

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК 536. 2 (075)

МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ СРЕДЫ¹

Е.В. КОТОВА, А.В. ЕРЕМИН, В.А. КУДИНОВ, В.К. ТКАЧЕВ, А.Э. КУЗНЕЦОВА
ФГБОУВО «Самарский государственный технический университет»,
г. Самара, Российская Федерация
E-mail: totig@yandex.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса. Получение аналитических решений задач теплопроводности с переменными физическими свойствами среды с помощью классических аналитических методов представляет большие математические трудности. Известные выражения, представленные сложными бесконечными рядами, включающими одновременно функции Бесселя двух родов и гамма-функции, являются по сути численными ввиду необходимости численного решения сложных трансцендентных уравнений относительно собственных чисел краевой задачи. Такие решения малоприспособны для использования их в инженерных приложениях и особенно в случаях, когда решение данной задачи является промежуточной стадией исследования каких-либо других задач (термоупругости, обратных задач, задач управления и др.), для эффективного решения которых требуются аналитические решения исходных задач. В связи с чем разработка каких-либо других методов получения аналитических решений указанных задач, хотя бы и приближенных, является актуальной проблемой.

Материалы и методы. В процессе исследования использованы дополнительные граничные условия и дополнительные искомые функции в интегральном методе теплового баланса.

Результаты. Получены высокоточные аналитические решения нестационарной задачи теплопроводности с неоднородными физическими свойствами среды для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях первого рода. Исходная задача для уравнения в частных производных сводится к решению двух задач, в которых интегрированию подлежат обыкновенные дифференциальные уравнения. Дополнительные граничные условия определяются в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению исходного дифференциального уравнения (в частных производных) в граничных точках и на фронте температурного возмущения (для первой стадии процесса).

Выводы. Комбинация методов с конечной и бесконечной скоростью распространения теплоты позволила получить высокоточные аналитические решения во всем диапазоне времени нестационарного процесса, включая малые и сверхмалые его значения. Решения имеют простой вид алгебраических степенных полиномов, не включающих специальные функции (Бесселя, Лежандра, гамма-функции и др.). Ввиду отсутствия необходимости непосредственного интегрирования исходных уравнений по пространственной переменной и сведения их к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно дополнительных искомым функций, рассмотренный метод может быть применен к решению сложных краевых задач, дифференциальные уравнения которых не допускают разделения переменных (нелинейных, с нелинейными граничными условиями и источниками теплоты и др.).

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-38-00029 мол._а.

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, переменные физические свойства среды, дополнительные искомые функции, дополнительные граничные условия, фронт температурного возмущения

METHOD OF ADDITIONAL UNKNOWN FUNCTIONS IN HEAT CONDUCTIVITY PROBLEMS WITH VARIABLE PHYSICAL PROPERTIES OF THE MEDIUM

E.V. KOTOVA, A.V. EREMIN, V.A. KUDINOV, V.K. TKACHEV, A.E. KUZNETSOVA
Samara State Technical University, Samara, Russian Federation
E-mail: totig@yandex.ru

Abstract

Background. Finding analytical solutions to the problems of thermal conductivity with variable physical properties of the medium by classical analytical methods is very complicated mathematically. The known expressions representing complex infinite series including two types of Bessel functions and gamma-functions are, in fact, numerical as they require a numerical solution to complex transcendental equations with eigenvalues of the boundary problem. Such solutions can hardly be used in engineering applications, especially in cases when a solution to a certain problem is only an intermediate stage in other problems (such as thermoelasticity and control problems, inverse problems, etc.) which can be solved effectively only by finding analytical solutions to the initial problems. Therefore, an urgent problem now is to develop new methods of obtaining analytical solutions to the abovementioned problems, at least approximate ones.

Materials and methods. The study employed methods of additional boundary conditions and additional unknown functions in the integral method of heat balance.

Results. High-precision approximate analytical solutions to the transient heat conduction problem with non-homogeneous physical properties of the medium for an infinite plate under symmetric boundary conditions of the first type have been obtained. The initial problem for partial differential equations is reduced to two problems in which ordinary differential equations are integrated. Additional boundary conditions are defined in such a way that their fulfillment in accordance with the new method is equivalent to the result of solving the initial partial differential equation at the boundary points and at the temperature perturbation front (for the first stage of the process).

Conclusions. By combining methods with finite and infinite heat propagation rate we have been able to obtain high-precision analytical solutions for the whole time range of the unsteady process including its small and ultra small values. The solutions look like simple algebraical polynomials not including special functions (Bessel, Legendre, gamma-functions and others). Since it is not necessary to directly integrate the initial equations by the space variable and to reduce them to ordinary differential equations with additional unknown functions, the considered method can be used for solving complex boundary problems in which differential equations do not allow distinguishing between the variables (into nonlinear, with linear boundary conditions and heat sources, etc.).

Key words: transient heat conduction, variable physical properties of the medium, additional unknown functions, additional boundary conditions, temperature perturbation front

DOI: 10.17588/2072-2672.2019.2.059-070

Введение. Необходимость решения краевых задач с переменными по координатам коэффициентами переноса связана с использованием в технике высокоинтенсивных процессов. Кроме того, многие задачи конвективной диффузии, теплопроводности, гидродинамики вязкой жидкости и другие путем соответствующих подстановок могут быть сведены к виду уравнений теплопроводности с переменными физическими свойствами среды [1].

Известные решения такого типа задач, найденные классическими методами,

имеют вид сложных функциональных рядов, содержащих одновременно функции Бесселя первого и второго рода и гамма-функции. Так как функции Бесселя представляются в виде бесконечных степенных рядов, то решение краевой задачи принимает вид двойного или тройного ряда. Кроме того, содержащиеся в них собственные числа находятся из решения сложных трансцендентных уравнений, также включающих функции Бесселя. Решения таких уравнений могут быть получены лишь численными методами. В связи с этим получа-

емые аналитические решения являются по сути численными.

