

УДК 51-74, 62-97

МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ¹

А.В. ЕРЕМИН

ФГБОУВО «Самарский государственный технический университет»,
г. Самара, Российская Федерация
E-mail: a.v.eremin@list.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса. В связи с интенсивным развитием лазерных технологий, появившейся возможностью осуществления технологических операций в экстремальных условиях (при сверхвысоких температурах, давлениях и их градиентах) возник интерес к изучению процессов, протекающих в локально-неравновесных условиях. К основным направлениям описания таких процессов относят термодинамические, кинетические, феноменологические. Уравнения локально-неравновесного переноса получают также из уравнения Больцмана путем использования теории случайных блужданий и молекулярно-кинетическими методами. Однако некоторые из перечисленных теорий приводят к противоречивым результатам. Основной целью исследования является разработка метода математического моделирования локально-неравновесных процессов теплопроводности в твердых телах, позволяющего с высокой точностью определять их температурное состояние при быстропротекающих и высокоинтенсивных процессах переноса тепла.

Материалы и методы. Обобщенное уравнение теплопроводности, учитывающее релаксационные свойства материалов, сформулировано применительно к процессам переноса теплоты в твердых телах. Его точное аналитическое решение получено с использованием метода разделения переменных Фурье.

Результаты. Разработан метод математического моделирования локально-неравновесных процессов переноса на основе модифицированных законов сохранения. Сформулировано обобщенное дифференциальное уравнение теплопроводности, позволяющее выполнять N -кратную релаксацию теплового потока и температуры в модифицированном уравнении теплового баланса. Впервые получено точное аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины с учетом многократной релаксации. На основе анализа решения краевой задачи локально-неравновесной теплопроводности сделан вывод о невозможности мгновенного установления граничного условия первого рода. Показано, что каждое из последующих слагаемых в релаксированном уравнении теплопроводности оказывает все меньшее влияние на процесс переноса теплоты.

Выводы. Полученные результаты могут быть использованы научно-техническим персоналом организаций и высших учебных заведений при исследовании процессов воспламенения топлив, разработке режимов лазерной обработки материалов, проектировании высокоэффективного теплообменного оборудования, описании быстропротекающих процессов переноса теплоты.

Ключевые слова: локально-неравновесный процесс, коэффициенты релаксации, модифицированное уравнение теплового баланса, обобщенное уравнение теплопроводности, граничные условия первого рода

MODELING METHODOLOGY OF LOCALLY NON-EQUILIBRIUM HEAT CONDUCTIVITY PROCESSES

A.V. EREMIN

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation
E-mail: a.v.eremin@list.ru

Abstract

Background. With the development of laser technologies and the ability to carry out processing steps under extreme conditions (ultrahigh temperatures, pressures and their gradients), the interest in studying the processes that occur under locally non-equilibrium conditions has grown significantly. The key directions for the description of locally non-equilibrium processes include thermodynamic, kinetic and phenomenological ones. The locally non-equilibrium transfer equations can also be derived from the Boltzmann equation by using the

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-38-70021.

theory of random walks and molecular-kinetic methods. It should be noted that some options of locally non-equilibrium processes lead to conflicting results. This study aims to develop a method for mathematical modeling of locally nonequilibrium heat conduction processes in solids, which allows determining their temperature with high accuracy during fast and high-intensity heat transfer processes.

Materials and methods. As applied to heat transfer processes in solids, a generalized heat equation that takes into account the relaxation properties of materials is formulated. The exact analytical solution is obtained using the Fourier method of separation of variables.

Results. The methodology for mathematical modeling of locally non-equilibrium transfer processes based on modified conservation laws has been developed. The generalized differential heat equation which allows performing N-fold relaxation of the heat flow and temperature in the modified heat balance equation has been formulated. For the first time, an exact analytical solution to the unsteady heat conduction problem for an infinite plate was obtained taking into account many-fold relaxation. The analysis of the solution to the boundary value problem of locally nonequilibrium heat conduction enabled to conclude that it is impossible to instantly establish a boundary condition of the first kind. It has been demonstrated that each of the following terms in the relaxed heat equation has an ever smaller effect on the heat transfer process.

