

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 681.5.013

Сергей Вячеславович Тарарыкин

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор кафедры электроники и микропроцессорных систем, Россия, Иваново, e-mail: tarsv56@mail.ru

Алексей Михайлович Аббясов

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», аспирант, старший преподаватель кафедры электроники и микропроцессорных систем, Россия, Иваново, e-mail: alexx.bit@mail.ru

Оценка степени управляемости и наблюдаемости объекта при синтезе робастных систем управления¹

Авторское резюме

Состояние вопроса. Традиционные критерии оценки системных свойств объектов позволяют лишь качественно анализировать управляемость и наблюдаемость динамических систем, что ограничивает возможность прогнозирования успешности синтеза систем управления. Исследования показывают, что сложившаяся методология получения и применения количественных оценок управляемости и наблюдаемости нельзя признать завершенной и актуальность задачи их совершенствования продолжает сохраняться. Одним из наименее проработанных вопросов теории является формирование и применение количественных критериев оценки системных свойств объектов для прогнозирования и улучшения робастных свойств синтезируемых систем управления.

Материалы и методы. Исследование проведено с использованием методов векторно-матричного и структурного представления динамических объектов и систем в координатах состояния и в соотношениях «вход–выход», методов расчета грамианов управляемости и наблюдаемости, а также их сингулярных разложений для исходной и канонических форм представления объекта. Параметрический синтез регуляторов состояния и «вход–выходных» полиномиальных регуляторов выполнен методами модального и модально-полиномиального управления. Оценка эффективности полученных результатов осуществлена методами цифрового моделирования.

Результаты. Разработан метод и получены матричные критерии количественной оценки степени управляемости и наблюдаемости объекта, основанные на сопоставлении степени близости его реальной структуры к эталонным моделям в виде канонических форм управляемости и наблюдаемости, предварительно согласованных по входу и выходу с реальной структурой объекта. Предложенные критерии оценки системных свойств оказываются не только более удобными и информативными для оценки и сравнения системных свойств объектов управления, но и полезными при разработке методов их улучшения.

Выводы. По сравнению с традиционным методом оценки системных свойств объектов управления, основанным на использовании сингулярных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости, разработанный метод и сформированные на его основе критерии оценок степени управляемости и наблюдаемости минимально-фазовых SISO-объектов позволяют точнее прогнозировать робастные свойства синтезируемых систем

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ №075-03-2023-025 (1/23).

The study is conducted within the framework of the state task of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation No. 075-03-2023-025 (1/23).

модального управления с безынерционными и динамическими регуляторами, выполнять их структурную оптимизацию, а также количественно оценивать эффективность применения различных способов улучшения указанных системных свойств.

Ключевые слова: робастные системы управления, свойства робастных систем управления, количественные критерии оценки системных свойств объекта, безынерционный регулятор, динамический регулятор, малая постоянная времени

Sergey Vyacheslavovich Tararykin

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences, (Post-doctoral degree), Professor of Electronics and Microprocessor Systems Department, Russia, Ivanovo, e-mail: tarsv56@mail.ru

Alexey Mikhailovich Abbyasov

Ivanovo State Power Engineering University, Postgraduate Student, Senior Lecturer of Electronics and Microprocessor Systems Department, Russia, Ivanovo, e-mail: alexx.bit@mail.ru

Evaluation of the degree of controllability and observability of an object during synthesis of robust control systems

Abstract

Background. Traditional criteria for assessing system properties allow us only to analyze qualitatively the controllability and observability of dynamic systems, which limits the possibility of predicting the success of the synthesis of control systems. Research shows that the established methodology to obtain and apply quantitative assessment of controllability and observability cannot be considered complete, and thus, the task of their improvement continues to be relevant. One of the least developed issues of the theory is the development and application of quantitative criteria to assess the system properties of objects for predicting and improving the robust properties of synthesized control systems.

Materials and methods. The paper uses methods of vector-matrix and structural representation of dynamic objects and systems in state coordinates and in input-output relations. Methods of calculating controllability and observability Grammians are applied, as well as their singular decompositions for the initial and canonical forms of object representation. Parametric synthesis of state controllers and input-output polynomial controllers is performed using modal and modal-polynomial control methods. Evaluation of the effectiveness of the obtained results is carried out using digital modeling methods.

