

Численно-аналитический метод расчета температурного поля полуограниченного тела с использованием показательных функций

А.К. Соколов^{1,2}, О.А. Якубина³

¹ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», г. Иваново, Российская Федерация

²ФГБОУВПО «Ивановская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России», г. Иваново, Российская Федерация

³ОАО «Зарубежэнергопроект», г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: sokolov@bjd.ispu.ru, os_flora@mail.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Температура твердых тел, участвующих в теплообмене с газовой или жидкой средой, при числах Фурье менее 0,05 изменяется только в поверхностном слое. Толщина этого слоя изменяется во времени, поэтому расчет температурных полей этих тел представляет определенные трудности. Решение задачи расчета температурных полей полуограниченных тел актуально для моделирования начальной стадии интенсивного нагрева (охлаждения) оборудования и ограждений теплоэнергетических установок. Ранее для расчета температурных полей с подвижной границей теплового возмущения в основном применялись аналитические или численные методы. Первые имели недостаточную точность при решении реальных нелинейных задач теплопроводности, а вторые – чрезвычайно трудоемки. В последние годы многими научными коллективами активно разрабатываются более эффективные численно-аналитические методы.

Материалы и методы: Для решения дифференциального уравнения теплопроводности при граничных условиях III-го рода используется численный метод конечных разностей и численно-аналитический метод.

Результаты: Получены формулы для расчета всех параметров показательной функции, описывающей распределения температур поверхностного слоя. По начальным и граничным условиям теплообмена аналитически определены параметры функции для конца расчетного интервала времени. Расчет динамики температурного поля сведен к численному решению обыкновенного дифференциального уравнения, что упрощает процедуру расчета. Уточнена методика расчета процессов сопряженного теплообмена в пределах расчетного интервала времени при высоких скоростях роста температуры обогреваемой поверхности. Проведены расчеты для оценки эффективности метода расчета. Выполнено уточнение сравнительно простого численно-аналитического метода расчета температурных полей полуограниченных тел.

Выводы: Проведенное исследование метода показало, что добавление в математическое описание дополнительных условий позволяет повысить точность расчета температур и их градиентов.

Ключевые слова: математическая модель, температурное поле, теплообмен, граничные условия III-го рода, сопряженная задача теплопроводности, полуограниченное тело, решение обыкновенного дифференциального уравнения, численно-аналитическое решение дифференциального уравнения теплопроводности.

Numerical and analytical method of semi-limited body temperature field calculation by using exponential functions

A.K. Sokolov^{1,2}, O.A. Yakubina³

¹ Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation

² Ivanovo Academy of Fire-Fighting of the State Fire Service of Emergency Ministry, Ivanovo, Russian Federation

³ OJSC Zarubezhenergo projekt, Ivanovo, Russian Federation

E-mail: sokolov@bjd.ispu.ru, os_flora@mail.ru

Abstract

Background: The temperature of solid bodies participating in heat exchange with a gas or a liquid environment at Fourier's numbers below 0,05 changes only in the surface layer. The thickness of this layer changes in time, therefore, calculation of temperature fields of these bodies is rather difficult. It is quite urgent to solve the problem of calculating temperature fields of semi-limited bodies for modeling the initial stage of intensive heating (cooling) of the equipment and protections of heat power installations. Earlier, analytical or numerical methods were applied to calculation of temperature fields with a mobile border of thermal agitation. The former ones had insufficient accuracy in solving real nonlinear problems of heat conductivity, and the latter – were extremely labor-consuming. In recent years many research teams have been developing more effective numerical and analytical methods.

Materials and Methods: In order to solve the differential equation of heat conduction with boundary conditions of the III-d kind, we used the numerical method of finite differences and numerical-analytical method.

Results: We have developed formulas for calculation of the parameters of the exponential function describing the distribution of the surface layer temperatures. By the initial and end conditions of heat exchange, we analytically determined the functions of estimated time end. The calculation of the temperature field dynamics was reduced to the numerical solution of the differential equation that simplifies the calculation procedure. We also improved the technique of conjugate heat exchange calculation within the estimated period of time at high temperature growth rates of the

surface under heating. Calculations were made to assess the calculation method efficiency. The comparatively simple numerical-analytical method of temperature fields of semi-limited bodies was specified.

Conclusions: The study of this method has shown that the addition of a mathematical description of additional conditions improves the accuracy of calculation of temperatures and their gradients.

