

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 681.5.015.24

Анатолий Анатольевич Анисимов

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор кафедры электроники и микропроцессорных систем, Россия, Иваново, e-mail: anis@emf.ispu.ru

Константин Евгеньевич Соколов

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», аспирант, старший преподаватель кафедры электроники и микропроцессорных систем, Россия, Иваново, e-mail: 616kost@mail.ru

Сергей Вячеславович Тарарыкин

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор кафедры электроники и микропроцессорных систем, Россия, Иваново, e-mail: tsv@ispu.ru

Синтез параметрически грубых систем управления с регуляторами и наблюдателями состояния на основе грамианных технологий¹

Авторское резюме

Состояние вопроса. Системы автоматического управления, строящиеся на базе регуляторов с наблюдателями состояния, являются эффективными средствами управления линейными и линеаризованными объектами высокой степени сложности. Одной из ключевых проблем синтеза модальных систем является проблема создания параметрически грубых (робастных) систем, сохраняющих свою работоспособность и основные показатели качества при возможных вариациях параметров как объекта управления, так и самого регулятора.

Материалы и методы. Синтез робастной системы с наблюдателем состояния осуществляется методом модального управления на основе матричной модели объекта управления. Для обеспечения параметрической грубости системы предлагается методика, основанная на математическом аппарате грамианов управляемости и наблюдаемости, а также на преобразовании подобия матриц наблюдателя. Моделирование системы с регулятором и наблюдателем состояния проводится средствами комплекса MatLab.

Результаты. Предлагается метод формирования оптимальной с точки зрения параметрической грубости системы структуры наблюдателя состояния, в основу которого положена процедура преобразования подобия модели объекта, причем матрица преобразования формируется путем вариации сингулярных чисел грамианов управляемости и наблюдаемости.

Выводы. Предлагаемый метод позволяет получить структуру наблюдателя с определенным соотношением управляемости и наблюдаемости, обеспечивающую выполнение условия параметрической грубости – отсутствие положительных обратных связей в составе управляющего устройства. Полу-

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ №075-03-2023-025 (1/23).

The study is carried out within the framework of the Government Contract of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation No. 075-03-2023-025 (1/23).

ченные результаты позволяют наглядно показать высокую эффективность использования грамианного метода для синтеза систем управления с наблюдателями состояния с низкой чувствительностью к вариациям собственных параметров.

Ключевые слова: наблюдатель состояния, регулятор состояния, грамианный метод, робастная система управления

Anatoly Anatolievich Anisimov

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences, (Post-doctoral degree), Professor of Electronics and Microprocessor Systems Department, Russia, Ivanovo, e-mail: anis@emf.ispu.ru

Konstantin Evgenievich Sokolov

Ivanovo State Power Engineering University, Postgraduate Student, Senior Lecturer of Electronics and Microprocessor Systems Department, Russia, Ivanovo, e-mail: 616kost@mail.ru

Sergey Vyacheslavovich Tararykin

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences, (Post-doctoral degree), Professor of Electronics and Microprocessor Systems Department, Russia, Ivanovo, e-mail: tsv@ispu.ru

Synthesis of parametrically rough control systems with regulators and state observers based on Gramian technologies

Abstract

Background. Automatic control systems based on regulators with state observers are effective means to control linear and linearized objects of a high degree of complexity. One of the key problems in the synthesis of modal systems is the development of parametrically rough (robust) systems that retain their performance, as well as the main quality indicators with possible variations of the parameters of both the control object and the controller itself.

Materials and methods. The synthesis of a robust system with a state observer is carried out by the modal control method based on the matrix model of the controlled object. To ensure the parametric robustness of the system, the authors have proposed a technique which based on the mathematical apparatus of Gramians of controllability and observability as well as on the similarity transformation of observer matrices. Computer simulation of the system with state controller and observer is carried out by means of the MatLab software.

Results. The authors have proposed a method to form an observer state structure that is optimal in the sense of parametric roughness of the system, which is based on the procedure of transforming the similarity of the object model. And the transformation matrix is formed by varying the singular numbers of the controllability and observability gramians.

Conclusions. The proposed method allows us to obtain an observer structure with a certain ratio of controllability and observability that ensures the fulfillment of the condition of parametric roughness i.e., the absence of positive feedback in the control device. The results obtained make it possible to clearly demonstrate the high efficiency of using the Gramian method for the synthesis of control systems with state observers with low sensitivity to variations of the controller own parameters.

Key words: state observer, state controller, gramian method, robust control system

DOI: 10.17588/2072-2672.2024.2.070-081

Введение. Системы автоматического управления (САУ), строящиеся на базе регуляторов с наблюдателями состояния (РНС), являются эффективными средствами управления линейными и линеаризованными объектами высокой степени сложности [1, 2].

Структурная реализация САУ с РНС (рис. 1) основывается на принципе управления состоянием наблюдателя, подстраиваемого под переменные состояния реального объекта на основе информации от измерителя его выходной координаты.

В итоге РНС приобретает свойства регуляторов состояния (РС) и регуляторов «входа-выхода», получая в сравнении с ними дополнительные степени свободы управления в виде структурной реализации и значений параметров наблюдателя.

Одной из ключевых в теории и практике САУ, в том числе САУ с РНС, является проблема создания параметрически грубых (робастных) систем, сохраняющих свою работоспособность и основные показатели качества при возможных вариациях внутренних параметров [3–5].

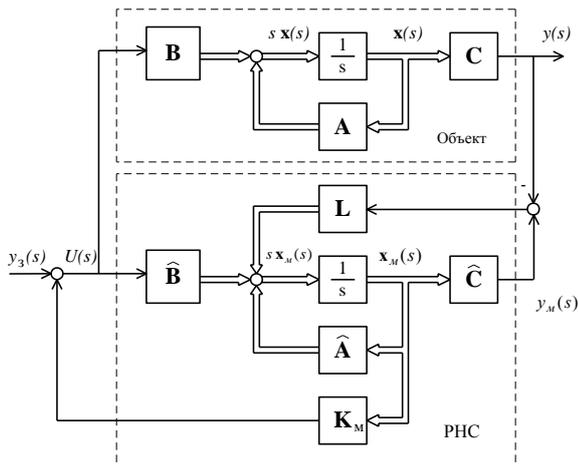


Рис. 1. Структурная схема системы автоматического управления с РНС

Несмотря на значительные успехи в этой области, универсальных методов синтеза робастных САУ, гарантированно приводящих к желаемому результату, пока не выработано, что делает актуальным продолжение исследований в этом направлении.

Как показано в [6–8], значительные потенциальные возможности повышения робастных свойств линейных САУ содержатся в классическом модальном управлении, реализуемом регуляторами состояния и регуляторами «входа-выхода».

