

УДК 621.926

## Нелинейная модель измельчения смеси разнопрочных компонентов в струйной мельнице кипящего слоя<sup>1</sup>

Д.А. Осипов, В.П. Жуков  
ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
г. Иваново, Российская Федерация  
E-mail: zhukov-home@yandex.ru

### Авторское резюме

**Состояние вопроса:** Совместное измельчение смеси разнопрочных компонентов позволяет обогащать крупные и мелкие фракции смеси соответственно прочными и менее прочными компонентами. В энергетике совместное измельчение предлагается использовать для выделения из твердого топлива серного колчедана. Большинство существующих моделей описывает измельчение только одного компонента смеси. При измельчении двух компонентов моделируется обычно раздельное и независимое друг от друга протекание процессов в них. Такое независимое для каждого компонента описание измельчения приводит к существенной погрешности в результатах расчета. Таким образом, описание влияния компонентов смеси на их совместное измельчение и определение режимов работы, которые позволяют обеспечить требуемое разделение компонентов, является актуальной технологической задачей.

**Материалы и методы:** Построение нелинейной модели совместного измельчения компонентов проведено в рамках концепции описания совмещенных процессов на основе дискретных аналогов уравнения Больцмана.

**Результаты:** Для описания кинетики измельчения смеси компонентов предложена модель, которая позволяет учитывать нелинейные эффекты, связанные с влиянием кинетики измельчения одного компонента на кинетику измельчения другого компонента смеси. Разработана компьютерная программа для решения уравнений предложенной модели. Представлена методика оценки эффективности обогащения готового продукта целевым компонентом смеси. Приведены результаты расчетного анализа оценки возможного разделения компонентов с различной прочностью путем их совместного измельчения.

**Выводы:** Проведенные исследования позволяют развить концепцию моделирования совмещенных механических процессов на основе дискретных аналогов уравнения Больцмана на случай описания совместного измельчения смеси разнопрочных компонентов. Разработанная математическая модель служит основой для создания более эффективных методов механического обогащения и разделения разнопрочных компонентов смеси.

**Ключевые слова:** нелинейная модель, совместное измельчение, сыпучие материалы, разнопрочные компоненты, степень очистки, механические процессы, уравнение Больцмана.

## A nonlinear model of grinding a mixture of components with different grindability in a fluidized bed jet mill

D.A. Osipov, V.P. Zhukov  
Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation  
E-mail: zhukov-home@yandex.ru

### Abstract

**Background:** Cogrinding of a mixture of components of different strengths allows enriching fine and coarse fractions by stronger and less strong components, respectively. It is proposed to use cogrinding in power industry for iron pyrite isolation from solid fuels. Most existing models describe grinding of only one of the mixture components. When two components are ground, models are normally made separately and independently for each of the processes. Such independent description of components grinding leads to considerable calculation errors. Thus, it is an urgent task now to describe the effect of mixture components on their cogrinding and to determine the operation conditions allowing the required separation of the components.

**Materials and methods:** A nonlinear model of components cogrinding was built in accordance with the concept of combined process description based on Boltzmann equation discrete analogs.

**Results:** To describe the kinetics of grinding a mixture of components, we propose a model accounting for the nonlinear effects related to the influence of the grinding kinetics of one component on that of the other component in the mixture. We have developed a computer program for solving the equations of the proposed model. We also present a method of estimating the efficiency of enriching the end product with the target mixture component and the results of the design analysis of the estimation of possible division of components with different strength values through cogrinding.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-08-01684).

**Conclusions:** The studies conducted allowed us to expand the concept of modelling combined mechanical processes based on Boltzmann equation discrete analogs for the description of cogrinding of a mixture of components with different strength values. The developed mathematical model can be used as the basis for creating efficient methods of mechanical enrichment and division of mixture components with different strength values.

**Key words:** nonlinear model, cogrinding, granular materials, components with different strength values, enrichment degree, mechanical processes, Boltzmann equation.