Key words: mathematical model, temperature field, heat exchange, boundary conditions of the III-d kind, conjugate heat exchange problem, semi-limited body, solution to an ordinary differential equation, numerical-analytical method of solving differential equations.

DOI: 10.17588/2072-2672.2016.2.044-050

В начальной стадии нагрева или охлаждения твердого тела при начальном условии $T(x, \tau = 0) = T_n(\tau = 0, 0 \leq x \leq R_n)$ его температура изменяется только в поверхностном слое толщиной R , который с течением времени увеличивается. В остальной части тела толщиной $(R_n - R)$ температура остается неизменной и равной T_n . R_n – определяющий размер (толщина всей пластины, или радиус цилиндра, шара, м); x – текущее значение координаты, м; T_n – температура в начальный момент времени, К. Пока температурное возмущение не охватит все тело, его температурное поле принято считать полуограниченным. Полуограниченными телами можно считать ограждения теплоэнергетических установок, элементы оборудования при изменении условий теплообмена с внешней средой или другими телами в начальный период времени. Как правило, в этот период значительно изменяется интенсивность теплообмена, а в поверхностном слое возникают большие градиенты температур, которые вызывают термические напряжения, приводящие к разрушению материалов.

Необходимость совершенствования методов расчета температурных полей в полуограниченных телах представляется актуальной задачей, решение которой позволит прогнозировать величины термических напряжений, разрабатывать безопасные режимы разогрева (охлаждения) конструкций и более точно определять количество теплоты, аккумулированной ограждениями при изменении режима отопления помещений или смене погодных условий.

В [1, 2] даны аналитические решения для расчета температурных полей полуограниченных тел. Номограммы, построенные на основе аналитических решений, приведены в [3]. Имеющиеся в литературе аналитические решения имеют ограниченную область применения, так как не позволяют учесть реальные условия теплообмена: динамику температуры внешней среды (газов), радиационный перенос, зависимость теплофизических характеристик от температуры и др.

Численные методы расчета температурных полей более универсальны, но требуют весьма трудоемких вычислений. Для снижения трудоемкости расчетов весьма актуально создание и исследование численно-аналити-

ческих методов для моделирования температурных полей тел, некоторые из них описаны в [4–10]. Особенно активно аналитические и численно-аналитические методы разрабатываются в СамГТУ под руководством проф. В.А. Кудинова [11–14].

В [10] был предложен метод расчета температурных полей в полуограниченных телах в форме неограниченной пластины, основанный на математических описаниях и алгоритмах расчета температурных полей тел простой формы, предложенных в [8, 9]. Исследование метода [10] показало, что для снижения погрешности расчета приходится подбирать показатель степени n в уравнении, которое описывает распределение температур по сечению тела. Необходимость такой настройки метода несколько затрудняет его использование, особенно в автоматизированных системах проектирования и управления.

Ниже предлагается развитие метода [10] для расчета температурного поля полуограниченного тела, суть которого заключается в добавлении в математическое описание еще одного условия (уравнения), что позволяет рассчитывать, а не задавать показатель степени n на каждом временном этапе расчета.

Алгоритм расчета, по сравнению с [10], изменится незначительно и будет заключаться в следующем. Процесс нагрева разделяется на ряд расчетных интервалов времени $\Delta\tau$. Распределение температур по сечению тела в конце каждого расчетного интервала времени $\Delta\tau$ аппроксимируется показательной функцией, параметры которой определяются по аналитическим выражениям, полученным решением линейной системы уравнений, которые описывают начальное и граничные условия температурного поля. Благодаря заранее полученным приближенным аналитическим решениям для расчетного интервала времени $\Delta\tau$, решение дифференциального уравнения теплопроводности с частными производными сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения численным методом.

Рассмотрим математическое описание температурного поля ограждения или конструктивно-го элемента энергетической установки в виде неограниченной пластины толщиной R_n , которую в начале нагрева можно считать полуограниченным телом.

Пусть пластина *нагревается только с одной стороны* $x_n = R_n$, м.

Запишем начальное условие:

$$T(x, 0) = T_n, 0 \leq x_n \leq R_n, \quad (1)$$

и граничные условия на поверхностях пластины:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, \tau) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x_n = R_n, \tau)\lambda = q(\tau), \quad (3)$$

где x_n – текущее значение координаты, изменяющееся от 0 до R_n ; T_n – температура пластины до начала нагрева, К; λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); $q(\tau)$ – удельный поток теплоты на поверхность ($x_n = R_n$), Вт/м²; R_n – толщина пластины, м; τ – текущее время ($0 \leq \tau \leq \tau_k$); τ_k – конечное время нагрева.

