

УДК 536.24.08

Владимир Павлович Жуков

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45, e-mail: zhukov-home@yandex.ru

Алексей Евгеньевич Барочкин

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», кандидат технических наук, доцент кафедры тепловых электрических станций, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-99-13, e-mail: acorp27@yandex.ru

Мария Сергеевна Боброва

ФГБОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет», магистрант, Россия, Иваново, e-mail: bobrova_m_s@mail.ru

Антон Николаевич Беляков

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, доцент кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45, e-mail: ab_pm@mail.ru

Сергей Ильич Шувалов

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор кафедры тепловых электрических станций, Россия, Иваново, e-mail: ShuvalovS@rambler.ru

Матричный метод решения обратной задачи теплопередачи в теплообменных аппаратах

Авторское резюме

Состояние вопроса. Наряду с поверочными расчетами существующих конструкций теплообменных аппаратов, при разработке новых конструкций и технологий часто возникает необходимость проведения проектных расчетов, в ходе которых решаются обратные задачи по выбору оптимальных конструкций и режимов работы оборудования. В литературе рассмотрены постановка и решение обратных задач классификации и нестационарной теплопроводности, при этом обратные задачи теплопередачи при проектировании теплообменного оборудования в литературе представлены недостаточно. Разработка подходов к решению обратных задач при проектировании теплообменного оборудования является актуальной задачей, стоящей перед энергетикой.

Материалы и методы. Для постановки и решения обратных задач теплообменных систем используются матричные модели теплопередачи, построенные на уравнениях баланса массы и энергии. Для решения обратных и оптимизационных задач применяются методы математического программирования.

Результаты. Для проведения проектных расчетов предложен новый матричный метод решения обратных задач по выбору конструкции аппаратов и параметров теплоносителей, которые обеспечивают эффективную работу системы. Предложена новая формулировка обратной задачи теплопередачи для случая скользящей границы начала фазового перехода при противоточном характере движения теплоносителей.

Выводы. Полученные результаты могут быть использованы в энергетической, химической и пищевой отраслях промышленности для повышения эффективности проектирования и эксплуатации энергосберегающих технологий. Полученные решения могут быть реализованы на практике при разработке мероприятий по совершенствованию ресурсо- и энергосберегающих технологий.

Ключевые слова: поверочные расчеты, проектные расчеты, обратная задача теплопередачи, теплообменные аппараты, матричная модель теплопередачи, баланс энергии, баланс массы

Vladimir Pavlovich Zhukov

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences (Postdoctoral degree), Head of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45, e-mail: zhukov-home@yandex.ru

Aleksei Yevgenyevich Barochkin

Ivanovo State Power Engineering University, Candidate of Engineering Sciences (PhD), Associate Professor of Heat Power Plants Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-99-13, e-mail: acorp27@yandex.ru

Maria Sergeevna Bobrova

Ivanovo State University of Chemistry and Technology, Master Degree student, Russia, Ivanovo, e-mail: bobrova_m_s@mail.ru

Anton Nikolaevich Belyakov

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences (Post-doctoral degree), Associate Professor of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, e-mail: ab_pm@mail.ru

Sergei Ilyich Shuvalov

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences (Post-doctoral degree), Professor of Heat Power Plants Department, Russia, Ivanovo, e-mail: ShuvalovS@rambler.ru

Matrix method to solve the inverse problem of heat transfer in heat exchangers

Abstract

Background. Along with verification calculations of known designs of heat exchangers, in design engineering and when we develop new technologies, design calculations are necessary to solve the inverse problems of choosing the optimal designs and operating modes of equipment. Previously, the formulation and solution of inverse problems of classification and unsteady heat conduction have been considered, while the inverse problems of heat transfer in the design of heat exchange equipment are poorly presented in the literature. The development of methods to solve inverse problems in the design of heat exchange equipment is an urgent task of power industry.

Materials and methods. Matrix models of heat transfer based on mass and energy balance equations are used to formulate and solve inverse problems of heat exchange systems. Methods of mathematical programming are applied to solve inverse and optimization problems.

Results. For design calculations, a matrix method to solve inverse problems for choosing the design of devices and parameters of heat carriers that ensure the effective operation of the system is proposed. The inverse problem is formulated for the case of the sliding boundary of the beginning of the phase transition with the countercurrent type of movement of heat carriers.