DOI: 10.17588/2072-2672.2017.2.051-055

**Введение.** Из литературных источников известны различные подходы использования совместного измельчения смеси разнопрочных материалов для обогащения готового продукта целевым компонентом [1, 2]. В энергетике совместное измельчение предлагается использовать для выделения из твердого топлива серного колчедана [2], попадание которого в технологический цикл тепловых электрических станций приводит, с одной стороны, к сернистой коррозии газозооного тракта парового котла, а с другой стороны, к загрязнению окружающей среды окислами серы. Одним из способов выделения серного колчедана из угля на стадии подготовки топлива является селективное разрушение с последующей классификацией продуктов разрушения по крупности. Существующие модели [2, 3, 4], как правило, позволяют описывать измельчение только однокомпонентных материалов. При измельчении смеси из двух или более компонентов моделируется их раздельное и независимое друг от друга измельчение [3] или описывается измельчение модельного материала с усредненными прочностными характеристиками. Независимое описание измельчения каждого компонента приводит к существенной погрешности в результатах расчета, а описание измельчения материала с усредненными характеристиками не позволяет оценить обогащение смеси при селективном измельчении. Таким образом, исследование процесса совместного измельчения компонентов с учетом влияния каждого компонента на кинетику процесса является актуальной темой исследования для энергетической и смежных отраслей промышленности.

В качестве предмета исследования выбран нелинейный процесс совместного измельчения смеси разнопрочных компонентов, в качестве объекта исследования – струйная мельница кипящего слоя [5, 6]. Использование данного типа мельниц связано с широким распространением и эффективным использованием процессов и аппаратов с кипящим слоем в различных промышленных технологиях [5, 7, 8]. Кроме этого, данные мельницы позволяют совмещать в одном аппарате разрушение и классификацию по крупности, что обеспечивает своевременную эвакуацию мелких частиц, обогащенных менее прочным компонентом смеси, из рабочего объема установки [5].

Целью исследования является моделирование нелинейного процесса измельчения смеси компонентов для оценки условий, которые обес-

печивают эффективное разделение компонентов смеси.

**Методы исследования.** Для исследования кинетики процесса предложена математическая модель, построенная на основе кинетического уравнения Больцмана [9, 10], которое в последнее время широко используется для описания различных технологических процессов [4, 10]

$$f'_t + (v_k f)'_{x_k} + (a_k f)'_{v_k} = (f'_n)_t, (k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где  $f$  – искомая плотность распределения вещества по расчетному пространству;  $a$  – ускорение;  $f'_c$  – источниковый член уравнения, описывающий внешние потоки и переходы частиц между фракциями при измельчении; повторение индекса « $k$ » в слагаемых левой части показывает суммирование по этому индексу.

Для решения уравнения (1) применяется разработанный ранее матричный метод [11], в котором непрерывная плотность распределения вещества заменяется дискретным ее представлением по выделенным ячейкам расчетного пространства. Многомерное расчетное пространство для этого преобразуется в одномерную цепь ячеек, искомая плотность распределения вещества по ячейкам представляется одномерным вектором  $\mathbf{f} = \{f_i\}$ , где индекс  $i$  показывает номер элемента. Эволюция состояния системы во времени с указанием для каждой ячейки адреса ячеек, в которые возможен переход, и вероятности этих переходов  $p_{ij}$ , описывается выражением

$$f_i^{k_1+1} = \sum_j p_{ij} f_j^{k_1}, \quad (2)$$

где  $k_1$  – номер шага по времени.

Основываясь на ранее разработанном методе моделирования с использованием дискретных моделей уравнения Больцмана [4], для проведения расчетов согласно (2) необходимо предварительно определить вероятности переходов вещества между ячейками выбранного расчетного пространства.

Известные модели измельчения [2, 3, 4] позволяют описывать процесс либо с участием только одного компонента смеси, либо с участием материала с усредненными прочностными характеристиками. Для учета взаимного влияния одного компонента на кинетику измельчения другого составляется свое расчетное пространство для обоих компонентов. Частицы компонентов, находясь в разных расчетных областях, могут сталкиваться и обмениваться энергией. Между этими расчетными пространствами разрешается обмен энергией, но запрещается обмен веществ-

вом. Таким образом каждый компонент может оказывать влияние на кинетику измельчения другого компонента смеси. Для описания разрушения частиц предлагается использовать в правой части уравнения (1) популяционно-балансовую модель измельчения [3] в виде

$$(f_c)_t = \int_{\delta}^{\delta_{\max}} f(x, v, \xi, t) p(\delta, \xi, E) d\xi, \quad (3)$$

где  $\xi$  – размер разрушаемых частиц;  $\delta_{\max}$  – максимальный размер зерен;  $p(\delta, \xi, E)$  – функция разрушения, которая показывает долю материала фракции  $[\xi, \xi+d\xi]$ , переходящую после разрушения во фракцию  $[\delta, \delta+d\delta]$  при подводе к разрушаемой фракции энергии  $E = E(x, v, \xi, t)$ .