Results. A method has been developed and matrix criteria have been obtained for quantitative assessment of the degree of controllability and observability of an object. They are based on comparison of the degree of closeness of its real structure to reference models in the form of canonical forms of controllability and observability, pre-coordinated by input and output with the real structure of the object. The proposed criteria to assess system properties are not only more convenient and informative for assessing and comparing system properties of control objects, but also useful when developing methods to improve them.

Conclusions. In comparison with the traditional method of assessing the system properties of control objects based on the use of singular decompositions of controllability and observability grammians, the developed method and the criteria for assessing the degree of controllability and observability of minimum-phase SISO objects formed on its basis allow us to predict more accurately the robust properties of synthesized modal control systems with inertialess and dynamic controllers, to perform their structural optimization, and also to assess quantitatively the effectiveness of various methods to improve the indicated system properties.

Key words: robust control systems, properties of robust control systems, quantitative criteria for assessing the system properties of an object, inertialess controller, dynamic controller, small time constant

DOI: 10.17588/2072-2672.2025.2.069-080

Введение. Традиционные оценки (критерии) управляемости и наблюдаемости объектов [1] позволяют провести лишь качественный анализ их свойств и не дают возможности прогнозировать успешность выполнения процедур синтеза систем управления в том или ином структурном исполнении. Фактически с момента появления указанных критериев не прекращаются попытки их дополнения более информативными количественными оценками степени управляемости и наблюдаемости в целях повышения эффективности формируемых алгоритмов управления [2]. Однако решить такую задачу так же оперативно и просто, как это бы-

ло сделано в отношении оценок степени (запаса) устойчивости, оказалось затруднительным в силу более сложных взаимосвязей управляемости и наблюдаемости с прямыми показателями качества и различными свойствами динамических систем.

Достаточно удачные попытки отразить основные этапы истории развития критериев степени управляемости и наблюдаемости, раскрыть теоретические основы их разработки, выполнить исследование и указать основные сферы применения были предприняты в [3, 4]. Там же приведена обширная библиография по исследуемому вопросу, включая

публикации о методах использования сингулярных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости. Тем не менее авторы обзоров приходят к выводу о том, что сложившаяся методология получения и применения количественных оценок управляемости и наблюдаемости нельзя признать завершенной, и актуальность задачи их совершенствования продолжает сохраняться.

Общий анализ проведенных исследований указывает также на то, что одним из наименее проработанных вопросов теории является формирование и применение количественных критериев оценки управляемости и наблюдаемости объектов для прогнозирования и улучшения робастных свойств синтезируемых систем управления даже при их линейном характере.

Обзор и сравнительный анализ существующих методов и критериев количественной оценки управляемости и наблюдаемости (системных свойств) для решения задач робастного управления линеаризованными объектами предложены в [5], где на конкретных примерах показаны ограниченные возможности и основные недостатки известных подходов.

В связи с этим для установления более четкой взаимосвязи между размерами диполей (пар близких нулей и полюсов) и соответствующими степенями управляемости и наблюдаемости объекта с чувствительностью синтезируемой системы модального управления к вариациям внутренних параметров было предложено оценивать управляемость и наблюдаемость путем расчета относительных изменений детерминантов матриц управляемости и наблюдаемости при вариациях параметров, влияющих на размеры диполей. На этой основе удалось выработать конкретные рекомендации по улучшению робастных свойств систем автоматического управления (САУ) путем понижения порядка расчетной модели объекта за счет исключения из нее определенного числа «левых» диполей, а также обеспечить возможность сопоставления системных и прогнозирования робастных свойств моделей объектов и систем управления различного порядка.

Однако этот метод нельзя признать универсальным, поскольку он связывает с чувствительностью САУ только степени управляемости и наблюдаемости объекта, обусловленные размерами диполей, не учитывая других факторов. Кроме того, для прогноза робастных свойств системы требуется дополнительный анализ объекта, направленный на выявление параметров, которые влияют на размеры диполей.

В процессе поиска более универсальных и формализованных методов количественной оценки системных свойств объекта и прогноза на их основе параметрической чувствительности синтезируемых систем в [6] предложена идея сопоставления структуры расчетной модели, представленной в реальных координатах

объекта, с соответствующими структурами его моделей, представленных в канонических формах управляемости и наблюдаемости (КФУ и КФН). При этом степень близости реальной структуры объекта к неким эталонным моделям в виде КФУ и КФН, т. е. в абсолютно управляемой и абсолютно наблюдаемой формах, может быть положена в основу оценки степени управляемости и наблюдаемости объекта относительно принятых эталонов.