Методы исследования. Для нахождения приближенных и точных аналитических решений краевых задач большое распространение получили ортогональные методы взвешенных невязок (Л.В. Канторовича, Бубнова – Галеркина, интегральный метод теплового баланса и др.) [2–10]. Среди них наиболее простым и универсальным является интегральный метод. При его использовании процесс теплопроводности разделяется на две стадии, первая из которых характеризуется постепенным продвижением фронта температурного возмущения от поверхности к центру, а вторая – изменением температуры по всему объему тела. Для каждой стадии вводятся дополнительные искомые функции. Дополнительная функция для первой стадии описывает закономерность перемещения фронта возмущения по координате во времени, а во второй – закон изменения температуры во времени в центре пластины. Таким образом, обе эти функции зависят лишь от времени, и поэтому их введение позволяет свести решение исходного уравнения в частных производных к интегрированию двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно дополнительных искомых функций. Важное преимущество метода в том, что при его использовании практически не накладывается каких-либо ограничений на вид дифференциальных операторов краевых задач – они могут быть нелинейными, с переменными физическими свойствами среды и др. Используя эти методы для решения многих сложных задач математической физики, не поддающихся решению классическими аналитическими методами, в ряде случаев удается получить аналитические решения [5–10].

Существенной проблемой интегрального метода является низкая точность, связанная с трудностями увеличения числа членов ряда (числа приближений) получаемого решения ввиду отсутствия условий, из которых могут быть определены его неизвестные коэффициенты. Для повышения точности в [7, 8, 13] рассматриваются методы построения дополнительных граничных условий, определяемых в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению исходного уравнения

в граничных точках. В [11, 12] показано, что выполнение уравнения на границах приводит к его выполнению и внутри области с точностью, определяемой числом дополнительных граничных условий. Следовательно, используя необходимое количество дополнительных граничных условий, можно получать решения практически с заданной точностью. Отметим, что в [9, 10] на основе интегрального метода разработан эффективный высокоточный метод, связанный с построением дополнительных граничных характеристик.

Результаты исследования. В качестве примера применения метода дополнительных искомых функций и дополнительных граничных условий рассмотрим получение решения нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины с переменными физическими свойствами среды при симметричных граничных условиях первого рода:

$$c(x)\gamma(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right], \quad (1)$$

$$(t > 0; 0 < x < \delta);$$

$$T(x,0) = T_0; \quad (2)$$

$$\partial T(0,t)/\partial x = 0; \quad (3)$$

$$T(\delta,t) = T_1, \quad (4)$$

где T – температура; x – координата; t – время; $\lambda(x)$ – коэффициент теплопроводности; $c(x)$ – теплоемкость; $\gamma(x)$ – плотность; T_0 – начальная температура; T_1 – температура стенки при $x = \delta$; δ – половина толщины пластины.

Найдем решение задачи (1)–(4) в случае, когда произведение $c\gamma = \text{const}$, а коэффициент теплопроводности λ является экспоненциальной функцией координаты x :

$$\lambda(x) = \lambda_0 \exp(-mx), \quad (5)$$

где $m > 0$ – коэффициент, характеризующий интенсивность изменения коэффициента теплопроводности по координате x ; $\lambda_0 = \text{const}$ – коэффициент теплопроводности пластины при $x = 0$.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}; \quad Fo = \frac{a_0 t}{\delta^2}; \quad a_0 = \frac{\lambda_0}{c\gamma}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}, \quad (6)$$

где Θ – безразмерная температура; Fo – число Фурье; a_0 – коэффициент темпера-

туропроводности пластины при $x=0$; ξ – безразмерная координата.

С учетом обозначений (6) задача (1)–(4) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[e^{-v\xi} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right], \quad (7)$$

$$(Fo > 0; 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (8)$$

$$\partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi = 0; \quad (9)$$

$$\Theta(1, Fo) = 1, \quad (10)$$

где $v = m\delta$.

Разделим процесс теплообмена на две стадии по времени: $0 < Fo \leq Fo_1$ и $Fo_1 \leq Fo < \infty$. Для этого введем движущуюся во времени границу (фронт температурного возмущения), разделяющую исходную область $0 < \xi < 1$ на две подобласти $q_1(Fo) < \xi \leq 1$ и $0 < \xi \leq q_1(Fo)$, где $q_1(Fo)$ – функция, определяющая продвижение границы раздела во времени (рис. 1, а).

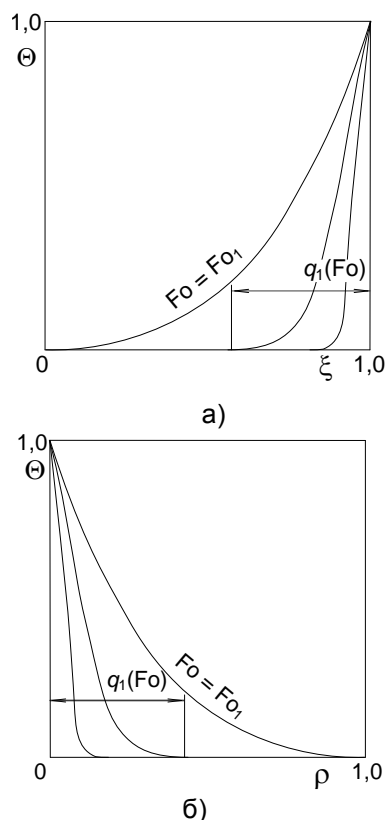


Рис. 1. Расчетная схема теплообмена

Первая стадия заканчивается при достижении движущейся границей центра пластины ($\xi=0$), т. е. при $Fo = Fo_1$. При этом понятие фронта возмущения теряет смысл и начинается вторая стадия теплообмена, в которой изменение температуры

происходит по всей толщине пластины: $0 < \xi < 1$. Математическая постановка задачи для этой стадии будет рассмотрена ниже. Применительно к первой стадии процесса математическая постановка задачи после введения независимой переменной $\rho = 1 - \xi$ записывается в следующем виде (рис. 1, б):

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[e^{-v(1-\rho)} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right], \quad (11)$$

$$(0 < Fo \leq Fo_1; 0 < \rho < q_1(Fo));$$

$$\Theta(0, Fo) = 1; \quad (12)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = 0; \quad (13)$$

$$\partial \Theta(q_1, Fo) / \partial \rho = 0. \quad (14)$$

Задача (11)–(14) не содержит начального условия (8), так как за пределами фронта температурного возмущения она вообще не определена. Так как в начальный момент времени ($Fo=0$) величина фронта температурного возмущения равна нулю, то в качестве начального условия принимается условие вида $q_1(0) = 0$. Задача (11)–(14) не содержит также граничного условия вида (9), так как оно не влияет на процесс теплообмена в первой его стадии.