Conclusions. The obtained results can be used by the scientific and technical personnel of organizations and higher educational institutions in the study of fuel ignition processes, the development of laser processing of materials, the design of highly efficient heat transfer equipment and the description of fast-flowing heat transfer processes.

Key words: locally non-equilibrium process, relaxation coefficients, modified heat balance equation, generalized heat equation, boundary conditions of the first kind

DOI: 10.17588/2072-2672.2020.2.065-071

Введение. Разработке методов математического моделирования процессов переноса теплоты с учетом релаксационных свойств среды посвящено большое количество теоретических [1–12] и экспериментальных исследований [13–15]. Актуальность данного вопроса обусловлена необходимостью описания и исследования быстропротекающих процессов, продолжительность которых сопоставима со временем релаксации системы к локальному равновесию. К таким процессам можно отнести лазерную обработку материалов [11], тепловое воспламенение твердых топлив, зажигание взрывчатых веществ [12] и др. Для перечисленных процессов неучет релаксационных свойств приводит к высокой погрешности определения температур в исследуемых телах.

В целях повышения точности методов математического моделирования быстропротекающих процессов Каттанео [1, 2] и Верно [3] предложили модифицировать закон Фурье

$$\mathbf{q} \lambda = -\text{grad} T \quad (1)$$

путем учета инерционности во времени теплового потока:

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad} T - \tau_1 \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau}, \quad (2)$$

где \mathbf{q} – вектор плотности теплового потока; T – температура; τ – время; τ_1 – время релаксации теплового потока; λ – коэффициент теплопроводности.

На основе соотношений (1) и (2) могут быть получены параболическое и гиперболическое уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \Delta T; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = a \Delta T, \quad (4)$$

где τ – время; $a = \lambda / (c\rho)$ – коэффициент температуропроводности; c – удельная теплоемкость; ρ – плотность.

Многочисленные исследования уравнений (3), (4) позволяют заключить, что их использование возможно лишь в определенных диапазонах изменения временной переменной.

В иностранной литературе широкое распространение получила теория двухфазного запаздывания (dual – phase – lag) [5], согласно которой закон Фурье (1) представляется в виде

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, \tau + \tau_1) = -\lambda \text{grad} T(\mathbf{r}, \tau + r_1), \quad (5)$$

где τ_1 , r_1 – коэффициенты релаксации теплового потока и градиента температуры соответственно.

Ограничиваясь двумя членами разложения в ряд Тейлора выражения (5), может быть получено уравнение двухфазного запаздывания

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = a \Delta \left[T + r_1 \frac{\partial T}{\partial \tau} \right]. \quad (6)$$

Методология. Основные положения метода математического моделирования

локально-неравновесных процессов теплопроводности на основе модифицированных законов сохранения рассмотрим на примере одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами (теплофизическими свойствами). Из его решения можно получить распределение температуры по длине стержня или в бесконечно протяженной пластине конечной толщины. Для получения дифференциального уравнения, описывающего локально-неравновесный процесс теплопроводности, уравнение теплового баланса

$$c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = - \frac{\partial q}{\partial x} \quad (7)$$

представим в виде

$$c_p \frac{\partial}{\partial \tau} \left(T + \sum_{k=1}^N \tau_k^k \frac{\partial^k T}{\partial \tau^k} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(q + \sum_{k=1}^N r_k^k \frac{\partial^k q}{\partial \tau^k} \right), \quad (8)$$

где x – пространственная координата; τ_k , r_k – феноменологические коэффициенты релаксации.

Закон Фурье (1) при зависимости искомой функция лишь от одной пространственной переменной x записывается в виде

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в уравнение (8), получаем обобщенное уравнение теплопроводности, учитывающее запаздывание во времени как температуры, так и теплового потока:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^N \tau_k^k \frac{\partial^{k+1} T}{\partial \tau^{k+1}} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^N r_k^k \frac{\partial^{k+2} T}{\partial x^2 \partial \tau^k} \right). \quad (10)$$

В зависимости от принятых значений коэффициентов релаксации, дифференциальное уравнение (10) сводится к известным уравнениям: классическому параболическому уравнению (при $\tau_k^k = r_k^k = 0$); классическому гиперболическому уравнению (при $N=1$; $r_k^k = 0$); уравнению двухфазного запаздывания (при $N=1$).