Для учета процесса измельчения необходимо определить вид функции распределения энергии разрушения по фазовому пространству  $E(x, v, \delta, t)$  и вид функции разрушения  $p(\delta, \xi, E)$ , соответствующий известному подводу энергии к ячейке для каждого компонента смеси. Для оценки энергии разрушения  $\tilde{e}_{ij}$  при ударе частиц с размерами  $\delta_i$  и  $\delta_j$  используется зависимость, полученная в рамках допущения о том, что энергия разрушения при ударе пропорциональна диссипации энергии [4]:

$$\tilde{e}_{ij} = -\frac{3(1-k)(\delta_i + \delta_j)^2}{2(\delta_i^3 + \delta_j^3)}(v_i - v_j)|v_i - v_j|\beta(\delta, v, x)v\Delta t, \quad (4)$$

где  $k$  – коэффициент восстановления скорости при ударе;  $\beta$  – объемная концентрация частиц в рассматриваемом объеме аппарата;  $\Delta t$  – шаг по времени.

Для определения суммарной энергии, которая подводится к  $i$ -й фракции при ее взаимодействии с другими частицами, необходимо просуммировать энергию (4) по тем классам крупности (ячейкам), которые взаимодействуют с наблюдаемой частицей. При известном подводе энергии к материалу вид функции разрушения находится с использованием принципа максимума энтропии [12] в виде

$$p_{ij} = e^{\mu_j \tilde{e}_{ij}} / \sum e^{\mu_j \tilde{e}_{ij}}, \quad (5)$$

где  $e_{ij} = C_R(1/\delta_i - 1/\delta_j)$  – удельная энергия, необходимая для разрушения частиц класса  $j$  до размера частиц класса  $i$ , определяемая в соответствии с энергетическим законом измельчения Риттингера [1, 3];  $\mu_j$  – коэффициент, значение которого определяется из уравнения баланса энергий [4].

В качестве интегральной оценки эффективности обогащения был использован показатель степени очистки, значение которого при полном выделении ключевого компонента равно единице, а при отсутствии разделения равно нулю:

$$\varepsilon = M_1 / M_{10} - M_2 / M_{20}, \quad (6)$$

где  $\varepsilon$  – степень очистки смеси;  $M_1, M_2$  – массопотоки компонентов с разной прочностью на выходе из установки;  $M_{10}, M_{20}$  – аналогичные величины на входе в установку.

Значения  $M_1, M_2$  определялись в ходе расчетных исследований по предложенной модели измельчения (2)–(5) как с учетом, так и без учета обмена энергией между компонентами смеси. Кроме модели измельчения для разделения продуктов разрушения смеси и определения степени очистки (6) использована модель классификации, в качестве которой выбирается модель идеального разделения [3] с одинаковым для каждого компонента граничным размером разделения. Для характеристики прочностных свойств компонентов используется коэффициент пропорциональности  $C_R$  из энергетического закона измельчения Риттингера [3].

**Результаты исследования.** Результаты расчетного анализа в виде зависимости степени очистки компонентов от числа актов разрушения при  $C_{R1}/C_{R2} = 16,6$  изображены на рис. 1, где кривая 1 является результатом совместного измельчения, при котором учитывается передача энергии между частицами разных компонентов, кривая 2 – без учета обмена энергии между частицами разных компонентов.

При учете энергообмена между частицами разных компонентов показатель степени очистки смеси достигает более высоких значений, что связано с более интенсивным подводом энергии и избирательностью или селективностью этого подвода энергии по сравнению с раздельным моделированием измельчения.

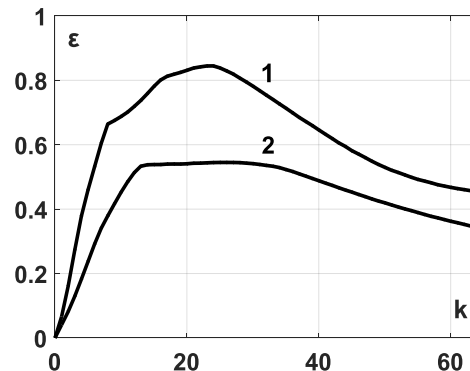


Рис. 1. Зависимость степени очистки компонентов смеси от времени процесса при  $C_{R1}/C_{R2} = 16,66$ : 1 – с учетом взаимного влияния компонентов друг на друга; 2 – без учета

