

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК 004.942

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ УДАРЕ

С.П. БОБКОВ, И.В. ПОЛИЩУК
ФБГОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: bsp@isuct.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса. Использование адекватных математических моделей для исследования процесса деформирования твердых тел является актуальной проблемой для промышленной энергетики. Известно, что при механическом воздействии тела деформируются и в них возникают механические напряжения, которые в свою очередь приводят к разрушению. Поэтому моделирование процессов деформации может быть полезно как при изучении вопросов прочности и надежности оборудования, так и для решения задач тонкого измельчения твердых видов топлива. Классические континуальные модели механики сплошной среды удобны при исследовании механических воздействий в условиях идеализированных сред и для тел правильной формы. Их использование при анализе неоднородных структур и объектов сложной формы наталкивается на существенные трудности. В таких случаях приходится вводить ряд упрощающих допущений, что снижает адекватность моделей.

Материалы и методы. Использована дискретная модель, которая рассматривает твердое тело как совокупность локальных элементов, соединенных упругими связями, в отличие от ранее использованных моделей, где шагом дискретизации пространства является отдельный локальный элемент единичной массы. В новой интерпретации шаг дискретизации согласован с поведением системы (совокупности) нескольких взаимодействующих единичных масс.

Результаты. Исследован усовершенствованный подход к анализу процесса деформирования твердого тела. Предложена модель, позволяющая исследовать не только осевые деформации (сжатие – растяжение), но и эффекты изменения поперечных размеров (сдвиг). Установлено, что данный подход к моделированию позволяет существенно упростить визуализацию процесса на каждом шаге дискретного времени.

Выводы. Полученные результаты позволили усовершенствовать дискретные подходы к моделированию процесса деформирования твердых тел. При этом стало возможным моделировать не только осевые деформации (сжатие – растяжение), но и эффекты изменения поперечных размеров (сдвиг). Дискретный подход к моделированию позволил существенно упростить визуализацию процесса на каждом шаге дискретного времени. Проведенные исследования показали, что дискретный подход позволяет проводить анализ напряженного состояния и визуализировать распространение волн деформации в твердых телах при свободном ударе. Данные по распространению упругих волн, полученные путем компьютерной симуляции, совпадают с результатами проведенных ранее физических экспериментов. При использовании дискретного подхода не возникает трудностей при анализе пове-

дения неоднородных тел сложной формы, поскольку особенности структуры рассматриваются на локальном уровне и не требуют корректировки моделирующего алгоритма.

Ключевые слова: деформирование твердого тела, ударное нагружение, метод дискретных элементов, волны упругих деформаций

SIMULATION AND VISUALIZATION OF SOLID DEFORMATION UPON IMPACT

S.P. BOBKOV, I.V. POLISHCHUK

Ivanovo State University of Chemical and Technology, Ivanovo, Russian Federation

E-mail: bsp@isuct.ru

Abstract

Background. The use of adequate mathematical models to study the process of deformation of solids is an urgent issue for industrial engineering. It is known that under mechanical action the bodies are deformed and mechanical stresses arise in them, which, in turn, lead to destruction. Therefore, the simulation of deformation processes can be useful both in studying the issues of strength and reliability of equipment and for solving problems of fine grinding of solid fuels. Classical continuum models of continuum mechanics are useful for studying mechanical stresses in idealized environments and for bodies of regular shape. Their application in the analysis of heterogeneous structures and objects of complex shape encounters significant difficulties. In such cases, a number of simplifying assumptions have to be introduced, which reduces the adequacy of the models.

Materials and methods. A discrete model which considers a solid body as a set of local elements connected by elastic bonds is used in the research. A significant difference between the proposed approach and the one previously used is the following. In previous models, the separate local element of unit mass was a discretization step of space. In the new interpretation, the discretization step is consistent with the behavior of a system (set) of several interacting unit masses.

Results. An improved approach to the analysis of the process of deformation of a solid has been investigated. A model that allows studying not only axial deformations (compression – tension) but also the effects of changes in transverse dimensions (shear) has been proposed. It has been established that this approach to modeling can significantly simplify the visualization of the process at each step of the discrete time.