Применительно к САУ с РНС в [8] показано, что снижение их чувствительности к вариациям параметров объекта управления достигается формированием такого темпа процессов управления (распределения полюсов), при котором сохраняется минимально-фазовый характер передаточной функции РНС.

Не менее важной является проблема обеспечения низкой чувствительности САУ к вариациям собственных параметров РНС. Она сохраняет свою актуальность даже при цифровой реализации управляющего устройства [9], поскольку ограничения разрядной сетки вычислителя, квантование сигналов по времени и по уровню при возможных колебаниях такта квантования могут существенно ухудшать показатели качества параметрически негрубой САУ.

При этом низкая чувствительность системы (рис. 1) к вариациям собственных параметров РНС может достигаться определенным выбором структуры и формированием темпа подстройки наблюдателя, при которых обеспечивается отсутствие положительных обратных связей (ОС) как в основном

контуре управления (матрица K_M), так и в контуре подстройки наблюдателя (матрица L) [8].

Это объясняется тем, что появление положительной ОС в контуре управления приводит к дополнительному отрицательному фазовому сдвигу сигналов, аналогичному таковому при введении двойного интегрирования. Стремление обеспечить заданные требования качества в этих условиях приводит к «острой» настройке регулятора, что обуславливает высокую чувствительности САУ к вариациям внутренних параметров.

Традиционно применяемые для реализации РНС структуры, соответствующие каноническим формам наблюдаемости (КФН) и управляемости (КФУ), оказываются в этом смысле наименее эффективными, поскольку по мере повышения степени вырождения объекта для наблюдателя в КФН теряется управляемость, а для наблюдателя в КФУ – наблюдаемость. Как следствие, элементы матрицы K_M регулятора и матрицы L подстройки наблюдателя (см. рис. 1) могут принимать положительные значения, формируя дестабилизирующие ОС в собственной структуре РНС и снижая робастные свойства САУ.

Более рациональной для обеспечения условий робастности оказывается реализация наблюдателя в форме объекта управления, обладающей, как правило, более благоприятным сочетанием свойств управляемости и наблюдаемости [8].

Однако очевидно, что для объектов, приближающихся по своей структуре и свойствам к КФУ или КФН (с доминированием управляемости или наблюдаемости), эта форма представления наблюдателя не будет давать существенных преимуществ в решении проблемы параметрической грубости САУ.

В этих условиях становится актуальным поиск других, более рациональных в отношении собственной параметрической грубости форм структурного представления наблюдателя состояния (НС), а также разработка соответствующих методов получения таких форм.

Возможным путем решения проблемы структурного синтеза РНС является применение грамианных технологий [10–13], позволяющих проводить эквивалентные преобразования координатного базиса и обычно применяемых для получения сбалансированной формы представления объекта [14] с одинаковой степенью управ-

ляемости и наблюдаемости в целях дальнейшего редуцирования его расчетной модели при синтезе регулятора [15].

Как известно, грамиан управляемости характеризует распределение энергии входного воздействия по координатам состояния объекта, а грамиан наблюдаемости определяет соответствующий вклад координат состояния в энергию выходного сигнала объекта.

Такая «физическая» трактовка дает основание полагать, что при существенном различии основного темпа управления САУ и темпа подстройки НС, обеспечивающем реализацию принципа «разделения движений», сбалансированная форма представления наблюдателя (СбФ), характеризующаяся равной степенью управляемости и наблюдаемости, не будет самой эффективной в решении проблемы параметрической грубости.

Тем не менее применяемые грамианные методы эквивалентных преобразований координатного базиса объекта управления вполне могут использоваться при организации поиска более рациональных форм представления НС в структурно-параметрическом синтезе робастных САУ.

Ниже предлагается метод формирования оптимальной структуры наблюдателя, основанный на сингулярном разложении грамианов и позволяющий сформировать модель объекта (структуру НС) с определенным соотношением управляемости и наблюдаемости, обеспечивающим отсутствие положительных ОС в составе управляющего устройства и улучшение робастных свойств САУ.

Постановка задачи исследования.

Будем рассматривать варианты одноканальных систем управления с РНС, имеющие общую векторно-матричную структуру (см. рис. 1, где s – переменная Лапласа; y_3, y, y_m – входной и выходные сигналы объекта и наблюдателя; U – управляющее воздействие на объект; x и x_m – векторы координат состояния объекта и асимптотического наблюдателя; A и \hat{A} , B и \hat{B} , C и \hat{C} – матрицы состояния, входа, выхода объекта и наблюдателя размерностями $n \times n$, $n \times 1$, $1 \times n$, n – порядок объекта).

Передаточная функция (ПФ) объекта, представленного в векторно-матричной форме, по каналу управления имеет вид

$$H_o(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(Is - A)^{-1}B = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + \dots + a_1 s + a_0},$$

где I – единичная матрица; $n = \deg A(s)$ и $m = \deg B(s)$ – степени полиномов знаменателя и числителя ПФ, $A(s)$ и $B(s)$ соответственно.

Ограничимся исследованием особенностей робастного управления *невыврожденными минимально-фазовыми объектами*.

Будем осуществлять синтез робастной системы с РНС методами модального управления [1, 2]. Вычисление матрицы регулятора K_M при этом выполняется на основе желаемого характеристического полинома $D(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1 s + d_0$:

$$K_M = \bar{K}_M \bar{U} \hat{U}^{-1}; \quad (1)$$

$$\bar{K}_M = [a_0 - d_0, a_1 - d_1, \dots, a_{n-1} - d_{n-1}],$$

где $\bar{U} = [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}^2\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{B}]$ и

$\hat{U} = [\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \hat{A}^2\hat{B} \quad \dots \quad \hat{A}^{n-1}\hat{B}]$ – матрицы управляемости в КФУ и в собственных координатах НС.

Вычисление матрицы подстройки L выполняется на основе желаемого полинома $D^*(s) = s^n + d_{n-1}^*s^{n-1} + \dots + d_1^*s + d_0^*$:

$$L = \tilde{L} \tilde{V} \hat{V}^{-1}; \quad \tilde{L} = [a_0 - d_0^*, a_1 - d_1^*, \dots, a_{n-1} - d_{n-1}^*], \quad (2)$$

где $\tilde{V} = [\tilde{C}^T \quad (\tilde{C}\tilde{A})^T \quad (\tilde{C}\tilde{A}^2)^T \quad \dots \quad (\tilde{C}\tilde{A}^{n-1})^T]$ и

$\hat{V} = [\hat{C}^T \quad (\hat{C}\hat{A})^T \quad (\hat{C}\hat{A}^2)^T \quad \dots \quad (\hat{C}\hat{A}^{n-1})^T]$ – матрицы наблюдаемости в КФН и в собственных координатах НС.

Значения среднегеометрических корней (СГК) полиномов $D(s)$ и $D^*(s)$ $\Omega_o = \sqrt[n]{d_0}$ и

$\Omega_n = \sqrt[n]{d_0^*}$ соответственно выбираются исходя из требований быстродействия и разделения движений в пределах области параметрической грубости САУ с регулятором «входа-выхода» [8].