Введение фронта температурного возмущения означает использование допущения о конечной скорости распространения теплоты, несмотря на то, что решению подлежит параболическое уравнение (11), описывающее бесконечную ее скорость. Разрешение данного противоречия будет дано ниже.

Решение задачи (11)–(14) разыскивается в виде

$$\Theta(\rho, Fo) = \sum_{k=0}^n a_k(q_1) \rho^k, \quad (15)$$

где $a_k(q_1)$ – неизвестные коэффициенты, определяемые из условий (12)–(14). После подстановки (15) (при $n=2$) в (12)–(14) относительно $a_k(q_1)$, ($k=0, 1, 2$) получаем систему трех алгебраических линейных уравнений, из решения которой находим $a_0 = 1$; $a_1 = -2/q_1$; $a_2 = 1/q_1^2$.

С учетом найденных значений коэффициентов $a_k(q_1)$, ($k=0, 1, 2$) соотношение (15) примет вид

$$\Theta(\rho, Fo) = (1 - \rho/q_1)^2. \quad (16)$$

Для нахождения неизвестной функции $q_1(Fo)$ составляется невязка уравне-

ния (11) и определяется интеграл от нее в пределах толщины прогретого слоя (интеграл теплового баланса):

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} d\rho = \int_0^{q_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[e^{-\nu(1-\rho)} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right] d\rho. \quad (17)$$

Вычисляя интегралы в (17), получаем

$$q_1 dq_1 = 6 \exp(-\nu) dFo. \quad (18)$$

Решение уравнения (18) при начальном условии $q_1(0) = 0$ имеет вид

$$q_1(Fo) = 2\sqrt{3Fo \exp \nu} / \exp \nu. \quad (19)$$

Положив $q_1(Fo_1) = 1$ (при $\nu = 0,01$), находим время $Fo_1 = 0,084$, при котором фронт температурного возмущения достигает координаты $\rho = 1$.

Формулы (16), (19) являются решением задачи (11)–(14) в первом приближении. Сравнение результатов расчетов по формуле (16) с решением методом конечных разностей позволяет заключить, что в диапазоне $0,025 < Fo \leq 0,005$ их расхождение не превышает 6%. Повышение точности связано с увеличением числа членов ряда (15), неизвестные коэффициенты которого будем находить из основных (12)–(14) и дополнительных граничных условий. Отметим, что во втором и каждом последующем приближении необходимо использовать по три дополнительных граничных условия – одно при $\rho = 0$ и два других при $\rho = q_1(Fo)$. Для их получения будем последовательно дифференцировать граничные условия (12)–(14) по переменной Fo , а уравнение (11) по переменной ρ . Сравнивая получающиеся при этом соотношения, можно найти необходимое количество дополнительных граничных условий. Для получения первого из них продифференцируем (12) по Fo :

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} = 0. \quad (20)$$

Уравнение (11) запишем для точки $\rho = 0$:

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} = \nu e^{-\nu} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} + e^{-\nu} \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=0}. \quad (21)$$

Сравнивая (20) и (21), получаем первое дополнительное граничное условие:

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \rho^2} + \nu \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \rho} = 0. \quad (22)$$

Для получения второго дополнительного граничного условия продифференцируем соотношение (13) по переменной Fo :

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} \Big|_{\rho=q_1} = 0. \quad (23)$$

Запишем уравнение (11) для $\rho = q_1(Fo)$:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} \Big|_{\rho=q_1} = \nu e^{-\nu(1-q_1)} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=q_1} + e^{-\nu(1-q_1)} \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=q_1}. \quad (24)$$

Сравнивая (23) и (24), с учетом (14) получим второе дополнительное граничное условие:

$$\frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \rho^2} = 0. \quad (25)$$

Для получения третьего дополнительного граничного условия продифференцируем соотношение (14) по переменной Fo :

$$\frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo \partial \rho} \Big|_{\rho=q_1} = 0. \quad (26)$$

Дифференцируя уравнение (11) по переменной ρ и применяя полученное соотношение к точке $\rho = q_1(Fo)$, с учетом (14) и (25) получаем

$$\frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo \partial \rho} \Big|_{\rho=q_1} = e^{\nu(q_1-1)} \frac{\partial^3 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^3} \Big|_{\rho=q_1}. \quad (27)$$

Сравнивая (26) и (27), находим третье дополнительное граничное условие:

$$\frac{\partial^3 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \rho^3} = 0. \quad (28)$$

Подставляя (15), ограничиваясь шестью членами ряда, в основные (12)–(14) и дополнительные (22), (25), (28) граничные условия относительно $a_k(q_1)$, ($k = \overline{0, 5}$) будем иметь систему шести алгебраических линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + a_3\rho^3 + a_4\rho^4 + a_5\rho^5) \Big|_{\rho=0} &= 1, \\ a_0 + a_1q_1 + a_2q_1^2 + a_3q_1^3 + a_4q_1^4 + a_5q_1^5 &= 0, \\ a_1 + 2a_2q_1 + 3a_3q_1^2 + 4a_4q_1^3 + 5a_5q_1^4 &= 0, \\ a_1\nu - 2a_2 &= 0, \\ a_2 + 3a_3q_1 + 6a_4q_1^2 + 10a_5q_1^3 &= 0, \\ a_3q_1 + 6a_4q_1 + 10a_5q_1^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Ввиду высоких степеней производных в дополнительных граничных услови-

ях система уравнений (29) имеет цепочный вид, что существенно упрощает процесс получения ее решения. Из решения системы уравнений (29) находим:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1; \quad a_1 = 20/(q_1 r); \quad a_2 = a_1/2; \\ a_3 &= 20(vq_1 + 2)/(q_1^3 r); \\ a_4 &= 5(3vq_1 + 8)/(q_1^4 r); \\ a_5 &= 4(vq_1 + 3)/q_1^5 r; \quad r = vq_1 + 8. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя (30) в (15), получаем

$$\Theta(\rho, Fo) = \frac{(12\rho + 8q_1 + vq_1^2 + 4vq_1\rho)(\rho - q_1)^4}{(vq_1 + 8)q_1^5}. \quad (31)$$