Conclusions. The obtained results have made it possible to improve discrete approaches to simulation of solids deformation process. At the same time, it has become possible to model not only axial deformations (compression – tension), but also the effects of changes in transverse dimensions (shear). The discrete approach to modeling has enabled to significantly simplify the visualization of the process at each step of the discrete time. The study has shown that the discrete approach allows analyzing the stress state and visualizing the propagation of deformation waves in solids at free impact. The data on the propagation of elastic waves obtained by computer simulation coincide with the results of preceding physical experiments. The discrete approach does not create difficulties in analyzing the behavior of heterogeneous bodies of complex shape, since the design features are considered at the local level and do not require adjustment of the modeling algorithm.

Key words: solid body deformation, impact loading, discrete elements method, waves of elastic deformations

DOI: 10.17588/2072-2672.2020.2.051-057

Введение. В энергетике широко используются процессы измельчения твердых видов топлива, от которых во многом зависит эффективность эксплуатации оборудования для факельного сжигания. Кроме того, при исследовании проблем надежности и долговечности энергетического оборудования важными являются вопросы прочности узлов и деталей, подвергающихся динамическим воздействиям. С этих позиций исследования в области де-

формирования и разрушения материалов под действием механических нагрузок являются актуальными для энергетической отрасли экономики. С другой стороны, современные исследования не возможны без использования математических и компьютерных подходов.

Опыт использования методов математического моделирования для исследования естественных и технических процессов и явлений свидетельствует о неизбежности

применения дискретных методов исследования из-за явной недостаточности классических континуальных подходов, что неоднократно отмечалось в литературе [1–4]. Особенно это касается анализа поведения объектов, имеющих сложную пространственную структуру, модели которых содержат большое число неизвестных величин, независимых переменных и параметров.

Так выяснилось, что использование классических методов чрезвычайно затруднительно при моделировании, например, процессов деформации и разрушения тел с неоднородной внутренней структурой [5].

В этих случаях хорошей альтернативой континуальным моделям могут быть дискретные динамические методы, одним из которых является метод дискретных элементов, в качестве которых используются системы клеточных автоматов [6, 7].

Методы исследования. Метод дискретных элементов рассматривает моделируемое твердое тело как совокупность связанных взаимодействующих локальных точек (элементов), в которых сосредоточена вся масса тела [8]. Каждый такой элемент определяется своим положением (координатами), скоростью и массой. При внешних воздействиях тело деформируется, его элементы перемещаются и изменяют свое положение. При этом задача моделирования процесса деформирования сводится к вычислению новых координат и скоростей элементов тела на каждом дискретном шаге моделирования [9].

Модель в виде системы точечных масс, соединенных связями, была успешно использована для моделирования одномерного процесса деформирования упругих и вязкоупругих тел [7, 10]. Полученные результаты позволили предположить, что данный подход можно применить и для моделирования двумерного процесса деформирования, если использовать представление тела в тривиальном виде (рис. 1). Но, в отличие от одномерного случая, на каждый дискретный элемент здесь действуют не две связи, а четыре (по крайней мере, для внутренних элементов).

Был проведен ряд численных экспериментов по моделированию процесса деформирования идеально упругих и вязкоупругих двумерных тел. При этом тщательный анализ полученных данных показал, что результаты моделирования в большинстве случаев недостаточно адек-

ватно описывают поведение реальных тел. Было установлено, что использованная модель корректна в двумерной поставке только при исследовании чрезвычайно малых воздействующих сил и деформаций.

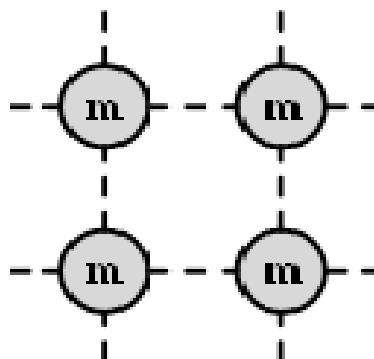


Рис. 1. Схема тривиальной двумерной модели твердого тела

Наиболее значительным является следующий выявленный факт.

Известно, что в случае продольных деформаций тело изменяет свои линейные размеры как в продольном, так и в поперечном направлении. В то же время использованное дискретное представление тела не допускало изменения линейных размеров тела в направлении, перпендикулярном приложенному воздействию. Был сделан вывод, что простого увеличения размерности задачи недостаточно и требуются определенные изменения в ее физической постановке, точнее – корректировка дискретной модельной структуры тела.

Предлагаемая модель. Главной деталью предлагаемых изменений была признана необходимость перехода от рассмотрения поведения отдельного элемента к исследованию поведения группы взаимосвязанных соседних элементов.