Однако предложенная идея не была доведена до окончательной реализации в силу неопределенности выбора вида передаточной функции объекта как основы формирования его моделей в КФУ и КФН. Так, одновременное умножение или деление полиномов ее числителя и знаменателя на некоторое число при сохранении неизменной матрицы состояния объекта приводит к произвольным изменениям матриц входа и выхода и соответствующим вариациям управляемости и наблюдаемости эталонных форм. Кроме того, остается под сомнением возможность сравнения системных свойств объектов разного порядка, поскольку при их определении используются различные эталонные формы.

Постановка задачи. Учитывая изложенное, в настоящем исследовании ставится задача формирования более универсальных и информативных оценок (критериев) степени управляемости и наблюдаемости минимально-фазовых SISO-объектов (с одним входом и одним выходом), позволяющих точнее прогнозировать робастные свойства синтезируемых систем модального управления с безынерционными и динамическими (полиномиальными) регуляторами состояния, проводить структурную оптимизацию систем выбором рационального типа регулятора, а также правильно отражать и количественно оценивать результаты применения различных методов улучшения указанных системных свойств, в том числе понижением порядка используемой расчетной модели объекта.

Формирование критериев оценки степени управляемости и наблюдаемости расчетной модели объекта заданного порядка. Попытаемся в более полной мере реализовать рациональную идею формирования критериев оценки степени управляемости и наблюдаемости минимально-фазового SISO-объекта на основе оценки близости его структуры соответствующим представлениям в КФУ и КФН, доработав методику ее реализации.

На начальном этапе оценки предлагается провести согласование исходной структурной схемы объекта по входу и выходу соответственно с его структурами, представленными в КФУ и КФН, чтобы исключить влияние факторов усиления или ослабления управляющего воздействия и выходной величины на результаты оценки структурного соответствия.

Эта задача может быть выполнена представлением передаточных функций объекта, предназначенных для формирования КФУ и КФН, в таком виде, чтобы элементы матриц входа исходной модели и КФУ, а также матриц выхода исходной модели объекта и КФН оказались равными.

Так, если при векторно-матричном описании объекта управления (ОУ) порядка n в реальных координатах состояния (в исходной форме) $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t); \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} – матрицы состояния, входа и выхода с размерностями $n \times n$, $n \times 1$ и $1 \times n$ соответственно; u – управляющее воздействие; y – выходная величина; t – время, то получаем следующее выражение передаточной функции (ПФ) «вход–выход»:

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{B(s)}{A(s)} = \\ &= \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \end{aligned} \quad (2)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица; $B(s)$ и $A(s)$ – полиномы комплексной переменной Лапласа s .

Соответствующие матричные представления объекта в КФУ ($\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}$) и КФН ($\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}$) принимают вид:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{C}} = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ \dots \ 0]. \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_m \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]. \quad (4)$$

Представление (4) в КФН и описание (1) в реальных координатах обычно являются согласованными по выходу и могут быть непосредственно использованы для оценки степени наблюдаемости объекта (степени его структурной близости к КФУ).

Однако представления (3) и (1), как правило, оказываются несогласованными по входу, поэтому для оценки степени управляемости объекта следует предварительно привести выражение его передаточной функции к виду

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{B_1^{-1} b_m s^m + \dots}{B_1^{-1} s^n + B_1^{-1} a_{n-1} s^{n-1} + B_1^{-1} a_{n-2} s^{n-2} + \dots} \rightarrow \\ &\leftarrow \frac{+B_1^{-1} b_1 s + B_1^{-1} b_0}{+B_1^{-1} a_2 s^2 + B_1^{-1} a_1 s + B_1^{-1} a_0} \end{aligned} \quad (5)$$

и скорректировать представление матрицы входа в КФУ $\bar{\mathbf{B}} = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ B_1]_n^T$, где B_1 – первый элемент матрицы \mathbf{B} .

При этом изменение матрицы $\bar{\mathbf{C}}$ не будет иметь значение, поскольку она не влияет на управляемость координат состояния объекта.