Подставляя (31) в интеграл теплового баланса (17), относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$ получаем следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dq_1}{dFo} = \frac{60vq_1 + 480}{v^2 q_1^3 + 16vq_1^2 + 48q_1}. \quad (32)$$

Следуя методу [13], находится приближенное аналитическое решение уравнения (32):

$$q_1(Fo) = \mu Fo^\lambda, \quad (33)$$

$$\text{где } \mu = 1/(Fo_1^*)^\lambda; \quad Fo_1 = \frac{A}{2} - \frac{v}{90} - \frac{v^2}{1280} - \frac{1}{40};$$

$$\lambda = A - \frac{209v^3 + 1312v^2 + 2304}{192v^2 + 3072v + 9216};$$

$$A = \left(\frac{81v^5 + 4104v^4 + 83008v^3 + 805376v^2}{3317600v + 265420800} + \frac{3621888v + 597196}{3317600v + 265420800} \right)^{1/2}.$$

Например, при $v = 0,01$ $\mu = 4,47235$;

$\lambda = 0,5$; $Fo_1^* = 0,05$ – время достижения фронтом температурного возмущения координаты $\rho = 1$ во втором приближении.

Результаты расчетов перемещения фронта температурного возмущения по формуле (19) (решение уравнения (18)), а также по формуле (33) (решение уравнения (32)) в сравнении с решением уравнения (32) численным методом, приведены на рис. 2. Их анализ показывает практическое совпадение численного решения с результатами, полученными по формуле (33). Следовательно, она с достаточной степенью точности может быть использована в качестве аналитического решения уравнения (32).

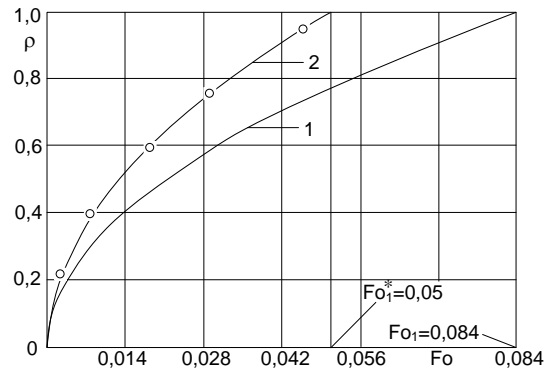


Рис. 2. Перемещение фронта температурного возмущения $q_1(Fo)$ по координате ρ во времени Fo ($v = 0,01$): 1 – по формуле (19) (решение уравнения (18)); 2 – по формуле (33) (решение уравнения (32)); \circ – численное решение

Анализ результатов расчетов перемещения фронта температурного возмущения $q_1(Fo)$ показывает, что с увеличением числа приближений время достижения координаты $\rho = 1$ уменьшается с $Fo_1 = 0,084$ (в первом приближении) до $Fo_1^* = 0,05$ (во втором). И в пределе при $n \rightarrow \infty$ $Fo_1 \rightarrow 0$, что свидетельствует о приближении к описываемой уравнением (11) бесконечной скорости распространения теплоты. Следовательно, указанное выше противоречие, связанное с определением фронта температурного возмущения в краевой задаче для параболического уравнения теплопроводности, оказывается разрешенным. Необходимость введения фронта возмущения в данном случае связана лишь с упрощением процесса получения приближенного аналитического решения фактически нелинейного дифференциального уравнения с переменными свойствами среды (нелинейность второго рода).

Соотношения (31), (33) представляют решение задачи (11)–(14) во втором приближении. Результаты расчетов по формуле (31) в сравнении с решением задачи (11)–(14) методом конечных разностей для $v = 0,01$ приведены на рис. 3. Их анализ показывает, что в диапазоне $0,001 < Fo \leq 0,05$ расхождение результатов не превышает 0,5 %.

Во второй стадии процесса, соответствующей времени $Fo_1 \leq Fo < \infty$, понятие фронта температурного возмущения теряет смысл. Теплообмен в данном случае происходит по всей толщине пластины, и

математическая постановка задачи приводится к виду

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[e^{-\nu(1-\rho)} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right], \quad (34)$$

$$(Fo_1 \leq Fo < \infty; 0 < \rho < 1);$$

$$\Theta(0, Fo) = 1; \quad (35)$$

$$\partial \Theta(1, Fo) / \partial \rho = 0. \quad (36)$$

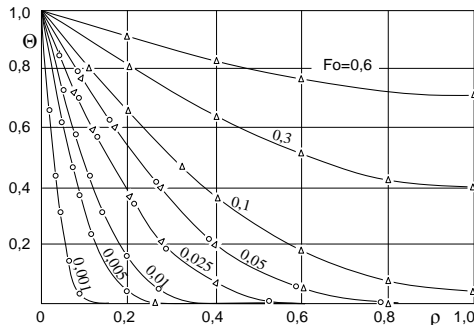


Рис. 3. Распределение температуры в пластине ($\nu = 0,01$): Δ – по формуле (39) (второе приближение); \circ – по формуле (31); ——— – метод конечных разностей

Введем дополнительную искомую функцию

$$q_2(Fo) = \Theta(1, Fo), \quad (37)$$

характеризующую изменение температуры во времени в центре пластины. Так как она является искомой величиной задачи (34)–(36), то ее использование данную задачу не изменяет, а является лишь вспомогательным средством, позволяющим существенно упростить процесс получения ее аналитического решения.