Таким образом, в рассмотрение вводится понятие «макроячейка», включающее в себя четыре соседних элементарных массы и связи между ними. Причем, помимо ортогональных связей, здесь рассматриваются и диагональные связи между элементарными массами внутри макроячейки (рис. 2).

В общем случае макроячейка имеет шесть геометрических параметров – линейных размеров связей: ортогональных (s_1, s_2, s_3, s_4) и диагональных (d_1, d_2). Также присутствуют шесть параметров упругости для каждой из шести связей ($k_{s1}, k_{s2}, k_{s3}, k_{s4}, k_{d1}, k_{d2}$).

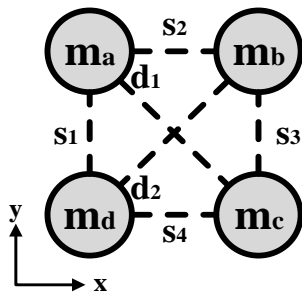


Рис. 2. Схема двумерной макроячейки

Введем следующие допущения.

1. Примем, что макроячейка имеет форму квадрата, а оси координат параллельны его сторонам. Будем считать, что параметры упругости связей одинаковы по всем осям. Другими словами, должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s, \\ d_1 = d_2 = d = \sqrt{2}s, \\ k_{s1} = k_{s2} = k_{s3} = k_{s4} = k_s, \\ k_{d1} = k_{d2} = k_d. \end{aligned} \quad (1)$$

2. Положим, что при деформировании макроячейки изменение размеров связей будет одинаково вдоль каждой из осей, т. е. подчиняться следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \Delta s_2 = \Delta s_4 = \Delta s_x, \\ \Delta s_1 = \Delta s_3 = \Delta s_y, \\ \Delta d_1 = \Delta d_2 = \Delta d. \end{aligned} \quad (2)$$

Безусловно, допущения приводят к неточностям моделирования, но величина погрешностей убывает при уменьшении шага дискретизации пространства (при возрастании количества макроячеек, на которые разбито моделируемое тело). Этот факт был подтвержден дальнейшими численными экспериментами.

Используя законы упругой деформации, можно получить уравнения для компонент механического напряжения по осям координат:

$$\begin{cases} q_x = 2k_s \varepsilon_x + \sqrt{2}k_d \varepsilon_d, \\ q_y = 2k_s \varepsilon_y + \sqrt{2}k_d \varepsilon_d, \end{cases} \quad (3)$$

где q_x, q_y – компоненты механического напряжения; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_d$ – относительные деформации ортогональных и диагональных связей соответственно.

Далее нетрудно перейти к определению упругих сил, а затем, используя основное уравнение динамики, определить смещения масс, образующих макроячейку. Последняя операция более подробно описана в [7, 10].

Опишем процесс моделирования деформации твердого тела с использованием предлагаемого подхода. Для этого двумерное тело, состоящее из микроскопических элементов массой m , будем рассматривать как систему виртуальных макроячеек. То есть на каждом шаге дискретного времени будем выделять комбинации из четырех соседних элементов каждая. Произведя расчеты для очередной макроячейки и определив искомые значения деформации, следует перейти к рассмотрению следующей макроячейки, как это показано на рис. 3.

Таким образом, последовательно «сканируя» твердое тело, можно получить значения деформации его элементов на конкретном шаге времени.

На основе предложенного подхода было разработано программное приложение, позволяющее моделировать и визуализировать поведение тел различной формы при механическом воздействии на них.

Результаты исследования. Рассмотрим результаты моделирования процесса распространения волн деформации в идеально упругом шаре радиусом 5 мм при его соударении с абсолютно твердым препятствием на скорости 1 м/с (свободный удар).

