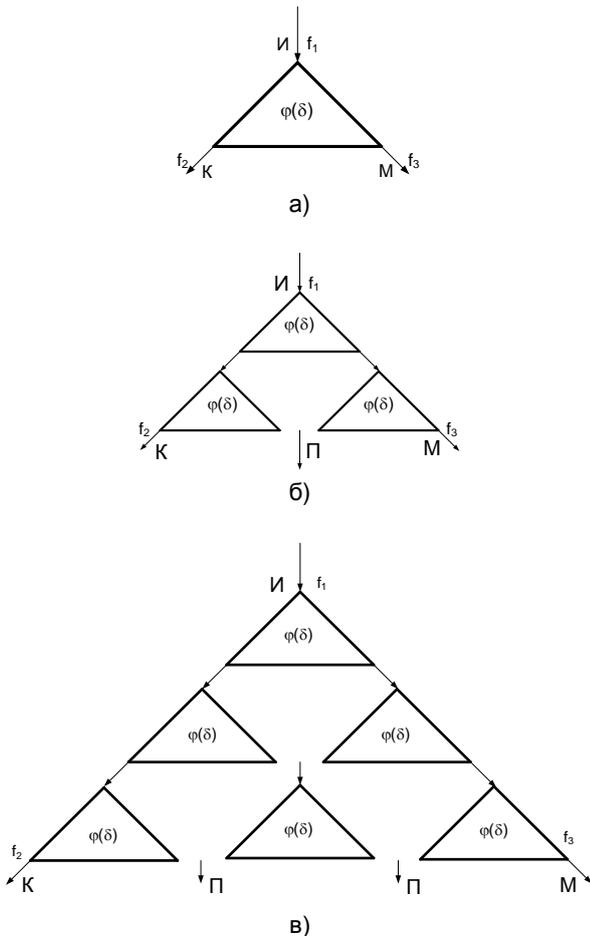


Рис. 1. Структурные схемы систем разделения продуктов при одно- (а), двух- (б) и трехрядном (в) расположении ступеней классификации без организации рециркуляции нецелевых порошков

В однорядной классифицирующей системе (рис. 1,а) исходный продукт (И) подается в ступень сверху и разделяется на мелкий продукт (М) и крупный продукт (К). Вероятность попадания частиц в мелкий продукт традиционно описывается кривой разделения или кривой парциальных выносов  $\varphi(\delta)$  [2], каждое значение которой показывает вероятность попадания частиц размера  $\delta$  в мелкий продукт. Кривая разделения ступени в первом приближении выбирается линейной:

$$\varphi_0(\delta) = 1 - \delta. \quad (1)$$

Гранулометрический состав мелкого  $f_3(\delta)$  и грубого  $f_2(\delta)$  продуктов разделения определяется согласно известным формулам [2]:

$$f_3(\delta) = \varphi(\delta) * f_1(\delta) / \bar{\varphi};$$

$$f_2(\delta) = (1 - \varphi(\delta)) * f_1(\delta) / \bar{\varphi},$$

где  $f_1(\delta)$  – гранулометрический состав исходного продукта;  $\bar{\varphi}$  – доля выноса фракций в мелкий продукт разделения, вычисляемая по формуле [2]

$$\bar{\varphi} = \int_0^{\infty} \varphi(\delta) * f_1(\delta) d\delta.$$

В схеме расположения классифицирующих ступеней в два ряда (рис. 1,б) первый ряд содержит один, а второй ряд – два одноступенчатых аппарата. В этом случае кроме мелкого и крупного образуется промежуточный продукт разделения (П). Для мелкого продукта системы (М) кривая разделения определяется произведением вероятностей двух независимых событий попадания в мелкий продукт в первом и втором рядах системы [2, 13, 14]. При одинаковом виде кривых разделения для ступеней значение кривой разделения системы определяется значением кривой разделения ступени во второй степени  $(\varphi(\delta))^2$ . Вероятность попадания частицы в крупный продукт системы вычисляется как вторая степень вероятности выхода в крупный продукт одной ступени:  $(1 - \varphi(\delta))^2$ .

Для системы из шести ступеней, расположенных в три ряда (рис. 1,в), вероятность выхода в мелкий продукт определится, соответственно, значением кривой разделения одной ступени в третьей степени  $(\varphi(\delta))^3$ .

На рис. 2 показаны кривые разделения описанных систем для однорядного, двухрядного и трехрядного расположения ступеней, представленных на рис. 1. Кривая разделения одной ступени отмечена на рис. 2 цифрой 1, для двухрядного расположения ступеней – цифрой 2 и для трехрядного – цифрой 3.