Conclusions. The obtained results can be used in power energy, chemical and food industries to improve the efficiency of designing resource-and energy-saving technologies. The solutions obtained can be implemented when developing measures to improve resource and energy saving technologies.

Key words: verification calculations, design calculations, inverse problem of heat transfer, heat exchangers, matrix model of heat transfer, energy balance, mass balance

DOI: 10.17588/2072-2672.2021.2.062-069

Введение. По способу использования математических моделей в инженерной практике следует выделять прямые и обратные задачи. Прямые задачи обычно ориентированы на проведение поверочных расчетов, при выполнении которых предполагается подбор оборудования из стандартного ряда при фиксированных конструктивных параметрах, а возможности оборудования для конкретного случая [1–3] проверяются расчетом. В обратных задачах на основе математической модели реализуются, как правило, проектные расчеты, которые ориентированы на выбор конструктивных и режимных параметров, обеспечивающих эффективную работу оборудования [1]. Разработка адекватных методов расчета и их использование для решения обратных задач проектирования является актуальной задачей, стоящей перед энергетикой.

Объектом исследования являются системы теплообменных аппаратов [4–10]. В качестве предмета исследования рассматривается постановка и решение обратных задач проектирования одноступенчатых и многоступенчатых теплообменных систем, в которых реализуются прямоточные и противоточные режимы движения теплоносителей [2–3, 8–15].

Целью исследования является повышение эффективности проектирования и эксплуатации теплообменных систем путем постановки и решения обратных задач теплопередачи в теплообменных аппаратах.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

- постановка и решение обратной задачи для прямоточных одноступенчатых систем при вариантном задании независимых параметров теплоносителей;

- постановка и решение обратной задачи для противоточных одноступенчатых систем при вариантном задании нормируемых параметров теплоносителей;

- постановка обратной задачи для противоточной системы при скользящей границе начала фазового перехода в теплоносителе.

Методы исследования. Для постановки и решения обратных задач теплообменных систем используются матричные модели теплопередачи, построенные на уравнениях баланса массы и энергии [7–9]. Для решения обратных и оптимизационных задач применяются методы математического программирования [16–19].

На первом этапе исследований решается обратная задача для прямоточного одноступенчатого теплообменного аппарата, конструкция которого с указанием схемы движения теплоносителей приведена на рис. 1,а. На рис. 1,б данный теплообменник представлен в виде четырехполюсника с указанием обозначений температур двух входных и двух выходных потоков горячего и холодного теплоносителей. Обычно при выполнении поверочного расчета конструкция аппарата и температуры горячего t_{10} и холодного t_{20} теплоносителей на входе в аппарат известны, а температуры горячего и холодного теплоносителей на выходе теплообменника t_1 , t_2 определяются. Нахождение выходных температур по заданной конструкции и известным входным температурам является по существу решением прямой задачи.

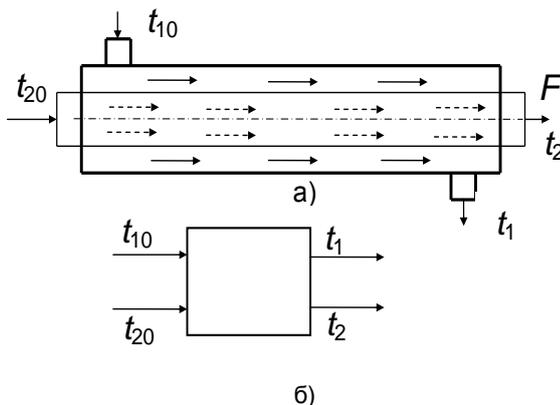


Рис. 1. Схема движения теплоносителей для прямоточного теплообменного аппарата (а) и модельное его представление в виде четырехполюсника (б)

Математическая модель теплопередачи в виде системы двух дифференци-

альных уравнений относительно температур горячего t_1 и холодного t_2 теплоносителей при отсутствии в них фазового перехода записывается в следующем виде [8]:

$$\begin{cases} \frac{dt_1}{dF} = -a_1(t_1 - t_2), \\ \frac{dt_2}{dF} = a_2(t_1 - t_2), \end{cases} \quad (1)$$

где $a_1 = \frac{k}{c_1 G_1}$, $a_2 = \frac{k}{c_2 G_2}$; k – коэффициент теплопередачи; c – удельная теплоемкость; G – расход теплоносителя; F – площадь поверхности теплообмена; индекс «1» относится к горячему, «2» – к холодному теплоносителю.