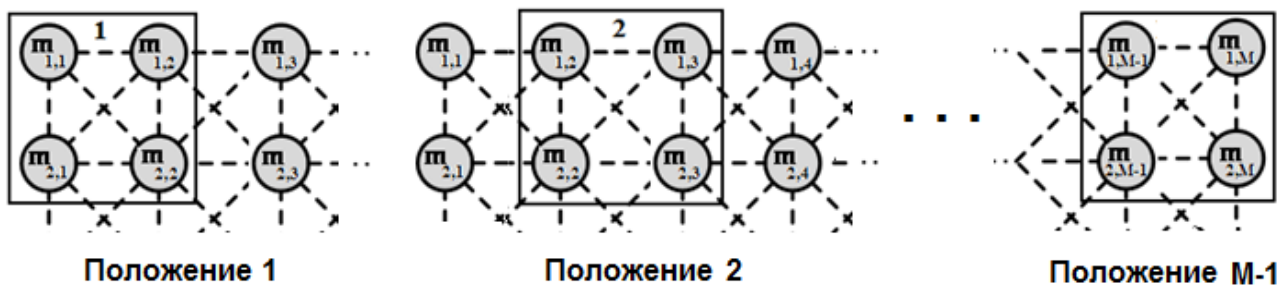


Рис. 3. Выделение макроячеек при моделировании

При моделировании были приняты следующие характеристики материала:

- плотность 2200 кг/м³;
- модуль упругости 71,4 ГПа;
- коэффициент Пуассона 0,4.

Тело было равномерно разбито на 7861 дискретных элементов, шаг дискретизации пространства составлял 100 мкм.

Результаты моделирования процесса столкновения тела показаны на рис. 4. Изображения показывают напряженное состояние тела в последовательные моменты времени через интервалы, близкие к 1 мкс. Интенсивность цвета характеризует степень соответствующей деформации.

Анализ полученных результатов моделирования показывает, что при рассмотрении деформирования тела целесообразно выделить четыре фазы процесса движения волн упругой деформации (рис. 4).

1. После соприкосновения с препятствием по телу начинает распространяться волна деформации сжатия. При этом она движется через центр тела сравнительно узким каналом. Эта фаза заканчивается, когда волна сжатия достигает противоположного края тела.

2. Затем с противоположного края по телу начинает двигаться волна деформации растяжения, охватывая верхнюю полусферу. В нижней части тела также полусферой распространяется зона значительного сжатия. Расчеты показывают, что к окончанию второй фазы кинетическая энергия становится равной нулю, т.е. элементы тела останавливаются, а потенциальная энергия упругих деформаций достигает максимальной величины.

3. Далее элементы максимально деформированного тела начинают двигаться в противоположном направлении. При этом зона растягивающих деформаций уменьшается, а зона деформаций сжатия, наоборот, увеличивается, хотя, по величине, деформации сжатия меньше, чем во второй фазе процесса.

4. В заключительной фазе происходит дальнейшая релаксация напряжений и тело переходит к состоянию, близкому к первоначальному. Потенциальная энергия деформированного тела переходит в кинетическую энергию. Процесс заканчивается отрывом (отскоком) тела от препятствия.

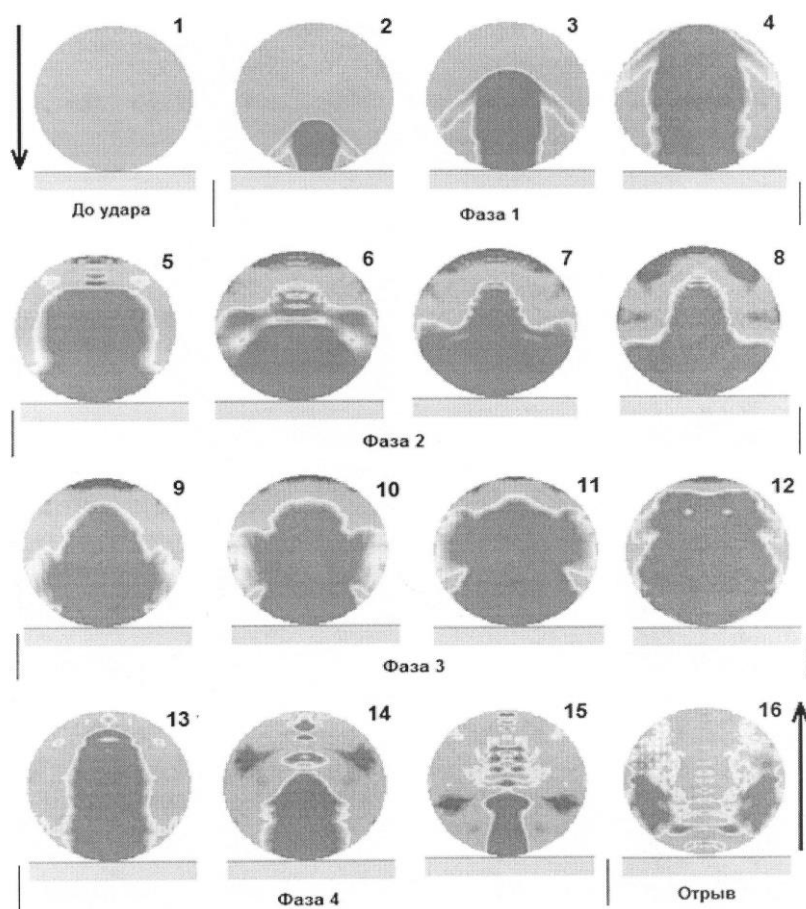


Рис. 4. Изменение напряженного состояния шара при ударе о неподвижное препятствие