Анализ приведенных зависимостей показывает, что с увеличением числа рядов граничный размер системы уменьшается, степень проскока крупных частиц в мелкий продукт системы растет, значение коэффициента полезного действия разделения [2] практически не меняется.

Численный расчетный анализ полученных кривых разделений показал, что в схемах без рецикла с увеличением числа ступеней граничный размер системы уменьшается с 0,5 до 0,2 относительных единиц, а КПД разделения остается практически постоянным и равным 0,75.

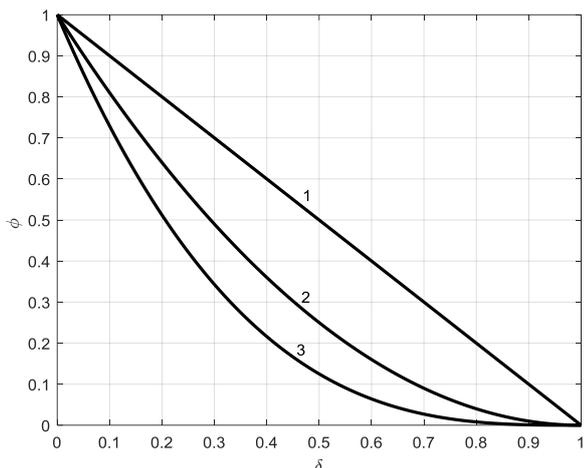


Рис. 2. Кривая разделения системы для однорядного (1), двухрядного (2) и трехрядного (3) расположения ступеней классификации в соответствии со схемами рис. 1,а,б,в

Анализ приведенных зависимостей показывает, что с увеличением числа рядов граничный размер системы уменьшается, степень проскока крупных частиц в мелкий продукт системы растет, значение коэффициента полезного действия разделения [2] практически не меняется. Численный расчетный анализ полученных кривых разделений показал, что в схемах без рецикла с увеличением числа ступеней граничный размер системы уменьшается с 0,5 до 0,2 относительных единиц, а КПД разделения остается практически постоянным и равным 0,75.

Следует отметить, что наряду с крупным и мелким продуктами при классификации порошков в системах на рис. 1,б и рис. 1,в образуются промежуточные продукты (П). Для повышения эффективности классификации данные продукты предлагается возвращать на вход системы или в некоторые промежуточные ее точки. Пример такой организации процесса представлен на рис. 3 трехрядной схемой, на которой промежуточные продукты направляются на рециркуляцию (Р) в первую ступень. Для оценки целесообразности таких мероприятий по организации перечистки промежуточных продуктов разработана специальная математическая модель, учитывающая рециркуляцию промежуточных нецелевых продуктов.

При построении модели дискретно по шагам рассматривается формирование фракционных потоков при организации рециркуляции промежуточных продуктов. На первом шаге моделирования считается, что в начальный момент на вход системы подается единичная порция частиц наблюдаемого размера  $\delta$ . В мелкий продукт системы выделяется доля подаваемой фракции, равная  $(\varphi(\delta))^3$ , в крупный продукт разделения –  $(1-\varphi(\delta))^3$ . Частицы фракции, которые не попали в мелкий или крупный продукты, подаются на рециркуляцию в первую

ступень. Доля рециркуляции фракции на первом шаге определяется как единица минус доля материала мелкого и минус доля материала крупных продуктов, покидающих систему:

$$a = 1 - \varphi^3 - (1 - \varphi)^3 = 3\varphi(1 - \varphi),$$

где  $a$  – массовая доля фракции, подаваемая на рециркуляцию на первом шаге.

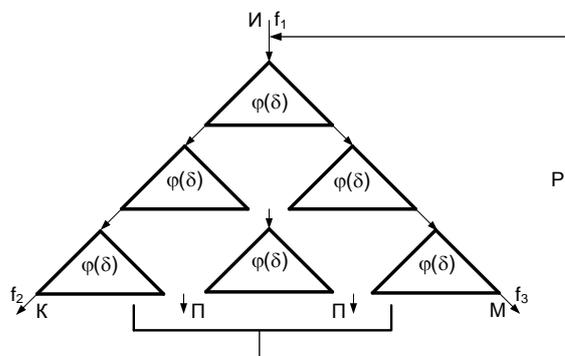


Рис. 3. Трехрядная система классификации с рециркуляцией (Р) двух нецелевых продуктов (П)