В соотношениях (8), (10) коэффициенты релаксации имеют размерность c^k (секунда в степени k).

Исследование моделей с учетом однократной ($N=1$) и двукратной ($N=2$) релаксации выполнено в [10]. Рассмотрим влияние слагаемых высшего порядка ($N=3$) на температурное состояние исследуемого тела.

Уравнение (10) при $N=3$ запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} + \tau_2^2 \frac{\partial^3 T}{\partial \tau^3} + \tau_3^3 \frac{\partial^4 T}{\partial \tau^4} = \\ & = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r_1 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial \tau} + r_2^2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial \tau^2} + r_3^3 \frac{\partial^5 T}{\partial x^2 \partial \tau^3} \right). \quad (11) \end{aligned}$$

Краевые условия к уравнению (11) при симметричных граничных условиях первого рода будут следующими:

$$T(x,0) = T_0; \quad \frac{\partial^k T(x,0)}{\partial \tau^k} = 0 \quad (k = \overline{1, 3});$$

$$T(\delta, \tau) = T_{ст}; \quad \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0,$$

где T_0 – начальная температура; $T_{ст}$ – температура стенки; δ – половина толщины пластины.

В целях выполнения параметрического анализа задачу представим в безразмерном виде. Для этого введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} \Theta &= (T - T_{ст}) / (T_0 - T_{ст}); \quad \xi = x / \delta; \quad Fo = a\tau / \delta^2; \\ Fo_k &= a\tau_k / \delta^2; \quad R_k = ar_k / \delta^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Theta, \xi, Fo, Fo_k, R_k$ – безразмерные температура, координата, время, коэффициенты релаксации соответственно.

Краевая задача в безразмерном виде с учетом (12) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + Fo_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} + Fo_2^2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial Fo^3} + Fo_3^3 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial Fo^4} = \\ & = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + R_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo} + R_2^2 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo^2} + R_3^3 \frac{\partial^5 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo^3}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad \frac{\partial^k \Theta(\xi, 0)}{\partial Fo^k} = 0 \quad (k = \overline{1, 3}); \quad (14)$$

$$\frac{\partial^3 \Theta(\xi, 0)}{\partial Fo^3} = 0; \quad \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = 0; \quad \Theta(1, Fo) = 0. \quad (15)$$

Аналитическое решение задачи.

Решение задачи (13)–(15), согласно методу Фурье, принимается в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от безразмерного времени, вторая – от координаты

$$\Theta(\xi, Fo) = \varphi(Fo) \psi(\xi), \quad (16)$$

где $\varphi(Fo)$ – неизвестная функция времени; $\psi(\xi)$ – неизвестная функция координаты.

Подставляя (16) в (13), находим

$$v\varphi + Fo_3^3 \frac{d^4\varphi}{dFo^4} + (Fo_2^2 + R_3^3 v) \frac{d^3\varphi}{dFo^3} +$$

$$+(Fo_1 + R_2^2 v) \frac{d^2\varphi}{dFo^2} + (1 + R_1 v) \frac{d\varphi}{dFo} = 0; \quad (17)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + v\psi = 0, \quad (18)$$

где v – постоянная.

Краевые условия к уравнению (18), исходя из (15), будут следующими:

$$\frac{d\psi(0)}{d\xi} = 0; \quad \psi(1) = 0. \quad (19)$$

Решение для задачи Штурма – Ливилля (18), (19) представляется в виде

$$\psi_k(\xi) = \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\xi\right) \quad (k = \overline{1, \infty}). \quad (20)$$

Условия (19) удовлетворяются соотношением (20). Подстановкой (20) в (18) находим формулу для расчета собственных чисел:

$$v_k = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{4} \quad (k = \overline{1, \infty}). \quad (21)$$

Характеристическое уравнение к однородному уравнению (17) имеет вид

$$Fo_1^3 z^4 + (Fo_2^2 + R_3^3 v_k) z^3 +$$

$$+(Fo_1 + R_2^2 v_k) z^2 + (1 + R_1 v_k) z + v_k = 0. \quad (22)$$

Решение уравнения (22), учитывая найденные численно значения z_{1k} , z_{2k} , z_{3k} и z_{4k} , будет иметь вид

$$\varphi_k(Fo) = \sum_{j=1}^4 C_{jk} \exp(z_{jk} Fo) \quad (k = \overline{1, \infty}), \quad (23)$$

где C_{jk} – неизвестные коэффициенты.