Выводы. Проведенные исследования показали, что дискретный подход позволяет проводить анализ напряженного состояния и визуализировать распространение волн деформации в твердых телах при свободном ударе. Данные по распространению упругих волн, полученные путем компьютерной симуляции, совпадают с результатами проведенных ранее физических экспериментов [11]. Следует отметить, что при использовании дискретного подхода не возникает трудностей при анализе поведения неоднородных тел сложной формы, поскольку особенности структуры рассматриваются на локальном уровне и не требуют корректировки моделирующего алгоритма. Другим достоинством данного метода является возможность его применения для исследования поведения твердых тел при других способах механического воздействия – стесненном ударе, сжатии и пр.

Список литературы

1. Колмогоров А.Н. Математика – наука и профессия. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 288 с.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
3. Влияние колебаний газового потока на эффективность переработки частиц в циркуляционном кипящем слое / В.Е. Мизонов, А.В. Митрофанов, Е.В. Басова и др. // Вестник ИГЭУ. – 2019. – Вып. 6. – С. 60–66.
4. Матричный метод расчета сложных теплообменных систем с многокомпонентными теплоносителями / А.Е. Барочкин, В.П. Жуков, М.С. Шумилова и др. // Вестник ИГЭУ. – 2020. – Вып. 1. – С. 59–68.
5. Бобков С.П. Моделирование основных процессов переноса с использованием клеточных автоматов // Известия вузов. Химия и хим. технология. – 2009. – Т. 52, вып. 3. – С. 109–114.
6. Toffoli T. Cellular Automata Machines. MIT Press Cambridge, Massachusetts. – London, England, 1987. – 260 p.
7. Бобков С.П., Полищук И.В. Исследование процесса упругого деформирования с использованием метода дискретных элементов // Вестник ИГЭУ. – 2014. – Вып. 5. – С. 47–50.
8. Psakhie S.G., Horie Y., Yu S. Movable cellular automata method for simulating materials with mesostructure // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – Tomsk, 2001. – Vol. 37. – P. 311–334.

9. Wang T.K., Chang C.S. Fracture Modeling of Concrete Using Two Different Microstructural Mechanics Approaches // Mechanics of Materials Conference. – Sao Paulo, 2011. – 14 p.

10. Полищук И.В., Бобков С.П. Использование метода дискретных элементов для моделирования процесса неупругого деформирования // Вестник ИГЭУ. – 2014. – Вып. 6. – С. 71–74.

11. Дейвис Р. Волны напряжения в твердых телах. – М.: Иностран. лит., 1961. – 104 с.

References

1. Kolmogorov, A.N. *Matematika – nauka i professiya* [Mathematics as Science and Profession]. Moscow: Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1988. 288 p.
2. Samarskiy, A.A., Mikhaylov, A.P. *Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery* [Mathematical Modeling: Ideas. Methods. Examples]. Moscow: Fizmatlit, 2001. 320 p.
3. Mizonov, V.E., Mitrofanov, A.V., Basova, E.V., Tannous, K., Sizova, O.V. Vliyaniye kolebaniy gazovogo potoka na effektivnost' pererabotki chastits v tsirkulyatsionnom kipyashchem sloe [Influence of gas flow oscillation on the efficiency of particulate solids treatment in a circulating fluidized bed]. *Vestnik IGEU*, 2019, issue 6, pp. 60–66.
4. Barochkin, A.E., Zhukov, V.P., Shumilova, M.S., Barochkin, E.V., Belyakov, A.N. Matrichnyy metod rascheta slozhnykh teploobmennyykh sistem s mnogokomponentnyimi teplonositelyami [The matrix method for calculating complex heat and mass transfer systems with multicomponent coolants]. *Vestnik IGEU*, 2020, issue 1, pp. 59–68.
5. Bobkov, S.P. Modelirovanie osnovnykh protsessov perenosa s ispol'zovaniem kletochnykh avtomatov [Modeling of basic transfer processes using cellular automata]. *Izvestiya vuzov. Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya*, 2009, vol. 52, issue 3, pp. 109–114.
6. Toffoli, T. Cellular Automata Machines. MIT Press Cambridge, Massachusetts. London, England, 1987. 260 p.
7. Bobkov, S.P., Polishchuk, I.V. Issledovanie protsessa uprugogo deformirovaniya s ispol'zovaniem metoda diskretnykh elementov [Investigation of elastic deformation using discrete elements method]. *Vestnik IGEU*, 2014, issue 5, pp. 47–50.
8. Psakhie, S.G., Horie, Y., Yu, S. Movable cellular automata method for simulating materials with mesostructured. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2001, vol. 37, pp. 311–334.
9. Wang, T.K., Chang, C.S. Fracture Modeling of Concrete Using Two Different Microstructural Mechanics Approaches. *Mechanics of Materials Conference*. Sao Paulo, 2011. 14 p.