На втором шаге на вход в верхнюю ступень подается сумма единичной порции исходного питания и доли фракции, подаваемой на рециркуляцию на первом шаге:

$$1 + a.$$

Аналогичные рассуждения после второго шага при рециркуляции материала позволяют записать следующее выражение для доли наблюдаемой фракции, подаваемой на вход первой ступени:

$$1 + a + a^2.$$

После повторения указанной процедуры  $n$  раз на вход в первую ступень подается доля фракции, определяемая суммой  $n$  членов геометрической прогрессии. Сумма членов геометрической прогрессии при бесконечном числе слагаемых  $n \rightarrow \infty$ ;  $a^2 < 1$  определяется выражением [15]

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^\infty = \frac{1}{1 - a}.$$

Кривая разделения для установившегося режима при бесконечном числе членов геометрической прогрессии находится согласно зависимости

$$\varphi_1 = \varphi_0^3 * (1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^\infty) = \frac{\varphi_0^3}{1 - a}.$$

После подстановки в полученную формулу выражения для  $a(\delta)$  записывается итоговая зависимость для кривой разделения системы с учетом рециркуляции промежуточных продуктов согласно схеме рис. 3:

$$\varphi_1(\delta) = \frac{(\varphi_0(\delta))^3}{1 - 3\varphi_0(\delta)(1 - \varphi_0(\delta))}, \quad (2)$$

где  $\varphi_1(\delta)$  – кривая разделения системы или вероятность попадания в мелкий продукт частиц размера  $\delta$  для классифицирующей системы, представленной на рис. 3.

Предложенное математическое описание (2) положено в основу исследования эффективности работы классифицирующей системы. Результаты расчетных исследований для системы с трехрядным расположением ступеней при рециркуляции нецелевых фракций согласно схеме рис. 3 приведены на рис. 4.

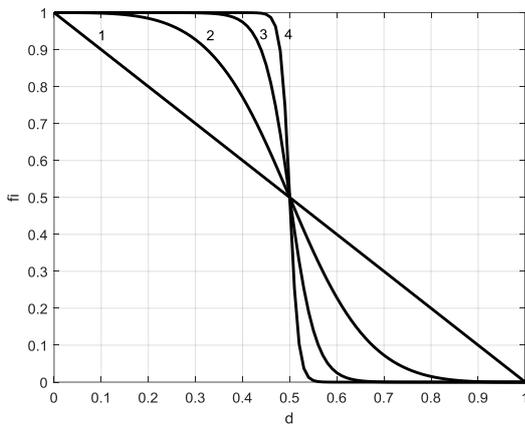


Рис. 4. Кривые разделения трехрядной классифицирующей системы с рециркуляцией промежуточных продуктов с разными кривыми разделения ступени: 1 – линейная кривая разделения ступени (1); 2 – кривая разделения системы при кривой разделения ступени согласно (1); 3 – кривая разделения системы при кривой разделения ступени согласно (2); 4 – кривая разделения системы при кривой разделения ступени согласно (3)

Под цифрой 1 на рис. 4 показана линейная кривая разделения одной ступени (1). Кривая разделения системы с рециркуляцией при трехрядном расположении ступеней, рассчитанная согласно (2), показана на рис. 4 под цифрой 2.

При организации рециркуляции (перечистки) нецелевого продукта существенным образом повышается эффективность разделения по сравнению с базовой одноступенчатой линейной кривой разделения. Так, КПД разделения [2] повышается с 0,75 до 0,87, а степень проскока крупных частиц в готовый продукт [2] уменьшается с 0,25 до 0,1.

В рамках решения задачи по совершенствованию структуры классифицирующей системы дальнейшие исследования проводились по следующему алгоритму. Для дополнительного моделирования повышения эффективности разделения предлагается подход с использованием рекуррентных соотношений [16]. Рекуррентное соотношение – это уравнение, кото-

рое выражает каждый элемент последовательности как функцию предыдущих соотношений [16]. В нашем случае рекуррентное соотношение понимается как использование для расчета кривой разделения ступени кривой разделения системы для предыдущей классифицирующей системы. То есть на первой итерации предлагается для системы классификаторов (рис. 3) выбрать кривую разделения ступени не линейную (1), а рассчитанную ранее для трехступенчатой системы согласно (2). Расчетный анализ в этом случае выполняется достаточно просто через замену кривой разделения одной ступени (1) на кривую разделения, рассчитанную согласно (2). Такая замена по существу является подходом использования рекуррентных соотношений, при котором система, описанная кривой разделения (2), считается соответствующей кривой разделения ступени в трехрядной системе (рис. 3). Тогда кривая разделения такой новой системы может быть рассчитана, если в выражении (2) кривую ступени заменить на кривую разделения согласно (2). Смысл этой замены иллюстрирует выражение