Подставляя (20), (23) в (16), находим

$$\Theta_k(\xi, Fo) = \sum_{j=1}^4 C_{jk} \exp(z_{jk} Fo) \psi_k \quad (k = \overline{1, \infty}). \quad (24)$$

Все частные решения (24) удовлетворяют уравнению (13) и условиям (15). Однако ни одно из них не выполняет начальные условия (14). Сумму частных решений представим в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^4 C_{jk} \exp(z_{jk} Fo) \psi_k \right\}. \quad (25)$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты C_{jk} , составим невязку начальных условий (14) и потребуем ортогональности невязки ко всем собственным функциям. Вслед-

ствие ортогональности косинусов, решение получаемой системы 4 k уравнений для C_{jk} приводится к решению системы четырех алгебраических уравнений для каждого значения k ($k = \overline{1, \infty}$) следующего вида:

$$\begin{cases} \int_0^1 (C_{1k} + C_{2k} + C_{3k} + C_{4k}) \psi_k(\xi)^2 d\xi - \int_0^1 \psi_k = 0, \\ \int_0^1 (C_{1k} z_{1k} + C_{2k} z_{2k} + C_{3k} z_{3k} + C_{4k} z_{4k}) \psi_k^2 d\xi = 0, \\ \int_0^1 (C_{1k} z_{1k}^2 + C_{2k} z_{2k}^2 + C_{3k} z_{3k}^2 + C_{4k} z_{4k}^2) \psi_k^2 d\xi = 0, \\ \int_0^1 (C_{1k} z_{1k}^3 + C_{2k} z_{2k}^3 + C_{3k} z_{3k}^3 + C_{4k} z_{4k}^3) \psi_k^2 d\xi = 0. \end{cases}$$

После вычисления неизвестных коэффициентов C_{jk} решение задачи (13) – (15) находится из (25).

Анализ результатов. Результаты расчетов безразмерной температуры при $Fo_k = R_k = const$ представлены на рис. 1–5.

На рис. 1 показано, что при малых значениях безразмерных коэффициентов релаксации $\approx 10^{-10}$ значения температур, получаемые по формуле (25), совпадают с точным решением классического параболического уравнения.

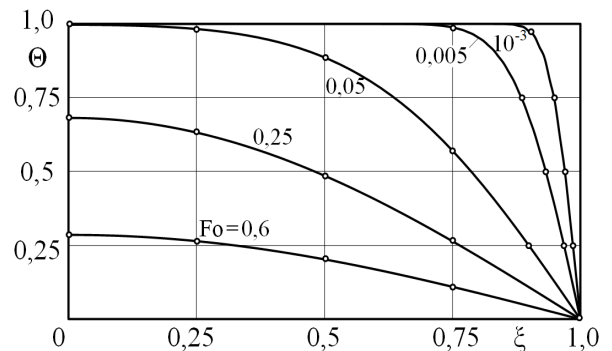


Рис. 1. Распределение температуры в пластине: $Fo_k = R_k = 10^{-10}$

С увеличением Fo_k , R_k отмечается задержка принятия телом граничного условия первого рода (см. рис. 2). Несмотря на строгое выполнение граничного условия первого рода в точке $\xi = 1$, в сколь угодно малой окрестности данной точки температура снижается от начального значения не мгновенно, а за некоторый конечный интервал времени, зависящий от величины коэффициентов ре-

лаксации. Так, на рис. 2 показано, что процесс установления граничного условия первого рода при $Fo_k = R_k = 10^{-7}$ происходит за время $\Delta Fo \approx 10^{-6}$.