Поставим задачу формирования рациональной структуры и определения параметров РНС, которые исключают появление положительных элементов матриц K_M и L при выбранных выражениях полиномов $D(s)$ и $D^*(s)$ и заданном быстродействии САУ.

Решение задачи будем искать как преобразование координат состояния мо-

дели объекта управления, обеспечивающее необходимое соотношение управляемости и наблюдаемости. В этом случае рациональная структура наблюдателя состояния формируется путем преобразования подобия координатного базиса объекта с использованием матрицы преобразования, для отыскания которой используется математический аппарат грамианов управляемости и наблюдаемости.

Для иллюстрации результатов исследования будем использовать мехатронный объект управления (ОУ1) с доминированием свойств управляемости. Расчетную часть работы будем выполнять средствами программного комплекса MatLab.

Анализ системных свойств объекта с использованием грамианов и матричных норм. Для решения поставленной задачи предлагается использовать математический аппарат грамианов управляемости \mathbf{G}_c и наблюдаемости \mathbf{G}_o [10–13] объекта управления, которые определяются выражениями:

$$\mathbf{G}_c = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}T} dt;$$

$$\mathbf{G}_o = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}T} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} dt,$$

где t – переменная времени.

Для одномерного объекта грамианы представляют собой матрицы размерностью $n \times n$.

Анализ грамианов позволяет судить об управляемости, наблюдаемости и вырожденности объекта, представленного в векторно-матричной форме. Для этого используется процедура сингулярного разложения, приводящая грамианы одномерного объекта к виду

$$\mathbf{G}_c = \mathbf{U}_c \mathbf{\Sigma}_c \mathbf{U}_c^T; \quad \mathbf{G}_o = \mathbf{V}_o \mathbf{\Sigma}_o \mathbf{V}_o^T,$$

где $\mathbf{\Sigma}_c$, $\mathbf{\Sigma}_o$ – диагональные матрицы, состоящие из сингулярных чисел грамианов управляемости и наблюдаемости, выстроенных в порядке убывания; \mathbf{U}_c и \mathbf{V}_o – матрицы преобразования грамианов к диагональной форме.

Относительно малые значения сингулярных чисел грамианов являются признаками плохой управляемости или плохой наблюдаемости определенных координат состояния объекта. Равенство нулю одного из них свидетельствует о вырождении ПФ с

потерей соответственно управляемости при $\sigma_{on} = 0$ или наблюдаемости при $\sigma_{cn} = 0$. Поэтому наименьшие значения сингулярных чисел грамианов могут использоваться для количественной оценки управляемости, наблюдаемости и вырожденности объекта или его модели [12, 13].

В качестве альтернативной оценки степени управляемости и наблюдаемости объекта и его модели (наблюдателя) бывает удобнее использовать нормы матриц преобразования координат [7, 8]:

$$\|\mathbf{P}_U\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |u_{ij}| \right) \quad \text{и} \quad \|\mathbf{P}_V\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |v_{ij}| \right),$$

где u_{ij} , v_{ij} – элементы матриц \mathbf{P}_U и \mathbf{P}_V соответственно, находящиеся на пересечении строки i и столбца j ; $\mathbf{P}_U = \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}$; $\mathbf{P}_V = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V}^{-1}$.

Преимущество этих показателей заключается в том, что по мере приближения объекта к КФУ и КФН соответствующие значения матричных норм $\|\mathbf{P}_U\|_1$ и $\|\mathbf{P}_V\|_1$ стремятся к единице. Потеря указанных системных свойств сопровождается неограниченным возрастанием соответствующих матричных норм. Все это позволяет повысить точность сравнительной оценки системных свойств объекта управления.

Для наглядной иллюстрации возможностей достижения робастных свойств САУ при различных структурных реализациях РНС будем использовать графики зависимостей элементов матриц $\mathbf{K}_m = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ и $\mathbf{L} = [l_1, l_2, \dots, l_n]$ от Ω_o и Ω_n СГК полиномов $D(s)$ и $D^*(s)$ соответственно [7, 8]. При этом штриховкой будут обозначаться области робастности, в пределах которых все элементы матриц принимают отрицательные значения. Эти зависимости формируются путем многократного выполнения процедур синтеза РНС для заданной модели объекта при вариациях Ω_o и Ω_n в пределах значений, соответствующих требованиям быстродействия САУ.

Применение грамианных технологий в задачах редукции динамических моделей приводит к их представлению в СбФ, для которой грамианы управляемости и наблюдаемости являются диагональными и совпадают. Матрицы управляемости и наблюдаемости объекта в такой форме, а следовательно, и элементы матриц \mathbf{K}_m и \mathbf{L} при одинаковых полиномах $D(s)$ и $D^*(s)$, совпадают с точностью до знака. Однако общая зона робастности контуров управления и подстройки

НС для подобной структуры может оказаться достаточно узкой или отсутствовать.

Помимо решения задач системного анализа, редуцирования моделей и других, применение грамианных технологий может составить основу для формирования моделей объектов с требуемым соотношением управляемости и наблюдаемости путем вариации сингулярных чисел грамианов и последующего преобразования координатного базиса.

Формирование оптимальной структуры наблюдателя состояния с использованием грамианных технологий. Основная идея заключается в следующем: для объекта с преобладающим свойством управляемости, т.е. близкого к КФУ, принудительно увеличивают минимальное значение (минимальные значения) грамиана наблюдаемости Σ_o , а для объекта с преобладающим свойством наблюдаемости, т.е. близкого к КФН, выполняют аналогичные действия в отношении грамиана управляемости Σ_c .

Эквивалентность исходной и преобразованной моделей объекта при таком подходе обеспечивается за счет неособого преобразования подобия с использованием матрицы T :

$$\hat{A} = T^{-1}AT; \quad \hat{B} = T^{-1}B; \quad \hat{C} = CT, \quad (3)$$

где $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ – матрицы состояния, входа и выхода объекта в преобразованных координатах.

При этом матрица преобразования координат T должна отвечать условию идентичности передаточных функций исходной и преобразованной моделей [10]:

$$\hat{G}_c = T^{-1}G_cT^{-T}; \quad \hat{G}_o = T^{-1}G_oT^{-T}. \quad (4)$$

На основе первого уравнения (4), а также выражений сингулярного разложения грамианов управляемости одномерного объекта в исходной $G_c = U_c \Sigma_c U_c^T$ и преобразованной $\hat{G}_c = \hat{U}_c \hat{\Sigma}_c \hat{U}_c^T$ системе координат можно получить выражения для определения матрицы преобразования T : $T^{-1}U_c \Sigma_c U_c^T T^{-T} = \hat{U}_c \hat{\Sigma}_c \hat{U}_c^T$, откуда следует $T = U_c \Sigma_c^{1/2} \hat{\Sigma}_c^{-1/2} \hat{U}_c^{-1}$.