Отметим, что аналогичное согласование объекта по входу с КФУ может быть реализовано при сохранении канонических представлений (3), (4), полученных по выражению ПФ (2), путем принудительной коррекции матрицы \mathbf{B} исходного объекта приведением ее к виду $\mathbf{V} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]_n^T$, что означает исключение влияния безынерционных звеньев на входе ОУ при оценке его структурного соответствия КФУ. Такое согласование может быть более предпочтительным, поскольку сохраняется дуальное соответствие используемых канонических форм, когда матрица управляемости объекта в КФУ оказывается равной матрице наблюдаемости в КФН.

Несоответствие местоположения элементов приведенных матриц \mathbf{V} и $\bar{\mathbf{B}}$ не должно вызывать затруднений, поскольку переименованием координат состояния КФУ всегда можно получить желаемое соответствие при сохранении структуры КФУ. Так, например, применяя обратную (зеркальную) индексацию наименований координат состояния, получаем следующее матричное представление объекта в канонической форме, которую можно назвать инверсной КФУ:

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{\bar{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}} = [0 \ \dots \ b_m \ b_{m-1} \ \dots \ b_0].$$

При этом обеспечивается более строгое соответствие матриц входа, но структурная схема исходной КФУ и выражение ее матрицы управляемости сохраняются прежними.

Таким образом, переход к инверсной КФУ можно и не выполнять, достаточно лишь представлять, что он существует и всегда может быть выполнен.

Следует также отметить, что если в реальной структуре ОУ управляющее воздействие связано с производными нескольких координат состояния, т. е. в исходной матрице \mathbf{B} представления (1) будет несколько ненулевых элементов, то следует выполнить согласование наибольшего из них с элементом матрицы $\bar{\mathbf{B}}$ и пропорционально изменить значения других элементов. Это обеспечит более корректное сопоставление исходного представления объекта со структурой в КФУ и исключит возможность превышения степени его управляемости по сравнению с КФУ, являющейся абсолютно управляемой формой.

При необходимости согласования модели объекта с КФН в случае несоответствия значений матриц \mathbf{C} и $\tilde{\mathbf{C}}$ представлений (1) и (4) следует выполнить аналогичные (дуальные) преобразовательные процедуры.

Согласование модели объекта по входу и выходу соответственно с КФУ и КФН позволяет обеспечить более строгую оценку его системных свойств относительно принятых «структурных эталонов».

Для выполнения этой оценки были предложены и исследованы на различных примерах объектов и систем управления следующие выражения критериев оценки степени управляемости и наблюдаемости (S_U и S_V).

1. Критерии в виде первых матричных норм, реализующие структурно-параметрическое сопоставление матриц состояния объекта в КФУ и КФН с матрицей состояния в реальных координатах и не требующие согласования модели объекта по входу и выходу с каноническими формами:

$$S_U = \|\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^{-1}\|_1; \quad S_V = \|\tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^{-1}\|_1.$$

2. Критерии, позволяющие обеспечить сопоставление норм матриц управляемости и наблюдаемости объекта, представленного в КФУ, КФН и реальных координатах состояния:

$$S_U = \frac{\|\bar{\mathbf{U}}\|_1}{\|\mathbf{U}\|_1}, \quad S_V = \frac{\|\tilde{\mathbf{V}}\|_1}{\|\mathbf{V}\|_1},$$

$$\text{где } \mathbf{U} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}];$$

$$\bar{\mathbf{U}} = [\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}} \quad \dots \quad \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}];$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T];$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = [\tilde{\mathbf{C}}^T \quad \tilde{\mathbf{A}}^T\tilde{\mathbf{C}}^T \quad (\tilde{\mathbf{A}}^T)^2\tilde{\mathbf{C}}^T \quad \dots \quad (\tilde{\mathbf{A}}^T)^{n-1}\tilde{\mathbf{C}}^T].$$

3. Критерии в виде норм матриц $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{U}}\mathbf{U}}$, $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{V}}$ преобразования описания объекта из КФУ и КФН к описанию в реальных координатах, отражающие степень удаления исходной структуры объекта от структур указанных канонических форм:

$$S_U = \|\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{U}}\mathbf{U}}\|_1 = \|\bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}\|_1;$$

$$S_V = \|\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{V}}\|_1 = \|\tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V}^{-1}\|_1 = \|(\mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{V}}^{-1})^T\|_1,$$

$$\text{где } \tilde{\mathbf{U}} = [\tilde{\mathbf{B}} \quad \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} \quad \tilde{\mathbf{A}}^2\tilde{\mathbf{B}} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{A}}^{n-1}\tilde{\mathbf{B}}].$$