Примем, что распределение температур в поверхностном слое в момент времени τ_{i+1} аппроксимируется функцией [8–10]

$$T(X) = a_0 + a_1 \cdot X^n, \quad 0 \leq X \leq 1, \quad (4)$$

где $X = x/R$, $0 \leq x \leq R$, x – текущее значение координаты, изменяющееся от $x = 0$ при $x_n = (R_n - R)$ до $x = R$ при $x_n = R_n$; R – наибольшая глубина поверхностного слоя ($R < R_n$), на которой температура изменяется. В слое толщиной $(R_n - R)$ температура остается практически неизменной и равной T_n , пока глубина прогреваемого слоя R не станет равной R_n .

Принятая система с двумя текущими координатами x_n и x , где $0 \leq x \leq R$ и $0 \leq x_n \leq R_n$, отличается от той, которая обычно применяется при описании температурного поля полуограниченного тела. Для полуограниченного тела обычно используется одна координата $0 \leq x < \infty$, где $x = 0$ на поверхности теплообмена.

Выбранная система координат пластины позволит, не изменяя расчетные формулы, использовать их для описания температурного поля пластины, когда тело прогреется на всю толщину пластины (до $x_n = x = 0$), и учесть теплообмен с другой стороны пластины по известному методу [8, 9].

Значение R для конца расчетного интервала предлагается определять по числу Фурье $Fo = a\tau/R^2$:

$$R = \sqrt{a \cdot \tau / Fo}. \quad (5)$$

Число Фурье следует принимать постоянным для всех расчетных моментов времени, пока $R < R_n$, где a – температуропроводность, м/с²; τ – текущее время, с, для конца интервала $i+1$ $\tau = \tau_{i+1}$.

Величина Fo будет зависеть от динамики потока теплоты на поверхность тела q . Значение Fo должно соответствовать условию $Fo \equiv \min(R)$, при котором $T(x=0, \tau) = T_n$.

Приближенно величину Fo можно принять по точному решению дифференциального уравнения теплопроводности для полуограниченного тела. При $q = \text{const}$ можно принять по номограмме [5] $Fo \approx 0,04$. В инженерных расчетах принято считать, что $Fo \approx 0,05$.

Для расчета распределения температур по (4) необходимо определить коэффициенты a_0 , a_1 и показатель степени n для $\tau_i = i \Delta \tau_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots$). В известном методе [10] показателем степени n приходилось задаваться.

Формулы для вычисления коэффициентов a_0 , a_1 и показателя степени n можно получить, используя следующие уравнения.

1. Уравнение (3), которое для конца интервала времени при $x = R$ и $X = 1$ с учетом выражения (4) примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x = R, \tau)\lambda = \frac{\partial T}{\partial X}(X = 1, \tau)\lambda = n a_2 \cdot \lambda / R = q_k, \quad \text{где}$$

q_k – поток теплоты в конце расчетного интервала времени.

Из этого выражения можно выразить коэффициент a_1 или n для момента времени τ_{i+1} :

$$n = q_k R_{i+1} / (\lambda a_1); \quad (6)$$

$$a_1 = q_k R_{i+1} / (\lambda n). \quad (6^1)$$

2. Уравнение баланса теплоты для прогреваемого слоя в конечных разностях, которое запишем в следующем виде:

$$\Delta T_{\text{ср}, i+1} / \Delta \tau_{i+1} = q_{\text{ср}, i+1} / (c \cdot R_{i+1}) \quad \text{или}$$

$$(T_{\text{ср}, i+1} - T_{\text{ср}, \text{ни}}) c \cdot R_{i+1} = q_{\text{ср}, i+1} \Delta \tau_{i+1}, \dots, \quad (7)$$

где c – объемная теплоемкость, Дж/(м³·К); $q_{\text{ср}}$ – среднеинтегральный поток теплоты для расчетного интервала времени; $T_{\text{ср}, \text{ни}}$ и $T_{\text{ср}, i+1}$ – среднемассовые температуры в начале и конце интервала времени $\Delta \tau_{i+1} = \tau_{i+1} - \tau_i$ для слоя толщиной R_{i+1} . Величина $T_{\text{ср}, \text{ни}}$ в начале расчетного интервала времени τ_i должна определяться по температуре в конце предыдущего интервала времени $T_{\text{ср}, i}$ по формуле

$$T_{\text{ср}, \text{ни}} = T_{\text{ср}, i} R_i / R_{i+1} + T_n (R_{i+1} - R_i) / R_{i+1}. \quad (8)$$