При вычислении матрицы T появляется «лишняя» степень свободы в задании матрицы \hat{U}_c , поскольку в дальнейших расчетах форма грамиана \hat{G}_c не используется. Исходя из того что большинство сингу-

лярных чисел грамианов исходной модели ОУ при корректировке сохраняются неизменными, принимаем $\hat{U}_c = U_c$.

Аналогичным образом, матрицу преобразования можно определить на основе второго уравнения (4) и выражений сингулярного разложения грамианов наблюдаемости объекта $G_o = V_o \Sigma_o V_o^T$ и $\hat{G}_o = \hat{V}_o \hat{\Sigma}_o \hat{V}_o^T$: $T^T V_o \Sigma_o V_o^T T = \hat{V}_o \hat{\Sigma}_o \hat{V}_o^T$; $T = V_o^{-T} \Sigma_o^{-1/2} \hat{\Sigma}_o^{1/2} \hat{V}_o^T$, где принимаем $\hat{V}_o = V_o$.

По новым выражениям матриц (3) преобразованной модели объекта определяются сингулярные числа другого грамиана, выполняется расчет параметров регулятора (матрица K_m) и параметров подстройки наблюдателя состояния (матрица L) по формулам (1) и (2) соответственно, после чего оценивается характер обратных связей во всех контурах РНС.

Предложенные структурные преобразования позволяют изменять в нужном направлении сингулярные числа обоих грамианов, достигая нового соотношения свойств управляемости и наблюдаемости модели объекта, предназначенной для реализации НС, и формировать более благоприятную конфигурацию областей параметрической грубости системы управления.

Поскольку аналитически определить связь между значениями сингулярных чисел грамианов модели объекта и областями параметрической грубости системы с РНС затруднительно, предлагается итерационная процедура формирования структуры наблюдателя, алгоритм которой поясняет блок-схема на рис. 2.

На начальном этапе (блок 1) формируют исходное матричное описание объекта (матрицы параметров A, B, C), определяют передаточную функцию $H_o(s)$ и задают требования к качеству САУ, синтезируемой методами модального управления, в виде выражений полиномов $D(s), D^*(s)$ и соответствующих значений их СГК Ω_o и Ω_n .

Затем (блок 2) вычисляют грамианы G_c, G_o и выполняют их сингулярное разложение, получая соответствующие диагональные формы Σ_c, Σ_o . Для более точной оценки управляемости, наблюдаемости и вырожденности рассчитывают матричные нормы $\|P_u\|_1, \|P_v\|_1$ и $\|P_{uv}\|_1 = \|P_{vu}\|_1$, используя при матричном представлении

объекта в КФУ и КФН значения коэффициентов полиномов ПФ $H_0(s)$.

После этого (блок 3) выполняют расчет параметров регулятора (матрица \mathbf{K}_M) и контуров подстройки наблюдателя (матрица \mathbf{L}) и анализируют (блок 4) наличие положительных ОС в структуре РНС.

При получении отрицательно определенных матриц \mathbf{K}_M и \mathbf{L} задача синтеза робастной САУ считается решенной и вычисленные значения параметров РНС исполь-

зуют для практической реализации управления (блок 5).

При наличии положительных ОС в структуре РНС переходят к корректировке координатного базиса модели объекта управления грамианными методами.

Для этого (блок 6) сравнением матричных норм $\|\mathbf{P}_U\|_1$ и $\|\mathbf{P}_V\|_1$ сначала оценивают степень близости объекта к КФУ и КФН, выявляют доминирование управляемости или наблюдаемости.