4. Критерии оценки степени структурного соответствия исходного представления объекта с представлениями в КФУ и КФН:

$$S_U = \|\bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}\|_1; \quad S_V = \|\tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V}^{-1}\|_1.$$

Применению критериев 2–4 предшествовали изложенные выше процедуры вход-выходного согласования исходного описания объекта с его представлениями в КФУ и КФН. Степень близости значений указанных критериев к единице должна отражать структурное соответствие исходного представления объекта и его канонических («эталонных») форм.

В качестве дополнительных ориентиров использовались также приближенные количественные оценки системных свойств объектов, получаемые в результате сингулярного разложения грамианов управляемости и наблюдаемости и определения диагональных матриц

$$\Sigma_C = \text{diag}\{\sigma_{c1}, \sigma_{c2}, \dots, \sigma_{cn}\},$$

$$\Sigma_O = \text{diag}\{\sigma_{o1}, \sigma_{o2}, \dots, \sigma_{on}\},$$

состоящих из сингулярных чисел соответствующих грамианов, выстроенных в порядке убывания. При этом значительные отличия минимальных элементов от других сингулярных чисел являются индикаторами вырождения свойств управляемости и наблюдаемости исследуемого объекта.

Проведенные исследования показали, что наиболее информативными и удобными для дальнейшего исследования являются критерии 4, позволяющие оценивать близость различных форм структурного представления объекта именно по свойствам их управляемости и наблюдаемости.

Важно также отметить, что, согласно (3) и (4), имеется дуальное соответствие матричного представления объекта в КФУ и КФН: $\bar{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}^T$, $\bar{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{C}}^T$, $\bar{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{B}}^T$. Как следствие, матрица управляемости объекта в КФУ $\bar{\mathbf{U}}$ и его матрица наблюдаемости в КФН $\tilde{\mathbf{V}}$ становятся одинаковыми: $\bar{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{V}}$.

В итоге критерии 4 приобретают возможность оценивать степень управляемости и степень наблюдаемости объекта, представленного в реальных координатах, относительно единого эталона и могут использоваться не только для определения изменений каждого из этих системных свойств, но и для их взаимного сопоставления. Это повышает информативность предложенных критериев и позволяет использовать их как для параметрической, так и для структурной оптимизации синтезируемых систем.

Кроме того, соответствующие выражения грамиана управляемости объекта в КФУ

$$\bar{\mathbf{G}}_C = \int_0^{\infty} e^{\bar{\mathbf{A}}t} \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}^T e^{\bar{\mathbf{A}}^T t} dt$$

$$\text{в КФН } \tilde{\mathbf{G}}_O = \int_0^{\infty} e^{\tilde{\mathbf{A}}t} \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{C}} e^{\tilde{\mathbf{A}}^T t} dt$$

также становятся одинаковыми ($\bar{\mathbf{G}}_C = \tilde{\mathbf{G}}_O$), как и соответствующие сингулярные числа этих грамианов:

$$\bar{\Sigma}_C = \text{diag}\{\bar{\sigma}_{c1}, \bar{\sigma}_{c2}, \dots, \bar{\sigma}_{cn}\},$$

$$\tilde{\Sigma}_O = \text{diag}\{\tilde{\sigma}_{o1}, \tilde{\sigma}_{o2}, \dots, \tilde{\sigma}_{on}\},$$

$$\text{т. е. } \bar{\Sigma}_C = \tilde{\Sigma}_O.$$

Это, в свою очередь, позволяет сопоставлять сингулярные разложения грамианов управляемости и наблюдаемости реального объекта с единым эталонным разложением и оказывается удобным для использования в качестве дополнительных индикаторов вырождения системных свойств управляемого объекта.

Примеры применения сформированных критериев для анализа объектов и прогноза робастных свойств синтезируемых систем управления. Поясним выполнение указанных процедур конкретными числовыми примерами исследования системных свойств различных объектов, а также робастных свойств систем модального управления ими на основе использования безынерционных регуляторов состояния (РС) и динамических (полиномиальных) «вход-выходных» регуляторов (ПР).