10. Polishchuk, I.V., Bobkov, S.P. Ispol'zovanie metoda diskretnykh elementov dlya modelirovaniya protsessa neuprugogo deformirovaniya [Simulation of inelastic deformation using

discrete elements method]. *Vestnik IGEU*, 2014, issue 6, pp. 71–74.

11. Deyvis, R. *Volny napryazheniya v tverdykh telakh* [Stress waves in solids]. Moscow: Inostrannaya literatura, 1961. 104 p.

Бобков Сергей Петрович,

ФБГОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет», доктор технических наук, профессор кафедры информационных технологий и цифровой экономики, e-mail: bsp@isuct.ru

Bobkov Sergey Petrovich,

Ivanovo State University of Chemical and Technology, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Department of Information Technology and Digital Economics, e-mail: bsp@isuct.ru

Полищук Илья Викторович,

ФБГОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет», соискатель кафедры информационных технологий и цифровой экономики, e-mail: ajto@mail.ru

Polishchuk Ilya Viktorovich,

Ivanovo State University of Chemical and Technology, Postgraduate, Department of Information Technology and Digital Economics, e-mail: ajto@mail.ru

УДК 66.011:681.51

СИНТЕЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ НА БАЗЕ РЕГУЛЯТОРА СОСТОЯНИЯ

А.Н. ЛАБУТИН, Ю.Н. ЗАГАРИНСКАЯ, В.Ю. НЕВИНИЦЫН, Г.В. ВОЛКОВА, В.А. ЗАЙЦЕВ

ФБГОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,

г. Иваново, Российская Федерация

E-mail: lan@isuct.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса. Проблема структурно-параметрического синтеза систем автоматического управления технологическими объектами обусловлена многомерностью, многосвязностью и нелинейностью их математических моделей. Несмотря на указанные свойства таких объектов, до настоящего времени для управления процессом используются традиционные линейные системы на базе ПИД-алгоритмов. Поскольку при синтезе линейных систем с использованием моделей «вход-выход» не учитывается многомерность и взаимное влияние координат состояния, в таких системах усиливается влияние параметрических и сигнальных возмущений на качество процессов управления. В условиях возрастания требований к качеству и эффективности управления технологическими процессами является целесообразным применение принципа управления по вектору состояния, основанного на использовании безынерционных регуляторов состояния, либо комбинированных регуляторов состояния, включающих гибкие обратные связи по производным координат состояния или интегралам координат состояния.

Материалы и методы. Исследование проведено с использованием методов системного анализа технологических процессов как объектов управления, методов теории автоматического управления, методов синтеза систем управления на базе регуляторов состояния, методов компьютерного моделирования.

Результаты. Получена линеаризованная математическая модель жидкофазного химического реактора в пространстве состояния. Установлено, что исследуемый объект обладает свойством устойчивости свободного движения и является полностью управляемым в пространстве состояния. Решена задача синтеза одноканальной системы управления вектором концентраций в химическом реакторе с использованием регуляторов состояния. Параметры настройки регуляторов состояния определены с использованием метода модального управления. Методом компьютерного моделирования комплекса «нелинейный объект – линейная подсистема управления» показана работоспособность САУ на базе регуляторов состояния с интегральной составляющей. Показано, что отсутствие интегральной составляющей в структуре алгоритма управления приводит к возникновению недопустимо большой статической ошибки регулирования.