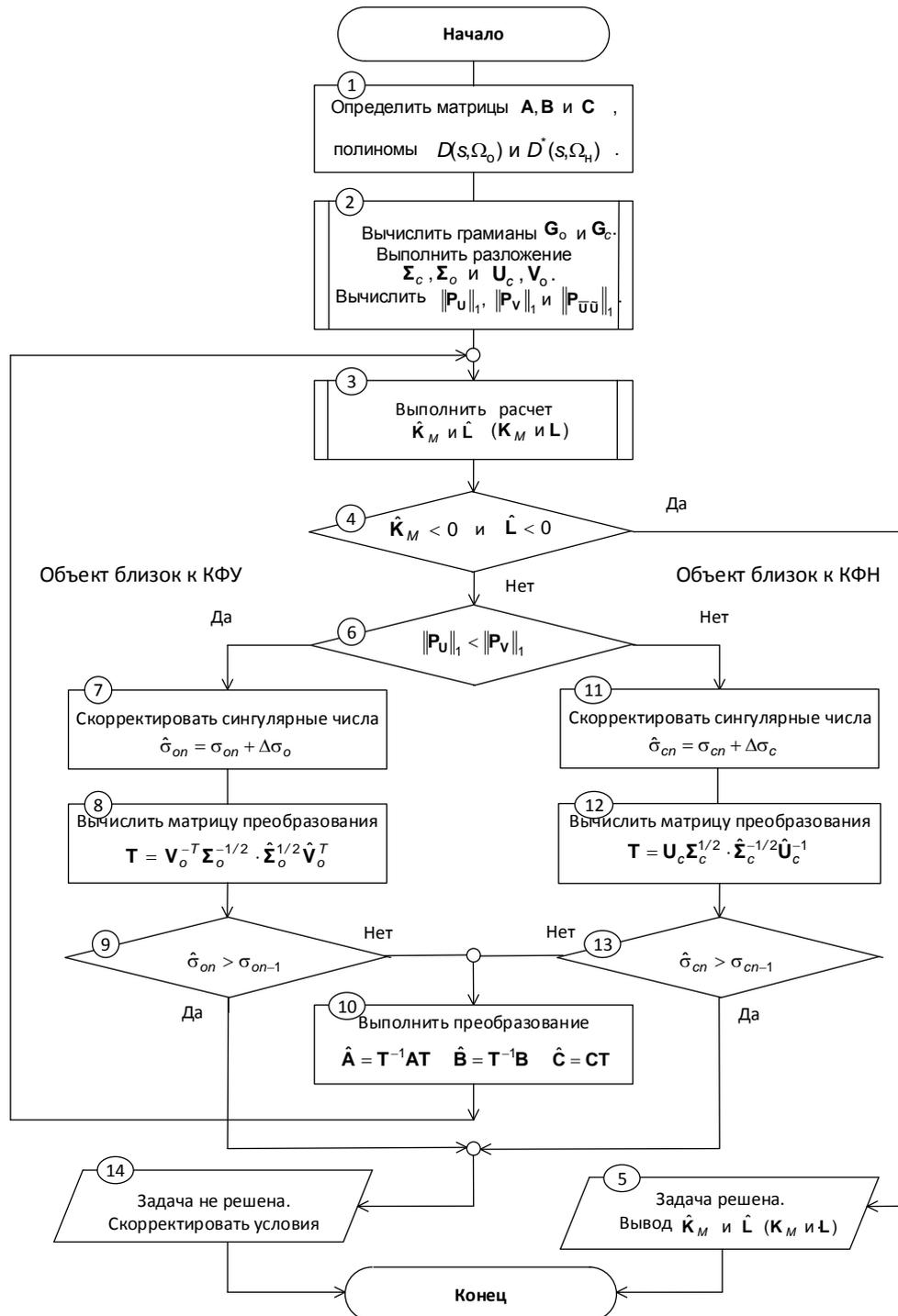


Рис. 2. Алгоритм структурного синтеза наблюдателя состояний

При доминировании управляемости принудительно увеличивают на величину шага $\Delta\sigma_0$ минимальное сингулярное число σ_{0n} грамиана наблюдаемости (блок 7) в пределах установленного ограничения σ_{0n-1} . Рассчитывают (блок 8) соответствующую матрицу T преобразования исходной структуры объекта к новому координатному базису. При отсутствии выхода корректируемого сингулярного числа за установленный предел (блок 9) выполняют преобразование координатного базиса объекта (блок 10) и проводят повторный расчет параметров регулятора и наблюдателя (блок 3) для новой модели с последующим анализом (блок 4) характера обратных связей полученного РНС.

При достижении отрицательной определенности матриц \hat{K}_M и \hat{L} задача считается решенной (блок 5), а при сохранении положительных элементов матриц выполняется следующий шаг сингулярной корректировки и получение новой модели объекта для реализации НС (блоки 7–10).

При близости исходного объекта к КФН (доминировании свойства наблюдаемости) выполняют (блоки 11–13, 10) аналогичные итерационные процедуры корректировки (повышения) минимальных сингулярных чисел грамиана управляемости σ_{cn} в пределах установленного ограничения σ_{cn-1} и формирования нового структурного представления НС с требуемым сочетанием системных свойств. Следует отметить, что приведенный алгоритм соответствует объектам с одной точкой вырождения (сингулярностью), при которой выделяется и корректируется лишь одно минимальное сингулярное число. Однако в том же виде он может использоваться и для объектов с несколькими сингулярностями, если при корректировке (блоки 7, 11) одновременно из-

менять соответствующее количество минимальных сингулярных чисел.

Для автоматизации вычислительных процедур в соответствии с разработанным алгоритмом был разработан программный комплекс GRAMMIAN2 [Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2023664270].

Приведем конкретный числовой пример формирования робастного РНС при синтезе систем управления мехатронным объектом ОУ1, обладающим доминирующими свойствами управляемости.

Синтез робастной системы управления мехатронным объектом с РНС грамианным методом. Рассмотрим синтез робастной системы с РНС для мехатронного объекта управления (ОУ1), структурная схема которого приведена на рис. 3, в соответствии с предложенным алгоритмом.

Полученное векторно-матричное описание ОУ (блок 1) имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -9,091 & -0,074 & 0 & 0 \\ 66,667 & -5,0 & -66,667 & 5,0 \\ 0 & 0,65 & 0 & -0,65 \\ 0 & 0,3 & 4,0 & -0,3 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,462 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \ 0 \ 0 \ 1].$$

Примем в качестве желаемых $D(s)$ и $D^*(s)$ синтезируемой системы полиномы Ньютона 4-го порядка при значениях $\Omega_0 = 15 \text{ с}^{-1}$ и $\Omega_H = 30 \text{ с}^{-1}$, отвечающих заданным требованиям быстродействия и разделения темпов движений.

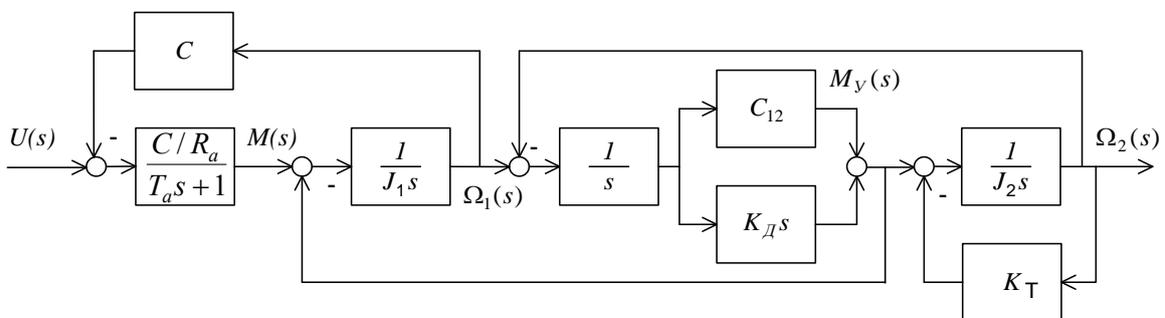


Рис. 3. Структурная схема мехатронного объекта управления (ОУ1): U – управляющее воздействие; M, M_y – электромагнитный момент и момент упругости; Ω_1, Ω_2 – угловые скорости 1-й и 2-й масс; $C = 0,16 \text{ Вб}$ – конструктивный параметр двигателя; $T_a = 0,11 \text{ с}$, $R_a = 3,15 \text{ Ом}$ – постоянная времени и сопротивление якорной цепи; $J_1 = 0,015 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_2 = 0,25 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – моменты инерции 1-й и 2-й масс; $C_{12} = 0,65 \text{ Н}\cdot\text{м}$ – коэффициент жесткости; $K_d = 0,075 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$ – коэффициент трения

Процедуры вычисления грамианов управляемости и наблюдаемости $gram()$ с последующим сингулярным разложением $svd()$ для ОУ1 (блок 2) дают следующие результаты:

$$\Sigma_c = \text{diag}\{1,39 \ 0,2066 \ 1,0334 \cdot 10^{-2} \ 4,849 \cdot 10^{-3}\};$$

$$\Sigma_o = \text{diag}\{17,46 \ 3,73 \cdot 10^{-2} \ 1,046 \cdot 10^{-2} \ 3,66 \cdot 10^{-9}\}.$$

Соответствующие диаграммы распределения сингулярных чисел грамианов приведены на рис. 4,а.

Значения норм матриц преобразования координат для ОУ1 составляют $\|\mathbf{P}_u\|_1 = 2,351$ и $\|\mathbf{P}_v\|_1 = 1884,9$.

Зависимости параметров РНС в форме объекта от значений $\Omega_o = \text{var}$ и $\Omega_n = \text{var}$ для ОУ1 приведены на рис. 5,а. Объект близок по структуре к КФУ, о чем свидетельствуют широкие зоны отрицательных значений элементов матриц \mathbf{K}_m при узких областях отрицательных значений элементов \mathbf{L} .