Пример 1. Пусть исходное векторно-матричное описание объекта ОУ1 пятого порядка при наличии малого параметра (постоянной времени, равной 1 мс) в элементе его структуры, наиболее близко расположенном к точке приложения управляющего воздействия, имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 83,33 & -73,33 & -106,67 & 0 & 0 \\ 0 & 4,59 & 0 & -1,79 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1,49 \cdot 10^3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 22000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1].$$

Тогда вычисление ПФ объекта согласно (2) дает нормализованное представление

$$H(s) = \frac{1,26 \cdot 10^{10}}{s^5 + 1,07 \cdot 10^3 s^4 + 7,72 \cdot 10^4 s^3 + 4,01 \cdot 10^6 s^2 + 2,42 \cdot 10^8 s + 7,31 \cdot 10^8},$$

а числовые выражения соответствующих матриц объекта в КФУ, инверсной КФУ и КФН принимают вид:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -7,31 \cdot 10^8 & -2,42 \cdot 10^8 & -4,01 \cdot 10^6 & -7,72 \cdot 10^4 & -1,07 \cdot 10^3 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{C}} = [1,26 \cdot 10^{10} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$\tilde{\bar{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} -1,07 \cdot 10^3 & -7,72 \cdot 10^4 & -4,01 \cdot 10^6 & -2,42 \cdot 10^8 & -7,31 \cdot 10^8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\bar{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\bar{\mathbf{C}}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1,26 \cdot 10^{10}];$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -7,31 \cdot 10^8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2,42 \cdot 10^8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4,01 \cdot 10^6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7,72 \cdot 10^4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1,07 \cdot 10^3 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\tilde{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 1,26 \cdot 10^{10} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{C}}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1].$$

Анализ этих выражений показывает, что исходная форма ОУ и КФН являются согласованными по выходу, однако требуется согласование объекта по входу с КФУ.

Для этого, согласно (5), приведем ПФ объекта к виду

$$H(s) = \frac{5,71 \cdot 10^5}{4,54 \cdot 10^{-5} s^5 + 4,88 \cdot 10^{-2} s^4 + 3,5 s^3 + 182,49 s^2 + 1,09 \cdot 10^4 s + 3,32 \cdot 10^4}$$

и скорректируем в соответствии с этим матрицу входа КФУ $\bar{V} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 22000]^T$.

При этом получаем следующие значения оценок степени управляемости и наблюдаемости объекта:

$$S_u = \|\bar{U} \cdot U^{-1}\|_1 = 9,87; \quad S_v = \|\tilde{V} \cdot V^{-1}\|_1 = 1,75 \cdot 10^6.$$

Такие же значения оценок получаются более простым путем, если сохранить исходным выражение матрицы входа КФУ, но скорректировать матрицу входа исходного представления объекта, приведя ее к виду $V = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, а также если заменить после этого КФУ на инверсную КФУ.

Полученные значения оценок свидетельствуют о существенно более высокой степени управляемости ОУ по сравнению со степенью его наблюдаемости. Это подтверждается полученными сингулярными числами соответствующих грамианов

$$\Sigma_C = \text{diag}\{2,44 \cdot 10^5 \ 1,98 \cdot 10^4 \ 983,43 \ 819,66 \ 0,55\},$$

$$\Sigma_O = \text{diag}\{135,85 \ 9,03 \cdot 10^{-2} \ 7,86 \cdot 10^{-2} \ 9,36 \cdot 10^{-7} \ 1,49 \cdot 10^{-16}\},$$

$$\bar{\Sigma}_C = \bar{\Sigma}_O = \text{diag}\{7,8 \cdot 10^{-4} \ 8,9 \cdot 10^{-8} \ 1,5 \cdot 10^{-11} \ 5,5 \cdot 10^{-16} \ 2,8 \cdot 10^{-18}\}$$

и их графическим представлением в относительных единицах на рис. 1,а, где повышенный наклон последнего (крайнего правого) участка диаграмм свидетельствует о вырождении соответствующего системного свойства.

«Физически» потеря свойства наблюдаемости в этом случае объясняется влиянием малой постоянной времени (МПВ), структурно наиболее удаленной от точки измерения выходной координаты, а сохранение высокой степени управляемости обуславливается ее максимальным приближением к точке приложения управляющего воздействия.

Важно отметить, что по сравнению с грамианным методом предложенные критерии дают более информативное представление о системных свойствах управляемого объекта.