Обратим внимание, что $T_{\text{ср}, i}$ – среднемассовая температура в конце i -го интервала времени относится к слою R_i , а среднемассовая температура в начале $i+1$ интервала времени $T_{\text{ср}, \text{ни}}$ – к расчетному слою R_{i+1} (см. уравнение баланса теплоты (7)). Поэтому на $i+1$ интервале времени значение среднемассовой температуры в начале $i+1$ интервала времени $T_{\text{ср}, \text{ни}}$ должно определяться с учетом $T_{\text{ср}, i}$ и температуры непрогретой части слоя $(R_{i+1} - R_i)$, которая равна T_n .

Выражение для расчета среднемассовой температуры в конце интервала $T_{\text{ср}, i+1}$ можно получить интегрированием (4) [8, 9]:

$$T_{\text{ср}} = \int_0^1 T(X) dX = \int_0^1 (a_0 + a_1 X^n) dX = a_0 + a_1 / (n + 1). \quad (9)$$

С учетом (9) уравнение баланса теплоты (7) запишется в виде

$$[a_0 + a_1 / (n + 1) - T_{\text{ср}, \text{ни}}] c \cdot R_{i+1} = q_{\text{ср}, i+1} \Delta \tau_{i+1}, \quad (10)$$

где средний поток теплоты $q_{\text{ср}, i+1}$ определим по потокам теплоты в начале $q_{\text{н}, i+1}$ и конце $q_{\text{к}, i+1}$ интервала времени:

$$q_{ср,i+1} = (q_{н,i+1} + q_{к,i+1})/2. \quad (11)$$

3. Условие постоянства температуры в плоскости $X = 0$ ($x_n = R_n - R$) запишется следующим образом:

$$T(X = 0, \tau_{i+1}) = T_n, \quad (12)$$

пока температурные изменения не распространились на всю толщину пластины, до $x_n = x = 0$.

Рассмотрим решение системы уравнений (6), (10), (12).

Коэффициент a_0 легко определить по (4) при $X = 0$ с учетом (12)

$$T(X=0, \tau_{i+1}) = a_0 = T_n. \quad (13)$$

Выражение для расчета коэффициента a_1 получим из уравнения баланса теплоты (10), подставив в него (11) и $a_0 = T_n$ из (13):

$$a_1 = \Delta T(n + 1), \quad (14)$$

где

$$\Delta T = T_{ср,ни} - T_n + (q_{н,i+1} + q_{к,i+1}) \Delta \tau / (2 \cdot R_{i+1}). \quad (15)$$

Учтем выражение (6) для определения n , подставив n в (14), и получим уравнение

$$a_1 = \Delta T [q_{к,i+1} R_{i+1} / (\lambda a_1) + 1],$$

которое преобразуем к канонической форме квадратного уравнения

$$(\lambda / \Delta T) a_1^2 - \lambda a_1 - q_{к,i+1} R_{i+1} = 0, \quad (16)$$

и получим из него выражение для расчета коэффициента a_1 :

$$a_1 = \left[\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4 \lambda q_{к,i+1} R_{i+1} / \Delta T} \right] \Delta T / (2 \cdot \lambda). \quad (17)$$

Зная a_1 , показатель степени n можно определить по (6).

Таким образом, по довольно простым формулам (13), (17) и (6) можно определить a_0 , a_1 и n и по функции (4) рассчитать распределение температур в конце расчетного интервала времени. Это и есть аналитическое решение дифференциального уравнения теплопроводности для интервала времени $\Delta \tau_{i+1}$ при известных значениях $T_{ср,ни}$, T_n , температуры поверхности $X = 1$ в начале интервала времени $T_1 = T(X=1, \tau_i)$.

Для первого интервала среднemasсовая температура в начале интервала $T_{ср,ни}$, по которой ведется расчет коэффициентов a_0 , a_1 , известна из начальных условий $T_{ср,ни} = T_{ср,0} = T_n$, а для последующих интервалов – ее значение рассчитывается с учетом изменения размера прогретого слоя по формуле (8).