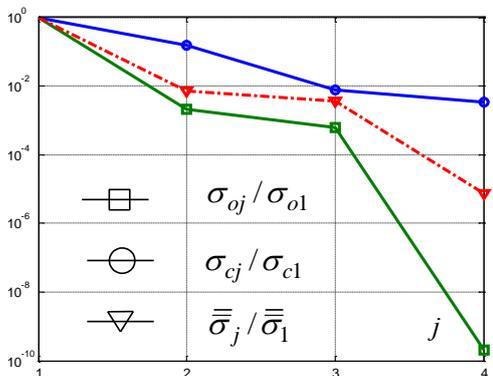
Матрицы \mathbf{K}_m и \mathbf{L} для наблюдателя в форме объекта, полученные при заданных значениях SGK (блок 3) и приведенные в таблице, не удовлетворяют условиям параметрической грубости (блок 4).

В соответствии с условием $\|\mathbf{P}_u\|_1 < \|\mathbf{P}_v\|_1$ (блок 6) выполняется коррекция сингулярных чисел грамиана наблюдаемости (блок 7):

$$\Sigma_o = \text{diag}\{17,46 \ 3,727 \cdot 10^{-2} \ 1,046 \cdot 10^{-2} \ 3,665 \cdot 10^{-8}\},$$

после чего вычисляется матрица преобразования координат (блок 8):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1,035 & -0,2713 & 2,068 \cdot 10^{-2} & -6,238 \cdot 10^{-5} \\ -0,2713 & 3,115 & -0,1613 & 5,339 \cdot 10^{-4} \\ 2,068 \cdot 10^{-2} & -0,1613 & 1,012 & -3,509 \cdot 10^{-5} \\ -6,238 \cdot 10^{-5} & 5,339 \cdot 10^{-4} & -3,509 \cdot 10^{-5} & 1,0 \end{bmatrix}.$$



а)

В результате для преобразованных матриц $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, и $\hat{\mathbf{C}}$ (блок 10) получаем следующие значения матриц РНС (блок 3):

$$\hat{\mathbf{K}}_m = [-90,86 \ -30,42 \ -2,57 \cdot 10^2 \ -5,99 \cdot 10^2];$$

$$\hat{\mathbf{L}} = [-2,607 \cdot 10^4 \ 1,714 \cdot 10^5 \ -1,334 \cdot 10^4 \ -1,992 \cdot 10^2].$$

Полученные значения по-прежнему не удовлетворяют условиям параметрической грубости системы с РНС (блок 4).

В результате циклических повторений предложенной процедуры были получены следующие значения сингулярных чисел грамианов управляемости и наблюдаемости:

$$\hat{\Sigma}_c = \text{diag}\{0,6137 \ 3,188 \cdot 10^{-2} \ 5,233 \cdot 10^{-3} \ 1,105 \cdot 10^{-7}\};$$

$$\hat{\Sigma}_o = \text{diag}\{17,460 \ 3,727 \cdot 10^{-2} \ 1,046 \cdot 10^{-2} \ 4,665 \cdot 10^{-3}\},$$

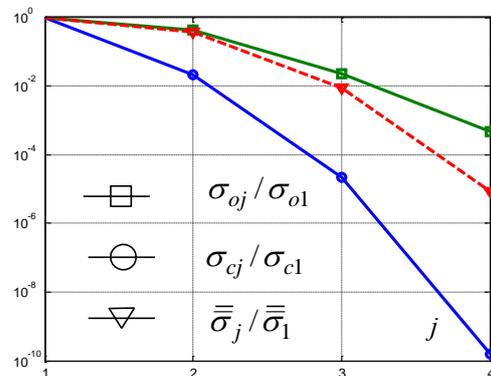
а также значения норм матриц $\|\mathbf{P}_u\|_1 = 343,76$, $\|\mathbf{P}_v\|_1 = 1,569$. Соответствующие диаграммы распределения сингулярных чисел приведены на рис. 4,б.

Полученные в итоге матрицы наблюдателя оптимальной структуры для ОУ1 имеют вид:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1,589 & 7,107 & -8,953 & 0,635 \\ 1,276 & -7,136 & -0,973 & 0,0631 \\ 4,391 & 5,457 & -5,364 & -0,272 \\ 0,405 & -2,989 & 4,267 & -0,302 \end{bmatrix};$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0,4543 \\ 5,789 \cdot 10^{-2} \\ -4,409 \cdot 10^{-3} \\ 1,183 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix};$$

$$\hat{\mathbf{C}} = [-3,562 \cdot 10^{-2} \ 0,2778 \ -2,118 \cdot 10^{-2} \ 1,0].$$



б)

Рис. 4. Диаграммы сингулярных чисел грамианов управляемости и наблюдаемости для ОУ 1