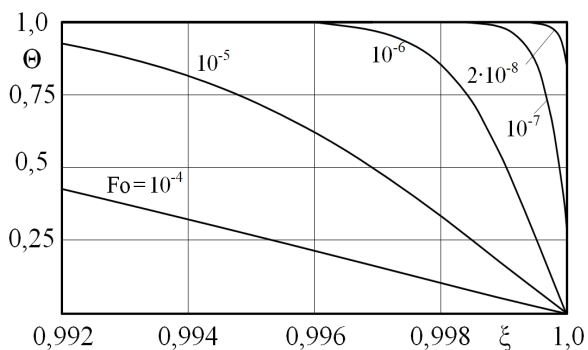


Рис. 2. Распределение температуры в пластине: $Fo_k = R_k = 10^{-7}$

С увеличением коэффициентов релаксации величина ΔFo также возрастает. И, например, при $Fo_k = R_k = 0,1$ составляет уже $\Delta Fo \approx 0,4$ (см. рис. 3). При дальнейшем увеличении коэффициентов Fo_k, R_k снижение безразмерной температуры пластины происходит равномерно во всем объеме тела, т.е. практически без градиента ($\partial\theta/\partial\xi \approx 0$).

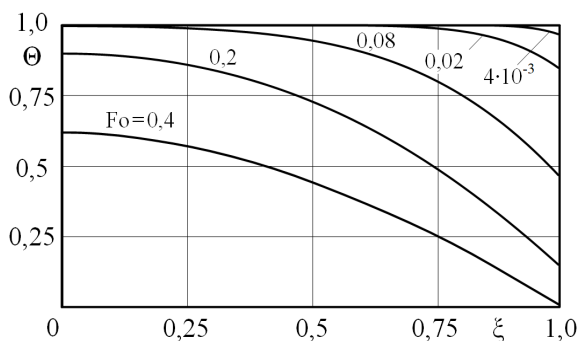


Рис. 3. Распределение температуры в пластине: $Fo_k = R_k = 10^{-1}$

На рис. 4 приведены графики изменения температуры во времени в точке $\xi = 0,99$ при различных значениях коэффициентов релаксации. Их анализ позволяет заключить, что учет релаксационных слагаемых в (13) приводит к снижению интенсивности процесса охлаждения тела – с увеличением коэффициентов Fo_k, R_k температура в любой точке пластины в выбранный момент времени оказывается выше аналогичного значения при $Fo_k = R_k = 0$.

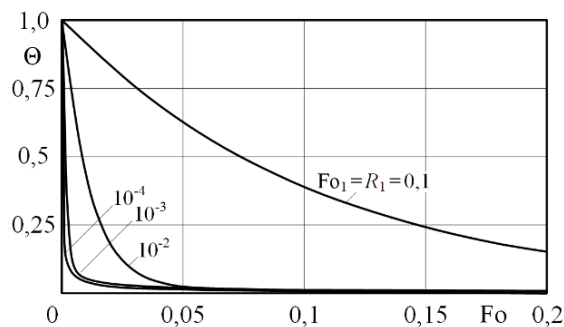


Рис. 4. Изменение температуры во времени в точке $\xi = 0,99$

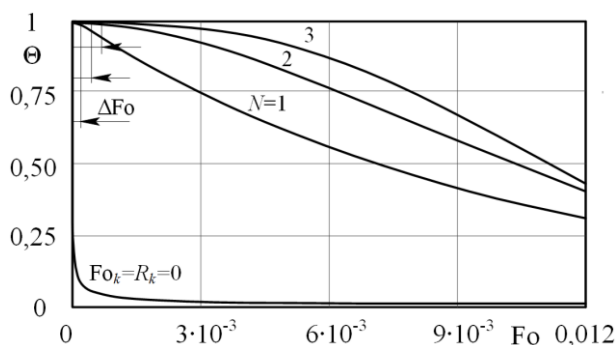


Рис. 5. Распределение температуры в точке $\xi = 0,99$

Выполнен также анализ влияния производных высшего порядка в выражении (10) на процесс локально-неравновесного переноса теплоты. На рис. 5 приведены графики изменения безразмерной температуры тела в окрестности точки приложения граничного условия первого рода ($\xi = 0,999$). Показано, что при достаточно больших значениях коэффициентов релаксации ($Fo_k = R_k = 10^{-2}$) наблюдается задержка принятия телом граничного условия ΔFo . Отмечается, что каждое из последующих слагаемых в (10) оказывает все меньшее влияние на величину ΔFo . Наличие интервала времени, в течении которого температура в сколь угодно малой окрестности точки $\xi = 1$ не изменяется после приложения граничного условия первого рода, свидетельствует о том, что тепловой поток в этой точке в течение некоторого интервала времени также не изменяется, т.е. равен нулю.