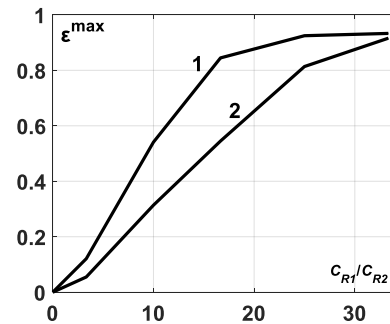


Рис. 2. Зависимость максимальных значений степени очистки  $\varepsilon^{\max}$  от относительной прочности компонентов смеси

На рис. 2 показаны результаты расчетного исследования зависимости максимальной степени очистки от относительной прочности компонентов, которая оценивается отношением коэффициентов в энергетическом законе Риттингера  $C_R$ .

Анализ полученных результатов показывает, что при одинаковой прочности компонентов ( $C_{R1}/C_{R2} = 1$ ) обогащения практически не происходит. При большом различии в прочностных свойствах компонентов ( $C_{R1}/C_{R2} > 30$ ) степень очистки, согласно результатам расчетов, приближается к единице как в рамках линейной (2), так и в рамках нелинейной (1) модели. При этом результаты моделирования в рамках линейной и нелинейной моделей дают практически одинаковые значения для одинаковых и сильно отличающихся значений относительной прочности. При промежуточных значениях относительной прочности компонентов ( $1 < C_{R1}/C_{R2} < 30$ ) линейная модель приводит к существенным погрешностям, которые для величины степени очистки достигают 35 %.

**Выводы.** Представленный подход, основанный на использовании дискретных аналогов уравнения Больцмана, позволил сформулировать и решить практическую задачу по селективному измельчению и разделению смеси разнопрочных компонентов в струйной мельнице кипящего слоя. В ходе исследований показана существенная погрешность в оценке показателя степени очистки смеси без учета нелинейных эффектов, связанных с обменом энергией между компонентами. Полученные результаты позволяют проводить оценку максимально возможного разделения компонентов при их совместном измельчении. Дальнейшее развитие предложенного подхода планируется проводить в направлении учета реальных характеристик классификатора и структуры многостадийных технологических систем измельчения.

#### Список литературы

1. Ревнивцев В.И. Селективное разрушение минералов. – М.: Недра, 1988. – 286 с.
2. Жуков В.П., Катыльмов А.В., Мизонов В.Е. Расчетно-экспериментальное исследование разделения разнопрочностных материалов в совмещенном распределенном процессе дробления-классификации // Теор. основы хим. технологии. – 1997. – Т. 31, № 3. – С. 333–335.
3. Mizonov V.E., Zhukov V.P., Bernotat S. Simulation of Grinding: New Approaches. – Ivanovo, 1997. – 108 p.
4. Жуков В.П., Беляков А.Н. Моделирование совмещенных гетерогенных процессов на основе дискретных моделей уравнения Больцмана // Теор. основы хим. технологии. – 2017. – Т. 51, № 1. – С. 78–84.
5. Fukunaka T., Golman B., Shinohara K. Batch grinding kinetics of Ethenzamide particles by fluidized-bed jet-milling // International Journal of Pharmaceutics. – 2006. – 311. – P. 89–96.
6. Wang, Y., Peng, F. Parameter effects on dry ne pulverization of alumina particles in a uidized bed opposed jet mill // Powder Technol. – 2011. – 214, N 2. – P. 269–277.

7. Митрофанов А.В., Мизонов В.Е., Tannous K. Математическая модель эволюции состояния псевдоожиженного слоя при влагопереносе // Известия высших учебных заведений. Сер.: Химия и химическая технология. – 2015. – Т. 58, вып. 4 – С. 75–78.

8. Митрофанов А.В. Математическая модель эволюции состояния слоя дисперсного топлива при нагреве и сушке в плотном и псевдоожиженном слое // Вестник ИГЭУ. – 2015. – Вып. 2. – С. 67–70.

9. Веденягин В.В. Кинетическое уравнение Больцмана и Власова. – М.: Физматлит, 2001. – 112 с.

10. Aristov V.V., Rovenskaya O.I. Application of the Boltzmann kinetic equation to the eddy problems // Computers and Fluids. – 2011. – 50. – P. 189–198.

11. Свид. 2010612671 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Расчет многомерных совмещенных процессов измельчения, классификации в сыпучих средах / А.Н. Беляков, В.П. Жуков, А.А. Власюк, А.Е. Барочкин; от 19 апреля 2010 года.

12. Вильсон А. Энтропийные методы моделирования сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 248 с.