При начальных условиях $t_1|_{F=0} = t_{10}$, $t_2|_{F=0} = t_{20}$ решение (1) может быть записано в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & b_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{10} \\ t_{20} \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$b_{11} = \frac{a_2}{a_1} + e^{-(a_1+a_2)F}, \quad b_{12} = 1 - e^{-(a_1+a_2)F},$$

$$b_{13} = -(1 + \frac{a_2}{a_1}), \quad b_{21} = \frac{a_2}{a_1} (1 - e^{-(a_1+a_2)F}),$$

$$b_{22} = 1 + \frac{a_2}{a_1} e^{-(a_1+a_2)F}, \quad b_{24} = -(1 + \frac{a_2}{a_1}).$$

Система (2) из двух линейных уравнений записана относительно четырех температур, что позволяет, произвольно задавая две температуры, определять две другие из решения системы. Для унификации и автоматизации составления модели при произвольном задании двух независимых параметров система (2) дополняется двумя уравнениями связи, с помощью которых задаются известные значения параметров теплоносителей:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & b_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{10} \\ t_{20} \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{t}_{10} \\ \tilde{t}_{20} \end{pmatrix} \quad (3)$$

или

$$\mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{T}_0. \quad (4)$$

Здесь

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & b_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{10} \\ t_{20} \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \mathbf{T}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{t}_{10} \\ \tilde{t}_{20} \end{pmatrix},$$

где $\tilde{t}_{10}, \tilde{t}_{20}$ – численные значения задаваемых параметров.

Число вариантов задания независимых переменных равно числу сочетаний двух параметров из четырех [20], которое для нашего случая равно шести: а) $t_{10}t_{20}$; б) $t_{10}t_1$; в) $t_{10}t_2$; д) $t_{20}t_1$; е) $t_{20}t_2$; ф) t_1t_2 . Каждое из представленных сочетаний определяет вариант задания независимых данных или вариант постановки обратной задачи. Шесть моделей теплопередачи в ступени прямоточных теплообменных аппаратов представлены в таблице, что позволяет сформулировать в матричном виде обратную задачу и получить ее решение для шести возможных вариантов пар значений исходных данных. Следует отметить, что режим работы оборудования при постановке обратной задачи учитывается в модели через расход и теплоемкость теплоносителей, а конструкция аппарата – через площадь поверхности теплообмена и коэффициент переноса.

Решение вариантов системы линейных уравнений, представленных в таблице, получено для различных значений конструктивного параметра, в качестве которого выбрана площадь поверхности теплообмена. Результаты решения вариантов обратной задачи представлены на рис. 2.

Обозначения вариантов постановки обратной задачи, отмеченные на рис. 2 латинскими буквами, совпадают с обозначениями вариантов, представленными в таблице; задаваемые значения температуры для каждого варианта отмечены кружками, а определяемые параметры выводятся в виде зависимостей от площади поверхности теплообмена. Данное представление решения обратной задачи позволяет при заданном значении независимых параметров определить зависимости искомых параметров от площади поверхности теплообмена, которая обеспечивает реализацию эффективного процесса теплообмена.

Представленные графические зависимости позволяют при заданных значе-

ниях независимых переменных находить комплекс зависимых переменных и конструктивные параметры системы, которые реализуют эффективный теплообмен. При проведении проектных расчетов нужно иметь в виду, что не для всех вариантов исходных данных существует физически приемлемое решение задачи. Например, постановка задачи варианта f в результате приводит к значениям температуры теплоносителей на входе в аппарат, которые при больших площадях поверхностей нагрева являются физически нереализуемыми, что необходимо учитывать при анализе результатов.

Варианты матричных моделей обратных задач теплопередачи

Варианты постановки задачи	$\mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{T}_o$		
	\mathbf{B}, \mathbf{T}	\mathbf{T}_o	
а)	$t_{10}t_{20}$	$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & b_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_{10} \\ t_{20} \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{t}_{10} \\ \tilde{t}_{20} \end{pmatrix}$
б)	$t_{10}t_1$	$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & b_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_{10} \\ t_{20} \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{t}_{10} \\ \tilde{t}_1 \end{pmatrix}$
в)	$t_{10}t_2$	$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & b_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_{10} \\ t_{20} \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{t}_{10} \\ \tilde{t}_2 \end{pmatrix}$
д)	$t_{20}t_1$	$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & b_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_{10} \\ t_{20} \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_{20} \end{pmatrix}$
е)	$t_{20}t_2$	$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_{10} \\ t_{20} \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{t}_2 \\ \tilde{t}_{20} \end{pmatrix}$
ф)	t_1t_2	$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & b_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_{10} \\ t_{20} \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \end{pmatrix}$