Выводы. Разработанная концепция математического моделирования локально-неравновесного переноса теплоты в твердых телах позволила сформулировать обобщенное дифференциальное уравнение

теплопроводности, учитывающее инерционность исследуемого процесса. Полученное решение краевой задачи теплопроводности с учетом релаксационных слагаемых высшего порядка показало, что процесс установления граничного условия первого рода занимает некоторый интервал времени, зависящий от величины коэффициентов релаксации. Отмечено также общее снижение интенсивности процесса теплопроводности. Результаты выполненных исследований могут быть использованы научно-техническим персоналом университетов, проектных организаций в целях более точного описания высокоинтенсивных процессов переноса теплоты в твердых телах, например при разработке оптимальных режимов лазерной обработки материалов, горения твердых топлив, проектировании систем охлаждения наноэлектроники и др.

Список литературы

1. **Cattaneo C.** Sulla Conduzione de Calore // Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Universita di Modena. – 1948. – Vol. 3. – 83 p.
2. **Cattaneo C.** A Form of Heat Conduction Equation which Eliminates the Paradox of Instantaneous Propagation // *Compte Rendus. Acad. Sci. Paris.* – 1958. – Vol. 247, No. 4. – 431 p.
3. **Vernotte P.** Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur // *Compte Rendus. Acad. Sci. Paris.* – 1958. – Vol. 246, No. 22. – 3154 p.
4. **Лыков А.В.** Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // *ИФЖ.* – 1965. – Т. 9, № 3. – 287 с.
5. **Tzou Da Yu.** The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 1995. – Vol. 38, No. 17.
6. **Kartashov É.M.** Analytical Solutions of Hyperbolic Heat-Conduction Models // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* – 2014. – Vol. 87, No. 5. – P. 1116–1125.
7. **Formalev V.F., Kartashov É.M., Kolesnik S.A.** Simulation of Nonequilibrium Heat Transfer in an Anisotropic Semispace Under the Action of a Point Heat Source // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* – 2019. – Vol. 92, No. 6. – P. 1537–1547.
8. **Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В.** Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций: учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2005. – 430 с.
9. **Еремин А.В., Кудинов В.А., Кудинов И.В.** Математическая модель теплообмена в жидкости с учетом ее релаксационных

свойств // *Известия РАН. Механика жидкости и газа.* – 2016. – № 1. – С. 33–44.

10. **Кудинов В.А., Кудинов И.В.** Исследование теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты // *TBT.* – 2013. – Т. 51, № 2. – С. 301.
11. **Study of Fast Relaxing Excitations Caused by Ultrashort Laser Pulses in Nanoscale Domain / A.V. Eremin, V.A. Kudinov, K.V. Trubytsyn, et. al.** // *AER-Advances in Engineering Research.* – 2017. – P. 202–208.
12. **Исследование** сильнонеравновесной модели теплового воспламенения с учетом пространственно–временной нелокальности / В.А. Кудинов, А.В. Еремин, И.В. Кудинов, В.В. Жуков // *Физика горения и взрыва.* – 2018. – № 6(54). – С. 25–29.
13. **Herwig H., Beckert K.** Experimental Evidence about Controversy Concerning Fourier or non-Fourier Heat Conduction in Materials with Nonhomogeneous Inner Structure // *Heat Mass Transfer.* – 2000. – Vol. 36. – 387 p.
14. **Mitra K., Kumar S., Vedavarz A., Moallemi M.K.** Experimental Evidence of Hyperbolic Heat Conduction in Processed Meat // *J. Heat Transfer, Trans. ASME.* – 1995. – Vol. 117, No. 3. – 568 p.
15. **Кирсанов Ю.А., Кирсанов А.Ю., Юдахин А.Е.** Измерение времени тепловой релаксации и демпфирования температуры в твердом теле // *TBT.* – 2017. – № 1(55). – С. 122–128.