#### References

1. Revnitssev, V.I. *Selektivnoe razrushenie mineralov* [Selective destruction of minerals]. Moscow, Nedra, 1988. 286 p.
2. Zhukov, V.P., Katalymov, V.Ye., Mizonov, V.Ye. Raschetno-eksperimental'noe issledovanie razdelenie raznoprochnostnykh materialov v sovmeshchennom raspredelennom protsesse drobleniya klassifikatsii [Computational experimental study of dividing materials with different strength values in distributed cogrinding-classification]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*, 1997, vol. 31, no. 3, pp. 333–335.
3. Mizonov, V.E., Zhukov, V.P., Bernotat, S. Simulation of Grinding: New Approaches. Ivanovo, 1997. 108 p.
4. Zhukov, V.P., Belyakov, A.N. Modelirovanie sovmeshchennykh geterogennykh protsessov na osnove diskretnykh modeley uravneniya Bol'tsmana [Modelling of combined heterogeneous processes based on discrete models of Boltzmann equation]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*, 2017, vol. 51, no. 1, pp. 78–84.
5. Fukunaka, T., Golman, B., Shinohara, K. Batch grinding kinetics of Ethenzamide particles by fluidized-bed jet-milling. *International Journal of Pharmaceutics*, 2006, 311, pp. 89–96.
6. Wang, Y., Peng, F. Parameter effects on dry ne pulverization of alumina particles in a fluidized bed opposed jet mill. *Powder Technol*, 2011, 214, no. 2, pp. 269–277.
7. Mitrofanov, A.V., Mizonov, V.Ye., Tannous, K. Matematicheskaya model' evolyutsii sostoyaniya psevdoozhizhennogo sloya pri vlagoperenose [Mathematical model of state evolution of fluidized bed during moisture transfer]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Seriya Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya*, 2015, vol. 58, issue 4, pp. 75–78.
8. Mitrofanov, A.V. Matematicheskaya model' evolyutsii sostoyaniya sloya dispersnogo topliva pri nagreve i sushke v plotnom i psevdoozhizhennom sloe [Mathematical model of state evolution of dispersed fuel bed under heating and drying in a dense fluidized bed]. *Vestnik IGEU*, 2015, issue 2, pp. 67–70.
9. Vedenyagin, V.V. *Kineticheskoe uravnenie Bol'tsmana i Vlasova* [Boltzmann-Vlasov kinetic equation]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 112 p.

10. Aristov, V.V., Rovenskaya, O.I. Application of the Boltzmann kinetic equation to the eddy problems. *Computers and Fluids*, 2011, 50, pp. 189–198.

11. Belyakov, A.N., Zhukov, V.P., Vlasyuk, A.A., Barochkin, A.E. *Raschet mnogomernykh sovmeshchennykh protsessov izmel'cheniya, klassifikatsii v sypuchikh sredakh* [Calculation of multidimensional cogrinding and classification processes in granular media]. Svidetel'stvo o

gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM No. 2010612671 [Certificate No. 2010612671 Russian Federation. Certificate of computer program state registration].

12. Vilson, A. *Entropiynye metody modelirovaniya slozhnykh sistem* [Entropy methods of complex system modelling]. Moscow, Nauka, 1978. 248 p.

*Осипов Дмитрий Андреевич,*

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,

аспирант кафедры прикладной математики,

адрес: г. Иваново, ул. Рабфаковская, д. 34, кор. А, ауд. 202,

телефон (4932) 26-97-45,

e-mail: dima-link@mail.ru

*Osipov Dmitry Andreyevich,*

Ivanovo State Power Engineering University,

Post-Graduate Student of the Applied Mathematics Department,

address: Ivanovo, Rabfakovskaya St., 34, Building A, Room 202,

telephone (4932) 26-97-45,

e-mail: dima-link@mail.ru

*Жуков Владимир Павлович,*

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,

доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой прикладной математики,

адрес: г. Иваново, ул. Рабфаковская, д. 34, кор. А, ауд. 202,

телефон (4932) 26-97-45,

e-mail: zhukov-home@yandex.ru

*Zhukov Vladimir Pavlovich,*

Ivanovo State Power Engineering University,

Doctor of Engineering Sciences (Postdoctoral degree), Head of the Applied Mathematics Department,

address: Ivanovo, Rabfakovskaya St., 34, Building A, Room 202,

telephone (4932) 26-97-45,

e-mail: zhukov-home@yandex.ru