Задачи (11)–(14) и (34)–(36) при $Fo = Fo_1$, т. е. при $q_1(Fo_1) = 1$, полностью совпадают. В связи с этим начальное условие для уравнения (34) приводится к соотношению (16), в котором следует положить $q_1(Fo_1) = 1$:

$$\Theta(\rho, Fo_1) = (1 - \rho)^2. \quad (38)$$

Решение задачи (34)–(38) принимается в виде

$$\Theta(\rho, Fo) = \sum_{k=0}^n b_k(q_2) \rho^k, \quad (39)$$

где $b_k(q_2)$ – неизвестные коэффициенты, определяемые из условий (35)–(37). Подставляя (39), ограничиваясь тремя членами ряда, в (35)–(37) относительно b_0 , b_1 , b_2 будем иметь систему трех алгебраических уравнений, из решения которой находим: $b_0 = 1$; $b_1 = -2(1 - q_2)$; $b_2 = 1 - q_2$. Соотношение (39) с учетом найденных значе-

ний коэффициентов $b_k(q_2)$ ($k = 0, 1, 2$) принимает вид

$$\Theta(\rho, Fo) = 1 - \rho(2 - \rho)(1 - q_2(Fo)). \quad (40)$$

Так как при $Fo = Fo_1$ $q_2(Fo_1) = 0$, то соотношение (40) приводится к формуле (38) и, следовательно, уже на этой стадии получения решения начальное условие (38) для функции $\Theta(\rho, Fo_1)$ оказывается выполненным.

Потребуем, чтобы соотношение (40) удовлетворяло не уравнению (34), а некоторому осредненному по пространственной переменной уравнению, т. е. интегралу теплового баланса вида

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} d\rho = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} \left[e^{-\nu(1-\rho)} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right] d\rho. \quad (41)$$

Подставляя (40) в (41), относительно неизвестной функции $q_2(Fo)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dq_2}{dFo} = -3(q_2 - 1) \exp(-\nu). \quad (42)$$

Интегрируя уравнение (42), находим $q_2(Fo) = 1 - C_1 \exp[-3Fo \exp(-\nu)]$,

где C_1 – константа интегрирования, определяемая из начального условия $q_2(Fo_1) = 0$. Формула для нее будет иметь вид $C_1 = \exp[3Fo_1 \exp(-\nu)]$.

Соотношение (40) с учетом (43) принимает вид

$$\Theta(\rho, Fo) = 1 - \rho(2 - \rho) \exp[-3(Fo - Fo_1) \exp(-\nu)]. \quad (44)$$

Соотношение (44) представляет решение задачи (34)–(38) в первом приближении. Оно точно удовлетворяет граничным условиям (35), (36) и начальному условию (38) и приближенно (в первом приближении) – уравнению (34). Отметим, что интеграл теплового баланса (41) решением (44) удовлетворяется точно. Анализ результатов расчетов по формуле (44) в сравнении с расчетом по методу конечных разностей позволяет заключить, что в диапазоне $Fo_1 \leq Fo < \infty$ их расхождение не превышает 6 %.

Для повышения точности решения необходимо увеличивать число членов ряда (39), для определения неизвестных коэффициентов которого будем использовать основные (35)–(37) и дополнительные граничные условия, определяемые таким образом, чтобы искомое решение удовлетворяло уравнению (34) в граничных точ-

ках $\rho = 0$ и $\rho = 1$. Формула для первого из них, получаемого на основе основного граничного условия (35), совпадает с формулой (22). Еще два дополнительных граничных условия получаются с использованием соотношений (36), (37). Дифференцируя эти соотношения по переменной Fo , получаем:

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial Fo \partial \rho} = 0; \quad (45)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{dq_2(Fo)}{dFo}. \quad (46)$$

Продифференцируем уравнение (34) по переменной ρ и запишем полученное соотношение для точки $\rho = 1$:

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial Fo \partial \rho} = 2v \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^3}. \quad (47)$$

Сравнивая (45) и (47), с учетом (36) находим следующее дополнительное граничное условие:

$$\frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^3} + 2v \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} = 0. \quad (48)$$

Сравнивая уравнение (34) и соотношение (46), получаем еще одно дополнительное граничное условие в точке $\rho = 1$:

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} = \frac{dq_2(Fo)}{dFo}. \quad (49)$$

Подставляя (39), ограничиваясь шестью членами ряда в (22), (35)–(37), (48), (49), относительно неизвестных коэффициентов b_k , ($k = \overline{0,5}$) будем иметь цепочную систему шести алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_1 v + 2b_2 &= 0, \\ (b_0 + b_1 \rho + b_2 \rho^2 + b_3 \rho^3 + b_4 \rho^4 + b_5 \rho^5)_{\rho=1} &= 1, \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5 &= 0, \\ b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 &= q_2, \\ (-v)(b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5) &= dq_2/dFo, \\ 2b_2 v + 3b_3(1+2v) + 12b_4(1+v) + 10b_5(3+2v) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Ее решение:

$$b_0 = 1; \quad b_1 = (q_2' r_4 + 60r_5)/3r_1;$$

$$b_2 = v(q_2' r_4 + 60r_5)/(6r_1);$$

$$b_3 = (q_2'(14-v^2) + 20(q_2(1-v) + v-2))/r_1;$$

$$b_4 = q_2'(96 + 11v - 6v^2) + 10r_4(q_2 - 1)/(6r_1);$$

$$b_5 = q_2'(15 + 3v - v^2 + 12r_2(q_2 - 1))/(3r_1),$$

где $r_1 = v - 8$; $r_2 = 3 - v$; $r_3 = 24 - 9v$;

$$r_4 = 9 + 2v$$
; $r_5 = q_2 - 1$; $q_2' = dq_2/dFo$.

Подставляя (39) (с учетом найденных значений коэффициентов b_k , ($k = \overline{0,5}$)) в интеграл теплового баланса (41), относительно неизвестной функции $q_2(Fo)$ будем иметь обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\eta_1 \frac{d^2 q_2}{dFo^2} + \eta_2 \frac{dq_2}{dFo} + 3600 = 0, \quad (50)$$

где $\eta_1 = (66 - v(v+6)) \exp v$;

$$\eta_2 = 1080 + 120v + (540 - 120v) \exp v.$$

Интегрируя уравнение (50), находим $q_2(Fo) = 1 + C_1 \exp(\mu_1 Fo) + C_2 \exp(\mu_2 Fo)$, (51)

где C_1, C_2 – константы интегрирования;

$$\mu_{1,2} = z \mp 30(z_1 + z_2 + z_3 + 324)^{1/2} / (v^2 \exp v + 6(\exp v)(11 + v));$$

$$z = 60v(1 - \exp v) + 270 \exp v + 540;$$

$$z_1 = 4v(18 + v); \quad z_2 = e^{2v}(81 - 36v + 4v^2);$$

$$z_3 = 4e^v(15 - v^2 - 3v).$$

Для определения констант интегрирования используются следующие начальные условия:

$$q_2(Fo_1) = 0; \quad dq_2(Fo_1)/dFo = 0. \quad (52)$$

Подставляя (51) в (52), находим $C_1 = -1/(1 - \mu_2/\mu_1)$; $C_2 = \mu_2/(\mu_1 - \mu_2)$.