References

1. Cattaneo, C. Sulla Conduzione de Calore. Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Universita di Modena, 1948, vol. 3. 83 p.
2. Cattaneo, C. A Form of Heat Conduction Equation which Eliminates the Paradox of Instantaneous Propagation. *Compte Rendus. Acad. Sci. Paris*, 1958, vol. 247, no. 4. 431 p.
3. Vernotte, P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur. *Compte Rendus. Acad. Sci. Paris*, 1958, vol. 246, no. 22. 3154 p.
4. Lykov, A.V. *Primenenie metodov termodinamiki neobratimyykh protsessov k issledovaniyu teplo- i massoobmena* [Application of the methods of thermodynamics of irreversible processes to the investigation of heat and mass transfer]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 1965, vol. 9, no. 3. 287 p.
5. Tzou, Da Yu. The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1995, vol. 38, no. 17.
6. Kartashov, É.M. Analytical Solutions of Hyperbolic Heat-Conduction Models. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2014, vol. 87, no. 5, pp. 1116–1125.

7. Formalev, V.F., Kartashov, É.M., Kolesnik, S.A. Simulation of Nonequilibrium Heat Transfer in an Anisotropic Semispace Under the Action of a Point Heat Source. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2019, vol. 92, no. 6, pp. 1537–1547.

8. Kudinov, V.A., Kartashov, E.M., Kalashnikov, V.V. *Analiticheskie resheniya zadach teplomassoperenosa i termouprugosti dlya mnogosloynnykh konstruksiy* [Analytical solutions to the problems of heat and mass transfer and thermoelasticity for multilayer structures]. Moscow: Vycshaya shkola, 2005. 430 p.

9. Eremin, A.V., Kudinov, V.A., Kudinov, I.V. Matematicheskaya model' teploobmena v zhidkosti s uchetom ee relaksatsionnykh svoystv [Mathematical model of heat transfer in a fluid with account for its relaxation properties]. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2016, no. 1, pp. 33–44.

10. Kudinov, V.A., Kudinov, I.V. Issledovanie teploprovodnosti s uchetom konechnoy skorosti rasprostraneniya teploty [Studying heat conduction taking into account the finite rate of heat propagation]. *Teplofizika vysokikh temperatur*, 2013, vol. 51, no. 2, p. 301.

11. Eremin, A.V., Kudinov, V.A., Trubytsyn, K.V. Study of Fast Relaxing Excitations

Caused by Ultrashort Laser Pulses in Nanoscale Domain. *AER-Advances in Engineering Research*, pp. 202–208.

12. Kudinov, V.A., Eremin, A.V., Kudinov, I.V., Zhukov, V.V. Issledovanie sil'noneravnovesnoy modeli teplovogo vosplamneniya s uchetom prostranstvenno-vremennoy nelokal'nosti [Strongly Nonequilibrium Model of Thermal Ignition with Account for Space–Time Nonlocality]. *Fizika goreniya i vzryva*, 2018, no. 6(54), pp. 25–29.

13. Herwig, H., Beckert, K. Experimental Evidence about Controversy Concerning Fourier or non-Fourier Heat Conduction in Materials with Nonhomogeneous Inner Structure. *Heat Mass Transfer*, 2000, vol. 36. 387 p.

14. Mitra, K., Kumar, S., Vedavarz, A., Moallemi, M.K. Experimental Evidence of Hyperbolic Heat Conduction in Processed Meat. *J. Heat Transfer, Trans. ASME*, 1995, vol. 117, no. 3. 568 p.

15. Kirsanov, Yu.A., Kirsanov, A.Yu., Yudakhin, A.E. Izmerenie vremeni teplovoy relaksatsii i dempfirovaniya temperatury v tverdom tele [Measurement of thermal relaxation and temperature damping time in a solid]. *Teplofizika vysokikh temperatur*, 2017, no. 1(55), pp.122–128.

Еремин Антон Владимирович,

ФГБОУВО «Самарский государственный технический университет», кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой промышленной теплоэнергетики, e-mail: a.v.eremin@list.ru

Eremin Anton Vladimirovich,

Samara State Technical University, Candidate of Engineering Sciences (PhD), Associate Professor, Head of the Department of Industrial Heat Power Engineering, e-mail: a.v.eremin@list.ru