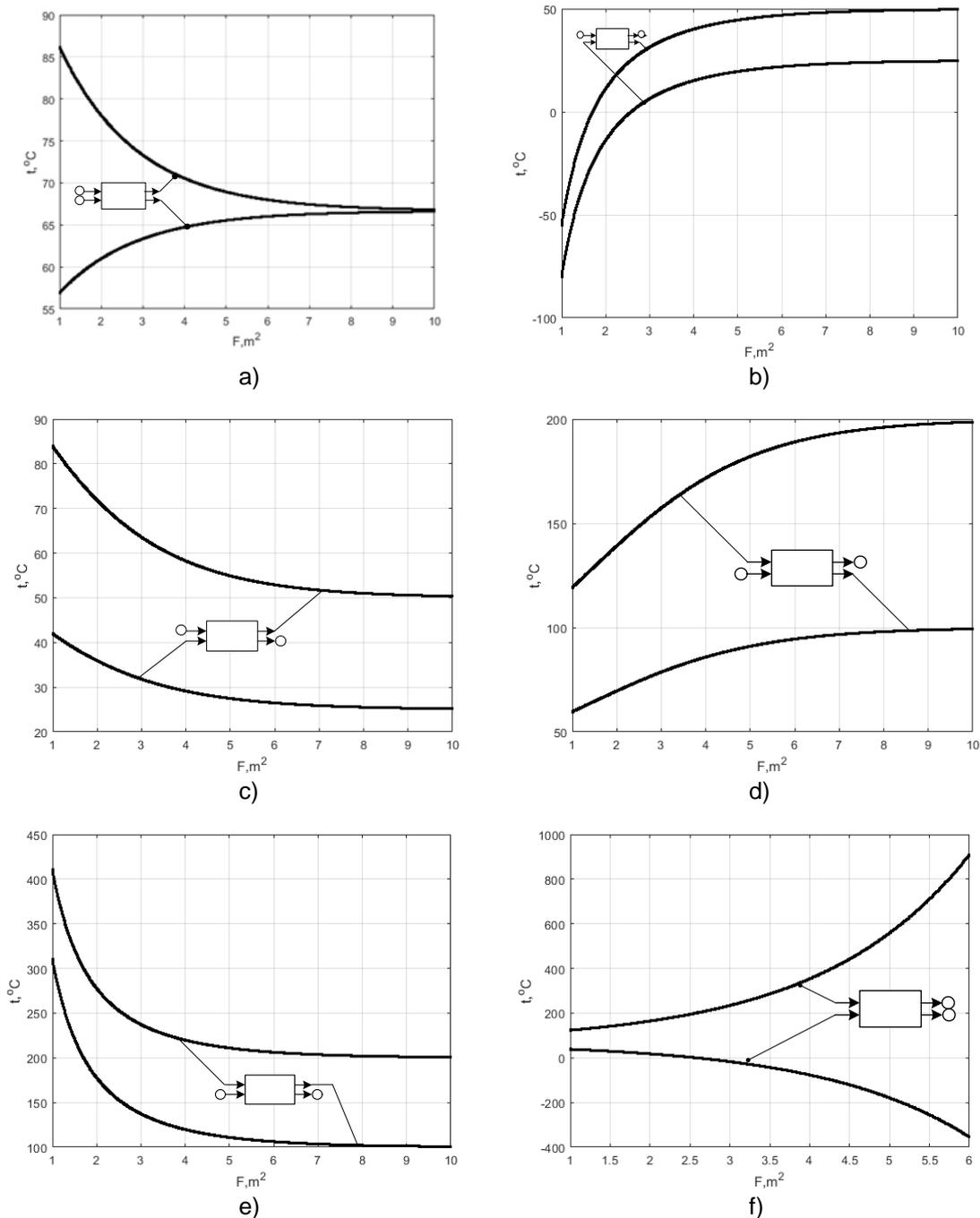


Рис. 2. Зависимости температур теплоносителей при прямоточном характере их движения от площади поверхности теплообмена при различных вариантах постановки обратной задачи теплопередачи: а) $t_0 = 100^\circ\text{C}$; $t_{20} = 50^\circ\text{C}$; б) $t_0 = 100^\circ\text{C}$; $t_1 = 50^\circ\text{C}$; в) $t_0 = 100^\circ\text{C}$; $t_2 = 50^\circ\text{C}$; д) $t_{20} = 50^\circ\text{C}$; $t_1 = 100^\circ\text{C}$; е) $t_{20} = 50^\circ\text{C}$; $t_2 = 100^\circ\text{C}$; ф) $t_2 = 50^\circ\text{C}$; $t_1 = 100^\circ\text{C}$