Результаты расчетов по формуле (39) во втором приближении (шесть членов ряда) в сравнении с расчетом численным методом при ($v = 0,01$) приведены на рис. 3. Из их анализа следует, что в диапазоне $0,025 \leq Fo < \infty$ расхождение расчетов не превышает 0,5 %. Результаты расчетов по формуле (39) во втором приближении для $v = 1,0$ в сравнении с решением при $v = 0,01$ приведены на рис. 4. Их анализ позволяет заключить о существенном влиянии на распределение температуры величины v (расхождение результатов более 25 %). При этом наибольшее расхождение наблюдается в центре симметричной пластины, т. е. там, где расхождение в коэффициенте теплопроводности, определяемом по формуле (5) (где $m = v/\delta$), максимальное. Прикладное значение полученного результата в том, что данный метод можно применять к решению краевых задач с переменными физическими свойствами среды, причем не только к задачам, где коэффициент теплопроводности изменяется монотонно, но и к задачам для многослойных конструкций (композиционные материалы), где он изменяется скачкооб-

разно (ступенчато). Пример такого решения приведен в [8], где, используя теорию обобщенных функций (асимметричную единичную функцию Хевисайда), задача теплопроводности для многослойной конструкции приводится к однослойной, но с переменными (кусочно-однородными) свойствами среды. Таким образом, рассмотренный метод можно применять к решению всех тех задач с переменными физическими свойствами среды, для которых эти свойства могут быть описаны какой-либо аналитической зависимостью, в том числе и со ступенчатым изменением аппроксимируемого параметра.

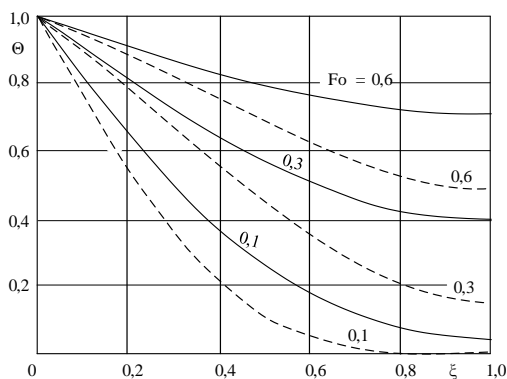


Рис. 4. Распределение температуры в пластине. Расчет по формуле (39) (второе приближение): — — $\nu = 0,01$; - - - - - $\nu = 1,0$

Результаты расчетов по формуле (31) при $\nu = 0,01$ для сверхмалых значений времени ($0 \leq Fo \leq 10^{-5}$) в сравнении с точным решением [1], полученным при $\nu = 0$, приведены на рис. 5. Их анализ показывает практическое совпадение результатов двух методов. Этот факт можно объяснить тем, что при сверхмалых значениях времени фронт температурного возмущения проникает на незначительную глубину по координате ρ ($q_1(Fo) = 2 \cdot 10^{-3}$). В диапазоне столь малой величины пространственной переменной $0 \leq \rho \leq 2 \cdot 10^{-3}$ происходит столь незначительное изменение коэффициента теплопроводности, что им можно пренебречь (т. е. принять $\nu = 0$). Таким образом, уже во втором приближении в первой и второй стадиях процесса получают достаточно высокой точности приближенные аналитические решения практически во всем диапазоне времени нестационарного процесса.

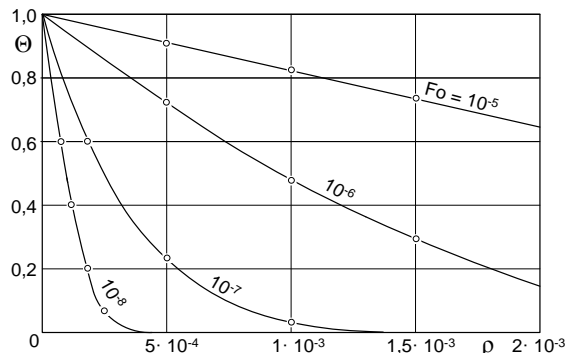


Рис. 5. Распределение температуры при сверхмалых значениях временной и пространственной переменных ($\nu = 0,01$): — — по формуле (31); \circ — точное решение

Если положить в формулах для μ_k ($k = 1, 2$) (являющихся по сути собственными числами краевой задачи (34)–(36)) $\nu = 0$, то получаем следующие их величины: $\mu_1 = -2,4709$; $\mu_2 = -22,0745$. Точные значения этих чисел: $\mu_1 = -2,4674$; $\mu_2 = -22,2066$.

Для нахождения решения задачи (11)–(14) в третьем приближении необходимо использование еще трех дополнительных граничных условий (4-го, 5-го и 6-го). Для получения четвертого дополнительного граничного условия продифференцируем дополнительное граничное условие (30) по переменной Fo :

$$\left. \frac{\partial^3 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2 \partial Fo} \right|_{\rho=0} + \nu \left. \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho \partial Fo} \right|_{\rho=0} = 0. \quad (53)$$

Дифференцируя уравнение (11), соответственно, один и два раза по переменной ρ и применяя полученные соотношения для точки $\rho = 0$, будем иметь:

$$\left. \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho \partial Fo} \right|_{\rho=0} = \nu^2 \left. \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} - 2\nu \left. \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=0} + \left. \frac{\partial^3 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^3} \right|_{\rho=0}; \quad (54)$$

$$\left. \frac{\partial^3 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2 \partial Fo} \right|_{\rho=0} = -\nu^3 \left. \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} + 3\nu^2 \left. \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=0} - 3\nu \left. \frac{\partial^3 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^3} \right|_{\rho=0} + \left. \frac{\partial^4 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^4} \right|_{\rho=0}. \quad (55)$$

Подставляя (54) и (55) в (53), получаем четвертое дополнительное граничное условие:

$$\left(\Theta_p^{IV} + 4v\Theta_p^{III} + 5v^2\Theta_p^{II} + 2v^3\Theta_p^I\right)_{\rho=0} = 0; \quad (56)$$