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1^3}{1 - a_1}, \quad (3)$$

где  $\varphi_2$  – кривая разделения системы (рис. 3), у которой кривая разделения ступени определяется согласно (2);  $a_1$  – комплекс, определяемый выражением

$$a_1 = 3\varphi_1(1 - \varphi_1). \quad (4)$$

Дальнейшее повышение эффективности разделения смоделировано повышением эффективности одной ступени через замену кривой разделения на более эффективную, определенную предыдущим соотношением:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2^3}{1 - a_2}, \quad (5)$$

где  $\varphi_2$  – кривая разделения системы (рис. 3), у которой кривая разделения ступени определяется согласно (3);  $a_2$  – комплекс, определяемый выражением

$$a_2 = 3\varphi_2(1 - \varphi_2). \quad (6)$$

Следует отметить, что, согласно (2), система классификаторов включает использование 6 ступеней, соединенных согласно схеме на рис. 3, при этом каждая ступень описывается линейной кривой разделения. На втором уровне (рис. 4, кривая 3) каждый треугольник схемы на рис. 3 включает систему из 6 линейных ступеней, при этом общее число линейных ступеней составляет  $6 \cdot 6 = 36$ . Для обеспечения кривой разделения 4 (рис. 4) потребуются уже  $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$  линейных ступеней классификации. Кривая разделения мелкого продукта, определенная согласно (5)–(6), представлена на рис. 4 под цифрой 4.

Повторение описанной процедуры замены кривой разделения ступени кривой разделения системы может быть выполнено необходимое число раз до достижения требуемого качества готового продукта. Представленная математическая модель позволяет перейти к решению задачи выбора структуры классифицирующего каскада, обеспечивающего заданные требования к готовому продукту. Результаты расчетного анализа по предложенной модели с использованием рекуррентных соотношений при разных структурах и составах классифицирующей системы приведены в таблице.

#### Влияние структуры системы на показатели эффективности разделения

Схема системы/ число ступеней	Вид кривой разделения ступени	Граничный размер системы	КПД системы [2]	Степень проскока крупных частиц системы [2]
Рис. 1,а /1	ф.(1)	0,5	0,75	0,25
Рис. 1,б /3	ф.(1)	0,28	0,75	0,33
Рис. 1,в /6	ф.(1)	0,2	0,75	0,55
Рис. 3 /6	ф.(2)	0,5	0,87	0,12
Рис. 3 /36	ф.(3)	0,5	0,95	0,05
Рис. 3 /216	ф.(4)	0,5	0,97	0,03

Граничные размеры систем с рециркуляцией продуктов получаются примерно одинаковыми, а эффективность разделения при этом существенно возрастает. Очевидно, что стоимость таких установок с ростом числа элементов будет увеличиваться. Для конкретных случаев необходимость получения более чистых и однородных материалов должна обосновываться технико-экономическими расчетами, учитывающими удорожание продукта с повышением его качества. Представленная модель позволяет проводить такой анализ, учитывая повышение качества продукта с увеличением сложности и числа элементов системы.

Постановка задачи выбора режимов классифицирующей системы возможна на основе представленных моделей путем возможных управлений характеристиками режима каждого элемента системы, которое может быть реализовано на практике, например, управлением распределения потоков воздуха между ступенями или положением и поворотом треугольных вставок. Необходимость данного мероприятия определяется для конкретных технологических условий и требований к получаемому порошку и подробно в настоящем исследовании не рассматривается.

**Выводы.** Разработанная математическая модель многоступенчатых классифицирующих установок с учетом рециркуляции нецелевых продуктов позволяет оценить повышение эффективности классифицирующей системы и

выбрать структуру системы с учетом заданных требований к качеству готового порошка.

Предложенный подход к моделированию классифицирующих систем позволяет при варьировании режимных характеристик отдельных ступеней получить заданное качество или максимальное количество одного или нескольких целевых продуктов.