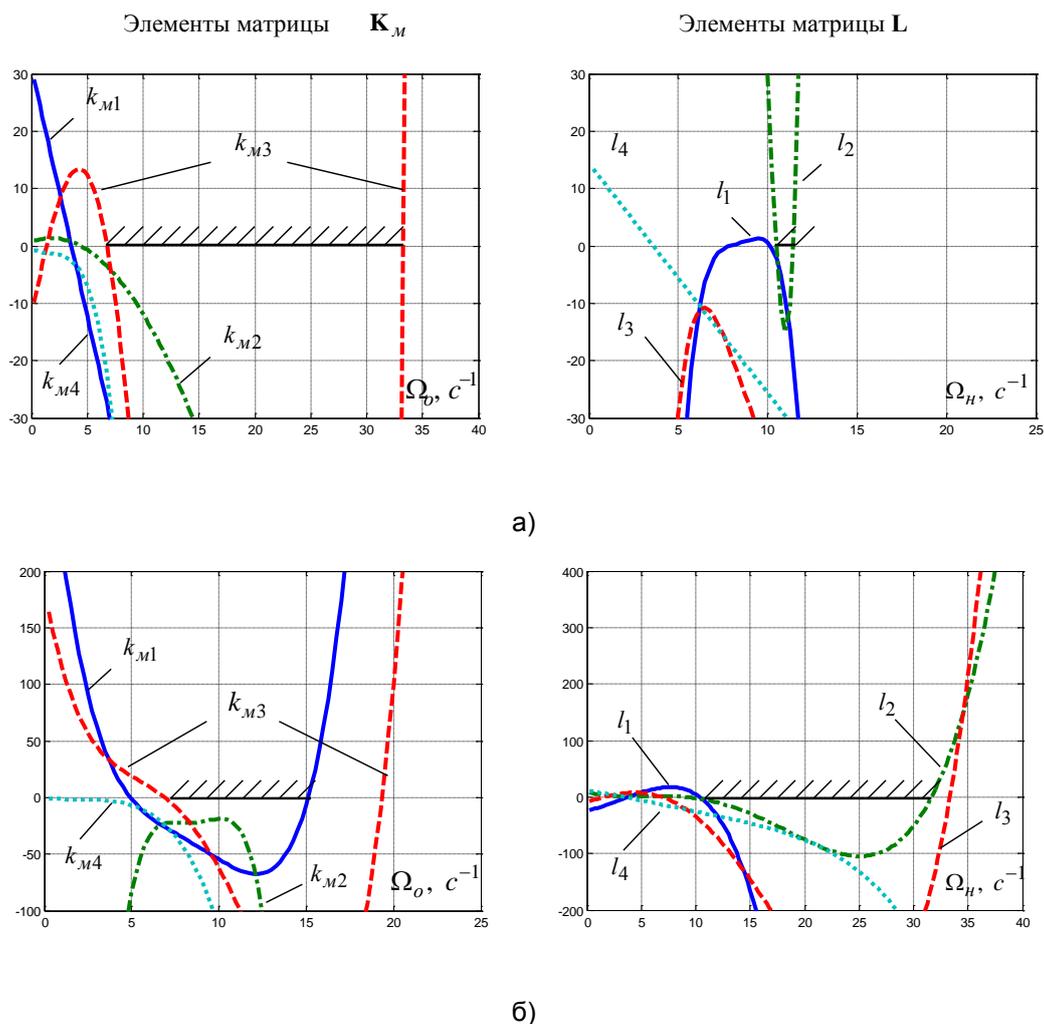


Рис. 5. Области параметрической грубости вариантов системы управления ОУ1 при РНС в форме объекта (а) и РНС оптимальной структуры (б)

Параметры РНС различной структуры для ОУ1

Структура	Параметры РНС	
Форма объекта	$K_m = [-98,77 \quad -32,78 \quad -2,572 \cdot 10^2 \quad -5,995 \cdot 10^2]$	$L = [-7,374 \cdot 10^4 \quad +5,430 \cdot 10^5 \quad -4,168 \cdot 10^4 \quad -1,056 \cdot 10^2]$
Оптимальная форма	$\hat{K}_m = [-6,402 \quad -7,529 \cdot 10^2 \quad -2,023 \cdot 10^2 \quad -5,998 \cdot 10^2]$	$\hat{L} = [-4,084 \cdot 10^3 \quad -51,47 \quad -2,651 \cdot 10^2 \quad -2,424 \cdot 10^2]$
Сбалансированная форма	$K_m'' = [-2,770 \cdot 10^2 \quad +1,109 \cdot 10^2 \quad +1,363 \cdot 10^2 \quad +50,84]$	$L'' = [-4,416 \cdot 10^3 \quad -4,002 \cdot 10^3 \quad -1,117 \cdot 10^3 \quad -7,152 \cdot 10^3]$

Соответствующие матрицы РНС, приведенные в таблице, удовлетворяют условиям параметрической грубости ($\hat{K}_m < 0$ и $\hat{L} < 0$). Поэтому для реализации НС принимаем полученные значения \hat{A}, \hat{B} , и \hat{C} .

В результате преобразований структуры наблюдателя удалось расширить область параметрической грубости контура подстройки РНС за счет сокращения соответствующей области контура управления

(рис. 5,б) по сравнению с наблюдателем в форме объекта (рис. 5,а).

Переходные характеристики вариантов системы управления ОУ1 при заданных значениях СГК Ω_0 и Ω_H приведены на рис. 6,а, где кривая 1 получена при номинальных параметрах РНС (не зависит от формы представления НС); кривая 2 соответствует НС в форме объекта, а кривая 3 – оптимальной структуре НС при отклонении коэффициента l_2 на $\Delta l_2 = 0,05 l_2$.

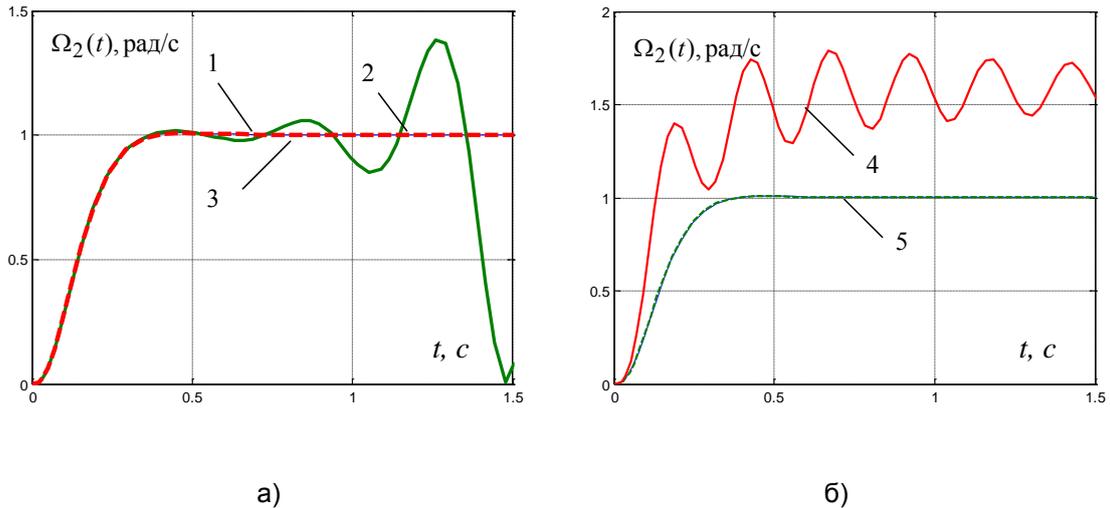


Рис. 6. Переходные характеристики системы управления ОУ1

Рассмотрим для сравнения систему управления с РНС в сбалансированной форме для ОУ1, преобразование которого с использованием процедуры *balreal()* дает следующие значения грамианов:

$$\mathbf{G}_c'' = \mathbf{G}_o'' = \text{diag}\{3, 137, 2, 32 \cdot 10^{-2}, 1, 15 \cdot 10^{-2}, 2, 27 \cdot 10^{-5}\},$$

а также значения норм матриц $\|\mathbf{P}_u\|_1 = \|\mathbf{P}_v\|_1 = 24,257$.

Процедура синтеза РНС для наблюдателя в сбалансированной форме при заданных значениях СГК Ω_o и Ω_n дает матрицы \mathbf{K}_M'' и \mathbf{L}'' , не отвечающие требованиям параметрической грубости (см. таблицу).

Переходные характеристики полученной системы приведены на рис. 6,б, где кривая 4 соответствует НС в сбалансированной форме, а кривая 5 – оптимальной структуре НС при отклонении коэффициентов k_1 на $\Delta k_1 = -0,35 k_1$.

Приведенный пример наглядно показывает, что с точки зрения параметрической грубости система с НС в сбалансированной форме значительно уступает системе с РНС, синтезированной предложенным методом.