где $\Theta_p^V = \partial^5\Theta/\partial\rho^5$, $\Theta_p^{IV} = \partial^4\Theta/\partial\rho^4$;

$$\Theta_p^{III} = \partial^3\Theta/\partial\rho^3; \quad \Theta_p^{II} = \partial^2\Theta/\partial\rho^2; \quad \Theta_p^I = \partial\Theta/\partial\rho.$$

Продифференцируем дополнительное граничное условие (33) по Fo:

$$\left.\frac{\partial^3\Theta(\rho, Fo)}{\partial\rho^2\partial Fo}\right|_{\rho=q_1} = 0. \quad (57)$$

Дифференцируя уравнение (11) дважды по переменной ρ и применяя полученные соотношения для точки $\rho = q_1(Fo)$, с учетом (28) будем иметь

$$\left.\frac{\partial^3\Theta(\rho, Fo)}{\partial\rho^2\partial Fo}\right|_{\rho=q_1} = e^{-q_1v} \left.\frac{\partial^4\Theta(\rho, Fo)}{\partial\rho^4}\right|_{\rho=q_1} - 3ve^{-q_1v} \left.\frac{\partial^3\Theta(\rho, Fo)}{\partial\rho^3}\right|_{\rho=q_1}. \quad (58)$$

Сравнивая соотношения (57) и (58), получаем пятое дополнительное граничное условие:

$$\left(\Theta_p^{IV} - 3v\Theta_p^{III}\right)_{\rho=q_1} = 0. \quad (59)$$

Для получения шестого дополнительного граничного условия продифференцируем дополнительное граничное условие (28) по переменной Fo:

$$\left.\frac{\partial^4\Theta(\rho, Fo)}{\partial\rho^3\partial Fo}\right|_{\rho=q_1} = 0. \quad (60)$$

Дифференцируя уравнение (11), соответственно, три раза по переменной ρ и применяя полученные соотношения для точки $\rho = q_1(Fo)$, с учетом (14), (25) и (28) будем иметь

$$\left.\frac{\partial^4\Theta(\rho, Fo)}{\partial\rho^3\partial Fo}\right|_{\rho=q_1} = \left.\frac{\partial^5\Theta(\rho, Fo)}{\partial\rho^5}\right|_{\rho=q_1} - 4v \left.\frac{\partial^4\Theta(\rho, Fo)}{\partial\rho^4}\right|_{\rho=q_1}. \quad (61)$$

Сравнивая соотношения (60) и (61), получаем шестое дополнительное граничное условие:

$$\left(\Theta_p^V - 4v\Theta_p^{IV}\right)_{\rho=q_1} = 0. \quad (62)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение при $v=0,01$ в данном случае будет иметь вид

$$\frac{dq_1}{dFo} = \frac{21\exp(-0,01)(q_1 + 375)}{1562500q_1 \left(\frac{q_1^3}{10^6} + \frac{q_1^2}{625} + \frac{43}{50}q_1 + 140\right)} \times \frac{(q_1^3 + 2400q_1^2 + 2,28 \cdot 10^6 q_1 + 56 \cdot 10^7)}{\left(\frac{q_1^3}{10^6} + \frac{2q_1^2}{625} + \frac{109}{25}q_1 + 1400\right)}.$$

Из дополнительных граничных условий третьего приближения второй стадии процесса первое условие совпадает с соотношением (56), а второе и третье имеют вид:

$$\Theta_p^{IV} + 3v\Theta_p^{III} + 3v^2\Theta_p^{II} = \exp(2v)q_2^{II};$$

$$\Theta_p^V + 6v\Theta_p^{IV} + 12v^2\Theta_p^{III} + 10v^3\Theta_p^{II} = 0,$$

где $q_2^{II} = d^2q_2/dFo^2$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $q_2(Fo)$ при $v=0,01$ в третьем приближении будет иметь вид

$$2,99579q_2(Fo) + 1,40159 \frac{dq_2}{dFo} + 0,0768905 \frac{d^2q_2}{dFo^2} + 0,000882349 \frac{d^3q_2}{dFo^3} - 2,9957 = 0.$$

Из решения аналогичного уравнения при $v=0$ получаются следующие собственные числа: $\mu_1 = -2,467394$; $\mu_2 = -22,132366$; $\mu_3 = -63,285954$. Точное значение третьего собственного числа – $\mu_3 = -61,6850$. Отметим, что в третьем приближении происходит существенное уточнение первого и второго собственных чисел.

Выводы. На основе использования дополнительных искомым функций и дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса получено высокой точности аналитическое решение задачи теплопроводности для бесконечной пластины с переменными физическими свойствами среды. Применение дополнительных искомым функций позволяет свести решение уравнения в частных производных к интегрированию двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению исходного дифференциального уравнения в граничных точках. Показано, что выполнение уравнения на границах в задаче с переменными физическими свойствами среды приводит к

его выполнению и внутри рассматриваемой области.

Список литературы

1. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
2. **Цой П.В.** Системные методы расчета краевых задач теплопереноса. – М.: Изд-во МЭИ, 2005. – 567 с.
3. **Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В.** Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. – М.: Высш. шк., 2005. – 430 с.
4. **Канторович Л.В., Крылов В.И.** Приближенные методы высшего анализа. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
5. **Лыков А.В.** Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Энергетика и транспорт. – 1970. – № 5. – С. 109–150.
6. **Гудмен Т.** Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена. Проблемы теплообмена: сб. науч. тр. – М.: Атомиздат, 1967. – С. 41–96.
7. **Кудинов В.А., Кудинов И.В., Котова Е.В.** Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности // Теплофизика высоких температур. – 2017. – Т. 55, № 4. – С. 556–563. DOI: 10.1134/S0018151X17040101.
8. **Кудинов В.А., Кудинов И.В., Скворцова М.П.** Обобщенные функции и дополнительные граничные условия в задачах теплопроводности для многослойных тел // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 4. – С. 669–680. DOI: 10.1134/S0965542515040089.
9. **Кот В.А.** Тождества взвешенной температуры // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 2. – С. 409–424.
10. **Кот В.А.** Метод взвешенной температурной функции // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 89, № 1. – С. 183–202.
11. **Канторович Л.В.** Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных // ДАН СССР. – 1934. – Т. 2, № 2. – С. 532–534.
12. **Федоров Ф.М.** Граничный метод решения прикладных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 2000. – 220 с.
13. **Кудинов И. В., Кудинов В.А.** Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений теплопереноса. – М.: Инфра-М, 2013. – 391 с.
14. **Кудинов И.В., Кудинов В.А., Котова Е.В.** Аналитические решения задач теплопроводности на основе определения фронта теплового возмущения // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 11. – С. 27–41.