Расчет температур поверхности $T_{1,i+1} = T(X=1, \tau_{i+1})$ и среднemasсовой температуры в конце интервала времени $T_{ср,i+1}$ можно выполнить по формулам

$$T_{1,i+1} = a_0 + a_1, \quad (18)$$

$$T_{ср,i+1} = a_0 + a_1 / (n + 1), \quad (19)$$

которые получены из (4) при $X = 1$ и из (9).

Расчет распределений температур в последующие моменты времени $\tau_{i+1} = \tau_i + \Delta \tau$ можно выполнять с помощью известных процедур решения обыкновенных дифференциальных уравнений, например методов Эйлера, Эйлера-Коши, Рунге-Кутты, ломаных и др.

Для заданной функции $q(\tau)$, расчет по описанным выше формулам не вызывает серьезных затруднений. Однако для сопряженной задачи теплообмена система уравнений является нелинейной.

Обратим внимание, что в формулу (17) для расчета a_1 с учетом (15) входят величины потоков теплоты в начале $q_{н,i+1}$ и конце $q_{к,i+1}$ интервала времени. В начале расчета температур на интервале $\Delta \tau_{i+1}$ имеются известные данные только для вычисления потока теплоты в начале интервала $q_{н,i+1}$ по известной температуре поверхности $T_{1,i}$. Температура $T_{1,i+1} = T(X=1, \tau_{i+1})$ поверхности $X = 1$ и величина потока теплоты в конце интервала $q_{к,i+1}$ неизвестны, поэтому их значения приходится принимать приближенно. При расчете по методу Эйлера принимается, например, условие $q_{ср,i+1} \approx q_{к,i+1} \approx q_{н,i+1}$.

Для материалов с низкой теплопроводностью (кирпич, тепловая изоляция) и металлов при интенсивном теплообмене характерна высокая скорость роста температуры обогреваемой поверхности, которая приводит к резкому изменению потока теплоты в пределах расчетного интервала времени. В таких условиях задание $q_{ср,i+1} \approx q_{к,i+1} \approx q_{н,i+1}$ вызывает значительные погрешности расчета или приводит к абсурдным результатам.

В [8, 10] предложена оригинальная методика для оценки значений температуры поверхности ($X = 1$) $T_{1,i+1}$ и $q_{к,i+1}$. Модифицируем ее для данного математического описания.

Рассмотрим процедуру получения первого приближения температуры поверхности $T_{1,i+1}^n$.

Поток теплоты q на поверхность в расчетные моменты времени в общем случае может зависеть от температур газов $T_r(\tau)$, коэффициентов радиационного σ , Вт/(м²·К⁴), и конвективного α_k , Вт/(м²·К), теплообмена.

Запишем выражение для приведенного коэффициента теплообмена в начале расчетного интервала:

$$\alpha_{пр,н} = q_{н,i+1} / (T_{р,н,i} - T_{1,i}), \quad (20)$$

где $q_{н,i+1}$ – радиационно-конвективный поток теплоты, Вт/м², вычисленный по известной температуре поверхности $T_{1,i+1}$ в начале $i+1$ интервала, равной $T_{1,i}$:

$$q_{н,i+1} = \sigma [T_r^4(\tau_i) - T_{1,i}^4] + \alpha [T_r(\tau) - T_{1,i}]. \quad (21)$$

Выразим поток теплоты в конце $i+1$ интервала через приведенный коэффициент теплообмена и неизвестную пока температуру поверхности в конце интервала $T_{1,i+1}^n$:

$$q_{k,i+1} = \alpha_{пр} (T_{г,к,i+1} - T_{1,i+1}^n). \quad (22)$$

Используя выражения (6), (18) и (19), запишем формулу связывающую температуры $T_{1,i+1}^n$ и $T_{ср,i+1}$:

$$T_{1,i+1}^n = T_{ср,i+1} + q_{k,i+1} R_{i+1} / (\lambda n). \quad (23)$$

Преобразуем (23), подставив в него $T_{ср,i+1}$ из уравнения (7), и получим

$$T_{1,i+1}^n = T_{ср,ни} + q_{ср,i+1} \Delta\tau / (cR_{i+1}) + q_{k,i+1} R_{i+1} / [\lambda(n^n + 1)]. \quad (24)$$