Выводы. Предлагаемый грамианный подход позволяет сформировать структуру наблюдателя состояния с определенным соотношением свойств управляемости и наблюдаемости, обеспечивающую выполнение одного из условий параметрической грубости САУ – отсутствие положительных обратных связей в структуре РНС.

В основу метода положена процедура преобразования подобия модели объекта, при котором матрица преобразования

формируется путем вариации сингулярных чисел грамианов управляемости и наблюдаемости, что позволяет гибко менять соотношение управляемости и наблюдаемости модели, используемой при синтезе наблюдателя состояния.

Для объектов, близких к КФУ (с доминированием свойства управляемости), в соответствии с предлагаемым алгоритмом рекомендуется повышать степень наблюдаемости путем увеличения сингулярных чисел грамиана наблюдаемости, а для объектов, близких к КФН (с доминированием наблюдаемости), – повышать степень управляемости за счет увеличения сингулярных чисел грамиана управляемости.

Результаты выполненных исследований позволяют разработчикам вести целенаправленный структурно-параметрический синтез систем модального управления с РНС исходя из традиционных показателей качества и условий низкой чувствительности САУ к вариациям собственных параметров устройства управления.

Список литературы

1. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. – М.: Машиностроение, 1976. – 184 с.
2. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. – М.: Наука, 1985. – 352 с.
3. Поляк Б.Т. Международный симпозиум «Робастность в идентификации и управлении» // Изв. РАН. Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 8. – С. 185–193.

4. **Подчукаев В.А.** Аналитические методы теории автоматического управления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

5. **Поляк Б.Т., Щербakov П.С.** Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.

6. **Тарарыкин С.В., Тютиков В.В.** Робастное модальное управление динамическими системами // Изв. РАН. Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 5. – С. 41–55.

7. **Анализ** параметрической чувствительности и структурная оптимизация систем модального управления с регуляторами состояния / А.А. Анисимов, Д.Г. Котов, С.В. Тарарыкин, В.В. Тютиков // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2011. – № 5. – С. 18–32.

8. **Анисимов А.А., Тарарыкин С.В.** Особенности синтеза параметрически грубых систем модального управления с наблюдателями состояния // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2012. – № 5. – С. 3–14.

9. **Изерман Р.** Цифровые системы управления: пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 541 с.

10. **Некоторые** методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры / В.А. Бойченко, А.П. Курдюков, В.Н. Тимин и др. // Управление большими системами. – 2007. – Вып. 19. – С. 23–126.

11. **Мироновский Л.А., Соловьева Т.Н.** Анализ и синтез модально-сбалансированных систем // Изв. РАН. Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 4. – С. 59–79.

12. **Конструирование** объекта управления. Ч. 1 / Д.С. Бирюков, Н.А. Дударенко, О.В. Слита, А.В. Ушаков // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2013. – № 6. – С. 2–6.

13. **Бирюков Д.С., Дударенко Н.А., Ушаков А.В.** Контроль вырождения динамических систем: грамианный подход // Изв. вузов. Приборостроение. – 2013. – № 4. – С. 34–37.

14. **Ober R., McFarlane D.** Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A Normalized Coprime Factor Approach // Linear Algebra Appl. – 1989. – Vol. 122–124. – P. 23–64.

15. **Moore B.C.** Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction // IEEE Trans. Automat. Control. – 1981. – Vol. AC-26. – P. 17–32.

References

1. Kuzovkov, N.T. *Modal'noe upravlenie i nablyudayushchie ustroystva* [Modal control and observing device]. Moscow: Mashinostroenie, 1976. 184 p.

2. Voronov, A.A. *Vvedenie v dinamiku slozhnykh upravlyaemykh sistem* [Introduction to the dynamics of complex controlled systems]. Moscow: Nauka, 1985. 352 p.

3. Polyak, B.T. Mezhdunarodnyy simpozium «Robastnost' v identifikatsii i upravlenii» [International Symposium “Robustness in Identification and Management”]. *Izvestiya RAN. Avtomatika i telemekhanika*, 1999, no. 8, pp. 185–193.

4. Podchukaev, V.A. *Analiticheskie metody teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Analytical methods of automatic control theory]. Moscow: FIZMATLIT, 2002. 256 p.

5. Polyak, B.T., Shcherbakov, P.S. *Robastnaya ustoychivost' i upravlenie* [Robust stability and control]. Moscow: Nauka, 2002. 303 p.

6. Tararykin, S.V., Tyutikov, V.V. Robastnoe modal'noe upravlenie dinamicheskimi sistemami [Robust modal control of dynamic systems] *Izvestiya RAN. Avtomatika i telemekhanika*, 2002, no. 5, pp. 41–55.

7. Anisimov, A.A., Kotov, D.G., Tararykin, S.V., Tyutikov, V.V. Analysis of Parametric Sensitivity and Structural Optimization of Modal Control Systems with State Controllers. *Journal of Computer and System Sciences International*, 2011, vol. 50, no. 5, pp. 698–719.

8. Anisimov, A.A., Tararykin, S.V. Peculiarities of Synthesis of Parametrically Robust Modal Control System with State Observers. *Journal of Computer and System Sciences International*, 2012, vol. 51, no. 5, pp. 617–627.

9. Izerman, R. *Tsifrovye sistemy upravleniya* [Digital control systems]. Moscow: Mir, 1984. 541 p.

10. Boychenko, V.A., Kurdyukov, A.P., Timin, V.N., Chaykovskiy, M.M., Yadykin, I.B. Nekotorye metody sinteza regulyatorov ponizhennogo poryadka i zadannoy struktury [Some methods for synthesizing regulators of reduced order and a given structure]. *Upravlenie bol'shimi sistemami*, 2007, vol. 19, pp. 23–126.

11. Mironovskiy, L.A., Solov'eva, T.N. Analiz i sintez modal'no-sbalansirovannykh sistem [Analysis and synthesis of modally balanced systems]. *Izvestiya RAN. Avtomatika i telemekhanika*, 2013, no. 4, pp. 59–79.

12. Biryukov, D.S., Dudarenko, N.A., Slita, O.V., Ushakov, A.V. Konstruirovaniye ob"ekta upravleniya. Ch.1 [Construction of a control object. Part 1]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2013, no. 6, pp. 2–6.

13. Biryukov, D.S., Dudarenko, N.A., Ushakov, A.V. Kontrol' vyrozhdeniya dinamicheskikh sistem: gramianny podkhod [Control of degeneration of dynamical systems: Gramian approach]. *Izvestiya vuzov. Priborostroenie*, 2013, no. 4, pp. 34–37.

14. Ober, R., McFarlane, D. Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A Normalized Coprime Factor Approach. *Linear Algebra Appl*, 1989, vol. 122–124, pp. 23–64.

15. Moore, B.C. Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1981, vol. AC-26, pp. 17–32.