#### Список литературы

1. Барский М.Д., Ревнивцев В.И., Соколкин Ю.В. Гравитационная классификация зернистых материалов. – М.: Недра, 1974. – 232 с.
2. Мизонов В.Е., Ушаков С.Г. Аэродинамическая классификация порошков. – М.: Химия, 1989. – 160 с.
3. Андреев С.Е. Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых. – М.: Недра, 1980. – 416 с.
4. Линч А. Циклы дробления и измельчения. – М.: Недра, 1980. – 343 с.
5. Сиденко П.М. Измельчение в химической промышленности. – М.: Химия, 1977. – 368 с.
6. Жуков В.П., Барочкин Е.В. Системный анализ энергетических теплообменных установок. – Иваново, 2009. – 176 с.
7. Дуда В. Цемент. – М.: Стройиздат, 1981. – 464 с.
8. Mizonov V., Zhukov V., Bernotat S. Simulation of Grinding: New Approaches. – Ivanovo, 1997. – 108 p.
9. Фоменко Т.Г., Бутовецкий В.С., Погарцева Е.М. Технология обогащения углей: справочное пособие. – М.: Недра, 1985. – 367 с.
10. Кафаров В.В., Дорохов И.Н., Арутюнов С.Ю. Системный анализ процессов химической технологии. Процессы измельчения и смешивания сыпучих материалов. – М.: Наука, 1985. – 440 с.
11. Процессы и аппараты химической технологии. Т. 2. Механические и гидромеханические процессы / под ред. А.М. Кутепова. – М.: Логос, 2001. – 600 с.
12. Жуков В.П., Каталимов А.В., Мизонов В.Е. Расчетно-экспериментальное исследование разделения разнопрочных материалов в совмещенном распределенном процессе дробления классификации // Теоретические основы химической технологии. – 1997. – Т. 31, № 3. – С. 333–335.
13. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высш. шк., 2006. – 575 с.
14. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.
15. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
16. Поликанова И.В. Дискретная математика. – Барнаул: ФГБОУ ВО «АлтГПУ», 2020. – 169 с.

#### References

1. Barskiy, M.D., Revnitssev, V.I., Sokolkin, Yu.V. *Gravitatsionnaya klassifikatsiya zernistykh materialov* [Gravitational classification of granular materials]. Moscow: Nedra, 1974. 232 p.
2. Mizonov, V.E., Ushakov, S.G. *Aerodinamicheskaya klassifikatsiya poroshkov* [Aerodynamic classification of powders]. Moscow: Khimiya, 1989. 160 p.

3. Andreev, S.E. *Droblenie, izmel'chenie i grokhochenie poleznykh iskopaemykh* [Crushing, grinding and screening of minerals]. Moscow: Nedra, 1980. 416 p.
4. Linch, A. *Tsikly drobleniya i izmel'cheniya* [Crushing and grinding cycles]. Moscow: Nedra, 1980. 343 p.
5. Sidenko, P.M. *Izmel'chenie v khimicheskoy promyshlennosti* [Grinding in the chemical industry]. Moscow: Khimiya, 1977. 368 p.
6. Zhukov, V.P., Barochkin, E.V. *Sistemnyy analiz energeticheskikh teplomassoobmennyykh ustanovok* [System analysis of energy heat and mass exchange plants]. Ivanovo, 2009. 176 p.
7. Duda, V. *Tsement* [Cement]. Moscow: Stroyizdat, 1981. 464 p.
8. Mizonov, V., Zhukov, V., Bernotat, S. *Simulation of Grinding: New Approaches*. Ivanovo, 1997. 108 p.
9. Fomenko, T.G., Butovetskiy, V.S., Pogartseva, E.M. *Tekhnologiya obogashcheniya ugley: Spravochnoe posobie* [Coal enrichment technology: Reference manual]. Moscow: Nedra, 1985. 367 p.
10. Kafarov, V.V., Dorokhov, I.N., Arutyunov, S.Yu. *Sistemnyy analiz protsessov khimicheskoy tekhnologii. Protsessy izmel'cheniya i smeshivaniya sypuchikh materialov* [Systems analysis of chemical engineering processes. Processes of grinding and mixing bulk materials]. Moscow: Nauka, 1985. 440 p.
11. Kutepov, A.M. (ed.) *Protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii. T. 2. Mekhanicheskie i gidromekhanicheskie protsessy* [Processes and apparatuses of chemical technology. Vol. 2. Mechanical and hydromechanical processes]. Moscow: Logos, 2001. 600 p.
12. Zhukov, V.P., Katalymov, A.V., Mizonov, V.E. *Raschetno-eksperimental'noe issledovanie razdeleniya raznoprochnyykh materialov v sovmeshchennom raspredelenom protsesse drobleniya klassifikatsii* [Calculation and experimental study of the separation of materials of different strengths in a combined distributed process of crushing classification]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*, 1997, vol. 31, no. 3, pp. 333–335.
13. Venttsel', E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow: Vysshaya shkola, 2006. 575 p.
14. Samarskiy, A.A., Vabishchevich, P.N. *Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* [Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics]. Moscow: Izdatel'stvo LKI, 2009. 480 p.
15. Dvayt, G.B. *Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly* [Tables of integrals and other mathematical formulas]. Moscow: Nauka, 1977. 224 p.
16. Polikanova, I.V. *Diskretnaya matematika* [Discrete Mathematics]. Barnaul: AltGPU, 2020. 169 p.