Для противоточного характера движения теплоносителей модель теплопередачи записывается аналогично (1), но для теплоносителя, который движется в направлении, противоположном направлению оси процесса F , правая часть уравнения умножается на минус единицу. В нашем случае против направления оси процесса движется холод-

ный теплоноситель. Для противоточного характера движения теплоносителей на рис. 3 в качестве примера представлен один вариант задания температур теплоносителей, остальные варианты постановки задачи записываются аналогично прямоточному характеру движения теплоносителей. Следует отметить, что для противоточного характера

движения теплоносителей общее число вариантов постановки задач тоже равно шести.

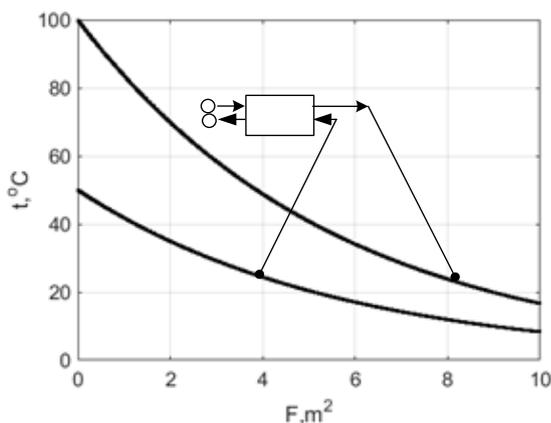


Рис. 3. Зависимости температуры теплоносителей при противоточном характере их движения от площади поверхности теплообмена при следующем задании независимых параметров: $t_{10} = 100$ °C; $t_2 = 50$ °C

Наиболее интересный и сложный случай постановки обратной задачи при проведении проектных расчетов представляет вариант теплопередачи при наличии фазового перехода в одном или нескольких теплоносителях. При проведении расчетов обычно наперед неизвестно, в какой именно точке аппарата начинается фазовый переход в теплоносителе. В этом случае аппарат целесообразно разделить на подсистемы (зоны): зону с фазовым переходом и зону без фазового перехода в теплоносителях. Для моделирования процессов со скользящей границей фазовых переходов следует использовать модели, которые могут учитывать фазовый переход в одном или нескольких теплоносителях. Такие модели и алгоритмы их сшивки подробно описаны в [8] для прямоточного характера движения теплоносителей. В нашем случае формулируется обратная задача теплопередачи для противоточного характера движения теплоносителей. Математическая постановка обратной задачи представляется аналогично (4) для системы теплообменных аппаратов [8]. Структура и алгоритм составления матриц \mathbf{B} , \mathbf{T} , \mathbf{T}_0 подробно описаны в [8].

Порядок решения обратной задачи рассмотрим на примере противоточной схемы движения теплоносителей при наперед неизвестном положении границы фазового перехода. Пусть в качестве исходных данных заданы температуры горячего

и холодного теплоносителей на входе в аппарат. Для решения задачи предлагается использовать следующий алгоритм:

1. На первом этапе решается задача для одноступенчатой установки, в ходе решения которой определяется возможность достижения одним из теплоносителей температуры начала фазового перехода.

2. При выполнении условия начала фазового перехода система условно делится на две зоны (подсистемы) по границе начала фазового перехода. После этого формируется матрица для расчета двухступенчатого аппарата: одна ступень описывается моделью без учета, а вторая ступень – с учетом фазового перехода в теплоносителе.

3. Расчет по п. 2 повторяется при варьировании границы между зонами до достижения сходимости значения температуры теплоносителя на границе между зонами с температурой начала фазового перехода.

Наличие фазовых переходов в двух теплоносителях при заранее неопределенных границах этих переходов может быть реализовано по тому же принципу, но условия организации матрицы технологических процессов в данном случае алгоритмически реализуются значительно сложнее и в данном случае не рассматриваются.