Подставим в (24) выражения (11), (22) и запишем

$$T_{1,i+1}^n = T_{ср,ни} + (\alpha_{пр,н}(T_{г,к} - T_{1,i+1}) + q_{н,i+1}) \Delta\tau / (2 \cdot cR_{i+1}) + \alpha_{пр,н}(T_{г,к} - T_{1,i+1}) R_{i+1} / [\lambda(n^n + 1)]. \quad (25)$$

Выразим из (25) температуру $T_{1,i+1}^n$ и будем считать ее первым приближением $T_{1,i+1}^n$:

$$T_{1,i+1}^n = \left\{ \frac{(\alpha_{пр} T_{г,к} + q_{н}) \Delta\tau / (2cR) + T_{ср,ни} + \alpha_{пр} T_{г,к} R / (\lambda(n^n + 1))}{1 + \alpha_{пр} \Delta\tau / (2cR) + \alpha_{пр} R / (\lambda(n^n + 1))} \right\}_{i+1}. \quad (26)$$

Величина $T_{1,i+1}^n$ является приближенной, так как коэффициент $\alpha_{пр,н}$ справедлив не для всего интервала, а только для его начала. Значение показателя степени n^n принято приближенно (для второго и последующих этапов его величину можно принять по предыдущему интервалу). Исследования показали, что задание n^n для первого интервала времени в диапазоне $3 < n^n < 6$ и $0,03 < Fo < 0,07$ практически не отражается на результатах расчета температуры поверхности тела.

Аналогичная формула для расчета $T_{1,i+1}^n$ была получена из уравнения баланса теплоты при подстановке в него выражений (19) с учетом (6¹), (20) и (22). Однако расчеты с использованием такой формулы приводили к большей погрешности определения $T_{1,i+1}^n$.

Кстати по этой формуле, а не по (18), из [10] рассчитывались первые приближения $T_{1,i+1}^n$ для примера, приведенного в [10].

По известной температуре $T_{1,i+1}^n$ можно рассчитать приближенное значение потока теплоты в конце интервала $q_{к,i+1}$ по формуле (22), используя $T_{1,i+1}^n$ и другие параметры теплообмена, соответствующие τ_{i+1} . По $q_{к,i+1}$ и $q_{ср,i+1}$ можно вычислить средний для интервала времени поток теплоты $q_{ср,i+1}$ (см. (11)). Далее определить a_0 , a_1 и n и по функции (4), рассчитать распределение температур в конце расчетного интервала времени $T(X)$ или $T_{1,i+1}$ и $T_{ср,i+1}$ по (18), (19).

В некоторых случаях значение $T_{1,i+1}$ можно уточнять простыми итерациями.

Для снижения трудоемкости расчета от расчета $T_{1,i+1}^n$ можно отказаться, когда потоки теплоты незначительно различаются в пределах $\Delta\tau$, т. е. когда $q_{ср,i+1} \approx q_{н,i+1} \approx q_{к,i+1}$. Это возможно для металлов или для тел с низкой

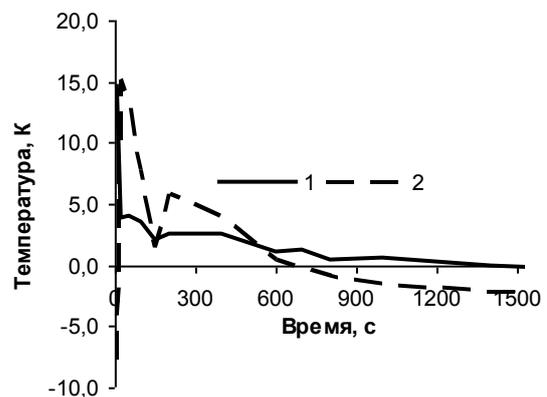
теплопроводностью, когда слабо изменяется интенсивность теплообмена.

Пока температурное возмущение не охватит всю пластину, ее среднюю температуру $T_{ср,пл}$ в конце интервала времени следует рассчитывать по формуле

$$T_{ср,пл} = T_{ср} R / R_n + T_n (R_n - R) / R_n. \quad (27)$$

Предлагаемым методом выполнен расчет для кирпичной стены, нагреваемой с одной стороны в среде с температурой $T_r = 900$ К при следующих исходных данных: $T_n = 300$ К, $a = 0,54 \cdot 10^{-6}$ м/с², $c = 1,5 \cdot 10^6$ Дж/м³, $\lambda = 0,81$ Вт/(м·К), $\alpha = 200$ Вт/(м²·К), $\sigma = 0$, $R_n = 0,36$ м, $\tau_k = 1500$ с, $\Delta\tau_{i+1}$.