References

1. Lykov, A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p.
2. Tsoy, P.V. *Sistemnye metody rascheta kraevykh zadach teplomassoperenosa* [System methods of calculation of boundary value problems of heat and mass transfer]. Moscow: Izdatel'stvo MEI, 2005. 567 p.
3. Kudinov, V.A. Kartashov, E.M., Kalashnikov, V.V. *Analiticheskie resheniya zadach teplomassoperenosa i termouprugosti dlya mnogoslonykh konstruktсий* [Analytical solutions to problems of heat and mass transfer and thermoelasticity for multilayer structures]. Moscow: Vysshaya shkola, 2005. 430 p.
4. Kantorovich, L.V., Krylov, V.I. *Priblizhennye metody vysshego analiza* [Approximate methods of higher analysis]. Leningrad: Fizmatgiz, 1962. 708 p.
5. Lykov, A.V. *Metody resheniya nelineynykh uravneniy nestatsionarnoy teploprovodnosti* [Methods for solving non-linear equations of transient heat conduction]. *Energetika i transport*, 1970, no. 5, pp. 109–150.
6. Gudmen, T. *Primenenie integral'nykh metodov v nelineynykh zadachakh nestatsionarnogo teploobmena* [Application of integral methods in nonlinear problems of unsteady heat transfer]. *Sbornik nauchnykh trudov «Problemy teploobmena»* [Collection of scientific works «Problems of heat transfer»]. Moscow: Atomizdat, 1967, pp. 41–96.
7. Kudinov, V.A., Kudinov, I.V., Kotova, E.V. *Dopolnitel'nye granichnye usloviya v nestatsionarnykh zadachakh teploprovodnosti* [Additional boundary conditions in transient heat conduction problems]. *Teplofizika vysokikh temperature*, 2017, vol. 55, no. 4, pp. 556–563. DOI: 10.1134/S0018151X17040101.
8. Kudinov, V.A., Kudinov, I.V., Skvortsova, M.P. *Obobshchennyye funktsii i dopolnitel'nye granichnye usloviya v zadachakh teploprovodnosti dlya mnogoslonykh tel* [Generalized functions and additional boundary conditions in heat conductivity problems for multilayer bodies]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2015, vol. 55, no. 4, pp. 669–680. DOI: 10.1134/S0965542515040089.
9. Kot, V.A. *Tozhdestva vzveshennoy temperatury* [Identities of weighted temperature]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2015, vol. 88, no. 2, pp. 409–424.
10. Kot, V.A. *Metod vzveshennoy temperaturnoy funktsii* [Method of weighted temperature function]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2014, vol. 89, no. 1, pp. 183–202.
11. Kantorovich, L.V. *Ob odnom metode priblizhennogo resheniya differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [On one

method of approximate solution to partial differential equations]. *DAN SSSR*, 1934, vol. 2, no. 2, pp. 532–534.

12. Fedorov, F.M. *Granichnyy metod resheniya prikladnykh zadach matematicheskoy fiziki* [A boundary method of solving applied problems of mathematical physics]. Novosibirsk: Nauka, 2000. 220 p.

13. Kudinov, I. V., Kudinov, V.A. *Analiticheskie resheniya parabolicheskikh i giperbolicheskikh uravneniy teplomassoperenosa* [Analytical

solutions to parabolic and hyperbolic equations of heat and mass transfer]. Moscow: Infra-M, 2013. 391 p.

14. Kudinov, I.V., Kudinov, V.A., Kotova, E.V. *Analiticheskie resheniya zadach teploprovodnosti na osnove opredeleniya fronta teplovogo vozmushcheniya* [Analytic solutions to heat transfer problems based on determining the temperature perturbation front]. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2016, no. 11, pp. 27–41.

Котова Евгения Валериевна,

ФГБОУВО «Самарский государственный технический университет», кандидат технических наук, доцент кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики, телефон (846) 332-42-35, e-mail: totig@yandex.ru

Kotova Yevgenia Valerievna,

Samara State Technical University, Candidate of Engineering Sciences (PhD), Associate Professor of the Department of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics, telephone (846) 332-42-35, e-mail: totig@yandex.ru

Еремин Антон Владимирович,

ФГБОУВО «Самарский государственный технический университет», кандидат технических наук, доцент кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики, e-mail: a.v.eremin@list.ru

Eremin Anton Vladimirovich,

Samara State Technical University, Candidate of Engineering Sciences (PhD), Associate Professor of the Department of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics, e-mail: a.v.eremin@list.ru

Кудинов Василий Александрович,

ФГБОУВО «Самарский государственный технический университет», доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теоретических основ теплотехники и гидромеханики, телефон (846) 332-42-35, e-mail: totig@yandex.ru

Kudinov Vasily Aleksandrovich,

Samara State Technical University, Doctor of Physical and Mathematical Sciences (Post-doctoral degree), Professor, Head of the Department of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics, telephone (846) 332-42-35, e-mail: totig@yandex.ru

Ткачев Василий Константинович,

ФГБОУВО «Самарский государственный технический университет», аспирант кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики, телефон (846) 332-42-35, e-mail: totig@yandex.ru

Tkachev Vasily Konstantinovich,

Samara State Technical University, Post-graduate student of the Department of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics, telephone (846) 332-42-35, e-mail: totig@yandex.ru

Кузнецова Анастасия Эдуардовна,

ФГБОУВО «Самарский государственный технический университет», кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики, телефон (846) 332-42-35, e-mail: totig@yandex.ru

Kuznetsova Anastasia Eduardovna,

Samara State Technical University, Candidate of Engineering Sciences (PhD), Senior Lecturer of the Department of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics, telephone (846) 332-42-35, e-mail: totig@yandex.ru