Выводы. Полученные результаты решения обратной задачи теплопередачи в системе одноступенчатых и многоступенчатых теплообменных аппаратов для системы из двух теплоносителей могут быть использованы в энергетической [15], химической и пищевой [5, 6] отраслях промышленности для повышения эффективности ресурсо- и энергосберегающих технологий.

Список литературы

1. Майков В.П. Введение в системный анализ. – М.: МГУИЭ, 2005. – 100 с.
2. Цой П.В. Системные методы расчета краевых задач тепло-массопереноса. – М.: МЭИ, 2005. – 568 с.
3. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача: учебник для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1981. – 416 с.
4. Разработка математической модели многопоточных теплообменных аппаратов с учетом фазового перехода в теплоносителях / К.А. Касаткин, А.Е. Барочкин, В.П. Жуков, Г.Г. Орлов // Вестник ИГЭУ. – 2018. – Вып. 5. – С. 61–67.

5. **Касаткин А.Г.** Основные процессы и аппараты химической технологии. – М.: Химия, 2006. – 829 с.

6. **Комиссаров Ю.А., Гордеев Л.С., Вент Д.П.** Процессы и аппараты химической технологии. – М.: Химия, 2011. – 1230 с.

7. **Матричный** метод расчета сложных теплообменных систем с многокомпонентными теплоносителями / А.Е. Барочкин, В.П. Жуков, М.С. Шумилова и др. // Вестник ИГЭУ. – 2020. – № 1. – С. 59–68.

8. **Жуков В.П., Барочкин Е.В.** Системный анализ энергетических теплообменных установок. – Иваново, 2009. – 176 с.

9. **Жуков В.П., Барочкин А.Е., Беляков А.Н.** Исследование процесса теплопередачи в многопоточных теплообменных аппаратах // Известия высших учебных заведений. Сер. Химия и химическая технология. – 2011. – Т. 54, № 11. – С. 116–119.

10. **Разработка** конструкции печи для утилизации твердых отходов и оценка эффективности ее работы / Р.Н. Габитов, О.Б. Колибаба, А.И. Сокольский, А.В. Грошева // Вестник ИГЭУ. – 2019. – Вып. 5. – С. 23–30.

11. **Расчет** нестационарного теплообмена в многослойных средах с помощью теории цепей Маркова / А.В. Огурцов, Е.И. Крупнов, Е.Р. Кормашова, В.Е. Мизонов // Вестник ИГЭУ. – 2021. – Вып. 1. – С. 60–66.

12. **Ячеечная** модель теплопроводности в многослойной среде с переменным числом слоев / В.Е. Мизонов, А.В. Митрофанов, Е.В. Басова, Е.А. Шуина // Вестник ИГЭУ. – 2020. – Вып. 3. – С. 51–57.

13. **Еремин А.В., Губарева К.В.** Аналитический метод решения задач теплопроводности с граничными условиями третьего рода // Вестник ИГЭУ. – 2019. – Вып. 6. – С. 67–74.

14. **Соколов А.К., Якубина О.А.** Численно-аналитический метод расчета температурного поля полуограниченного тела с использованием показательных функций // Вестник ИГЭУ. – 2016. – Вып. 2. – С. 44–50.

15. **Шарапов В.И., Цюра Д.В.** Термические деаэраторы. – Ульяновск: УлГТУ, 2003. – 560 с.

16. **Вентцель Е.С.** Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Дрофа, 2004. – 207 с.

17. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Высш. шк., 1973. – 500 с.

18. **Моисеев Н.Н.** Математические задачи системного анализа. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 488 с.

19. **Таха Х.** Введение в исследование операций. – М.: Вильямс, 2005. – 901 с.

20. **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей. – М.: Наука, 2001. – 576 с.

References

1. Maykov, V.P. *Vvedenie v sistemnyy analiz* [Introduction to system analysis]. Moscow: MGUIE, 2005. 100 p.

2. Tsoy, P.V. *Sistemnye metody rascheta krayevykh zadach teplomassoperenosa* [System methods for calculating boundary value problems of heat and mass transfer]. Moscow: MEI, 2005. 568 p.

3. Isachenko, V.P., Osipova, V.A., Sukomel, A.S. *Teploperedacha* [Heat transfer: a textbook for universities]. Moscow: Energoatomizdat, 1981. 416 p.