Приближенное значение $T_{1,i+1}^n$, вычисленное по (26) при $\tau > 30$ с, отличалось от более точного значения не более чем на 2 К. При таких же данных выполнен расчет и приведены графические зависимости $q(\tau)$, $T_1(\tau)$, $R(\tau)$ в [10], поэтому на рисунке показаны только абсолютные погрешности расчета температуры поверхности $T_1(\tau)$. Погрешности определены по результатам расчета методом конечных разностей.



Абсолютные погрешности расчета температуры поверхности $T_1(\tau)$: 1 — предлагаемый метод; 2 — метод [10]

Погрешности расчета температуры по предлагаемому методу (см. рисунок) значительно меньше, чем по методу [10]. Кроме того, в отличие от метода [10], показатель степени n в (4) рассчитывается, а не задается, и выполняется условие (12) постоянства температуры в плоскости $X = 0$. (В методе [10] условие (12) не выполнялось и распределение температур $T(x)$ определялось с большей погрешностью.) Показатель степени n для принятых условий теплообмена изменялся от $n = 2,83$ до $n = 2,40$ (в [10] он был принят равным 4).

Более точное описание распределения температур позволит повысить точность расчета градиентов температур:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, \tau) = n a_1 / R,$$

вызывающих термические напряжения и разрушение материала.

Список литературы

1. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
2. **Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В.** Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций: учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2005. – 340 с.
3. **Пехович А.И., Жидких В.М.** Расчеты теплового режима твердых тел. – Л.: Энергия, 1968. – 304 с.
4. **Лисиенко В.Г., Волков В.В., Маликов Ю.К.** Улучшение топливоспользования и управление теплообменом в металлургических печах. – М.: Металлургия, 1988. – 230 с.
5. **Котенев В.И.** Приближенный метод решения задач нестационарной теплопроводности // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1989. – № 3. – С. 111–116.
6. **Губинский В.И.** Развитие численно-аналитических методов решения задач теплообмена // Труды Междунар. конф. «Экология и теплотехника – 1996». – Днепропетровск: Изд-во ГМАУ, 1996. – С. 76–78.
7. **Кудинов В.А., Стефанюк Е.В.** Задачи теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения // Известия АН. Энергетика. – 2008. – № 4. – С. 122–138.
8. **Соколов А.К.** Численно-аналитический метод расчета температурных полей многослойных пластин в начальной стадии нагрева // Известия АН Энергетика. – 2009. – № 1. – С. 138–151.
9. **Соколов А.К.** Математическое моделирование нагрева металла в газовых печах / ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2011. – 396 с.
10. **Соколов А.К., Сергашев Е.В., Якубина О.А.** Численно-аналитический метод расчета температурного поля полуограниченного тела, аппроксимированного степенными функциями // Вестник ИГЭУ. – 2015. – Вып. 1. – С. 59–64.
11. **Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V.** Analytical solution of the Stefan problem with account for the ablation and the temperature-disturbance front // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2012. – № 1(85). – P. 1441–1452.
12. **Ортогональные методы в задачах теплопроводности для многослойных конструкций / В.А. Кудинов, Е.В. Котова, А.В. Еремин, А.Э. Кузнецова // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. – 2013. – № 3. – С. 44–59.**
13. **Температурные напряжения в многослойном полом цилиндре при тепловом ударе на его внешней поверхности / В.А. Кудинов, А.В. Еремин, Е.В. Стефанюк, А.Э. Кузнецова // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2014. – № 1. – С. 30–35.**
14. **Обобщенные функции в задачах теплопроводности для многослойных конструкций / В.А. Кудинов, И.В. Кудинов, Е.В. Котова, А.Э. Кузнецова // Теплофизика высоких температур. – 2013. – Т. 51, № 5. – С. 1–11.**

References

1. Lykov, A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Heat exchange theory]. Moscow, Vysshaya shkola, 1967. 600 p.
2. Kudinov, V.A., Kartashov, E.M., Kalashnikov, V.V. *Analiticheskie resheniya zadach teploperenosa i ter-*

Соколов Анатолий Константинович,

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор кафедры безопасности жизнедеятельности,
телефон (4932) 26-99-37,
e-mail: sokolov@bjd.ispu.ru

Якубина Ольга Анатольевна,

ОАО «Зарубежэнергопроект»,
инженер,
e-mail: os_flora@mail.ru