4. Kasatkin, K.A., Barochkin, A.E., Zhukov, V.P., Orlov, G.G. *Razrabotka matematicheskoy modeli mnogopotchnykh teplotobmennyykh apparatov s uchetom fazovogo perekhoda v teplonositelyakh* [Development of a mathematical model of multi-current heat exchangers taking into account phase transition in heat carriers]. *Vestnik IGEU*, 2018, issue 5, pp. 61–67.

5. Kasatkin, A.G. *Osnovnye protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii* [Basic processes and apparatuses of chemical technology]. Moscow: Khimiya, 2006. 829 p.

6. Komissarov, Yu.A., Gordeev, L.S., Vent, D.P. *Protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii* [Processes and devices of chemical technology]. Moscow: Khimiya, 2011. 1230 p.

7. Barochkin, A.E., Zhukov, V.P., Shumilova, M.S., Barochkin, E.V., Belyakov, A.N. *Matrichnyy metod rascheta slozhnykh teplomassoobmennyykh sistem s mnogokomponentnymi teplonositelyami* [The matrix method for calculating complex heat and mass transfer systems with multicomponent coolants]. *Vestnik IGEU*, 2020, issue 1, pp. 59–68.

8. Zhukov, V.P., Barochkin, E.V. *Sistemnyy analiz energeticheskikh teplomassoobmennyykh ustanovok* [System analysis of energy heat and mass exchange plants]. Ivanovo, 2009. 176 p.

9. Zhukov, V.P., Barochkin, A.E., Belyakov, A.N. *Issledovanie protsessa teploperedachi v mnogopotchnykh teplotobmennyykh apparatakh* [Study of heat transfer process in multi-stream heat exchangers]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Seriya Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya*, 2011, vol. 54, no. 11, pp. 116–119.

10. Gabbitov, R.N., Kolibaba, O.B., Sokol'skiy, A.I., Grosheva, A.V. *Razrabotka konstruktii pechi dlya utilizatsii tverdykh otkhodov i otsenka effektivnosti ee raboty* [Development of the furnace design for solid waste utilization and evaluation of its operation efficiency]. *Vestnik IGEU*, 2019, issue 5, pp. 23–30.

11. Ogurtsov, A.V., Krupnov, E.I., Kormashova, E.R., Mizonov, V.E. *Raschet nestatsionarnogo teplotobmena v mnogosloynnykh sredakh s pomoshch'yu teorii tsepey Markova* [Calculation of non-stationary heat exchange in multi-layer media

by means of the theory of Markov chains]. *Vestnik IGEU*, 2021, issue 1, pp. 60–66.

12. Mizonov, V.E., Mitrofanov, A.V., Basova, E.V., Shuina, E.A. Yachechnaya model' teploprovodnosti v mnogosloynoy srede s peremennym chislom sloev [A cell model of heat conduction in multi-layer medium with variable number of the layers]. *Vestnik IGEU*, 2020, issue 3, pp. 51–57.

13. Eremin, A.V., Gubareva, K.V. Analiticheskii metod resheniya zadach teploprovodnosti s granichnymi usloviyami tret'ego roda [Analytical solution of the problem of heat transfer using boundary conditions of the third kind]. *Vestnik IGEU*, 2019, issue 6, pp. 67–74.

14. Sokolov, A.K., Yakubina, O.A. Chislennno-analiticheskiy metod rascheta temperaturnogo polya poluogranichennogo tela s ispol'zovaniem pokazatel'nykh funktsiy [Numerical and analytical method of semi-limited body temperature field calculation by using exponential functions]. *Vestnik IGEU*, 2016, issue 2, pp. 44–50.

15. Sharapov, V.I., Tsyura, D.V. *Termicheskie deaeratory* [Deaerating heaters]. Ul'yanovsk: UIGTU, 2003. 560 p.

16. Venttsel', E.S. *Issledovanie operatsiy: zadachi, printsipy, metodologiya* [Operation Research: Objectives, Principles, Methodology]. Moscow: Drofa, 2004. 207 p.

17. Korn, G., Korn, T. *Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov)* [Handbook of Mathematics (for Scientists and Engineers)]. Moscow: Vysshaya shkola, 1973. 500 p.

18. Moiseev, N.N. *Matematicheskie zadachi sistemnogo analiza* [Mathematical problems of system analysis]. Moscow: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1981. 488 p.

19. Takha, Kh. *Vvedenie v issledovanie operatsiy* [Introduction to Operation Research]. Moscow: Vil'yams, 2005. 901 p.

20. Venttsel', E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow: Nauka, 2001. 576 p.