Проверим состоятельность этих оценок по их влиянию на робастные свойства синтезируемых систем управления, строящихся на базе безынерционных РС (рис. 2,а) и динамических «вход-выходных» ПР (рис. 2,б), с учетом того, что для успешной реализации РС требуется только хорошая управляемость объекта, а для ПР – важны оба системных свойства.

Ранее [5, 7] было показано, что в наиболее явном виде взаимосвязь робастных свойств САУ с системными свойствами ОУ проявляется в условиях, когда регуляторы формируют управляющие воздействия разного знака. В случаях низкой управляемости или наблюдаемости объекта необходимо значи-

тельно усиливать такое управление, что требует более «острой» настройки регулятора при исходных параметрах ОУ и провоцирует высокую чувствительность системы к вариациям этих параметров.

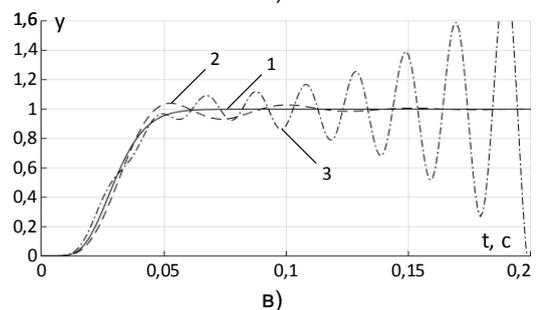
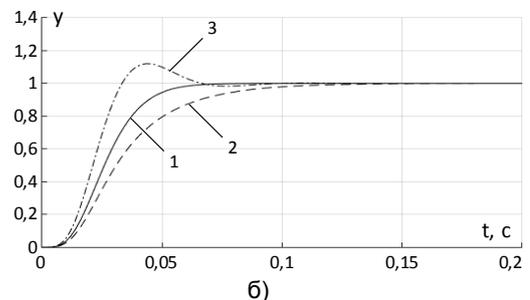
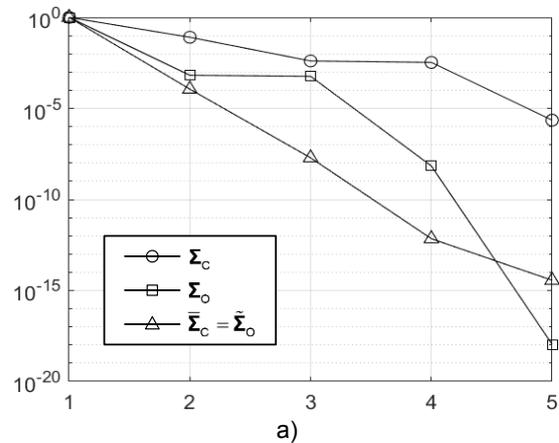


Рис. 1. Сингулярные числа грамианов ОУ1 (а) и переходные характеристики для САУ с регулятором состояния (б) и полиномиальным регулятором (в)

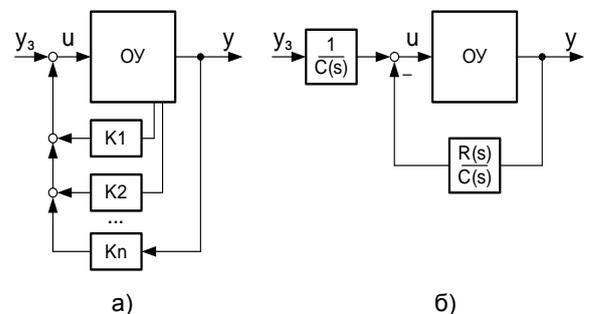


Рис. 2. Структурные схемы системы автоматического управления объектом на базе безынерционных РС (а) и динамических «вход-выходных» ПР (б), где u_3 – задающее воздействие

Применительно к исследуемым структурам (рис. 2) указанные условия возникают, если синтезированные РС формируют обратные

связи разного знака, а в составе ПР появляются неминимально-фазовые динамические звенья при управлении минимально-фазовыми объектами.

Используя методы модального и модально-полиномиального управления [8–11] и задавая выражение желаемого характеристического полинома (ХП) в виде $D(s) = (s + 180)^5$ для РС и в виде $D(s) = (s + 293)^9$ для минимального ПР, получаем соответствующие значения параметров обратных связей и числовые выражения полиномов:

$$K = [7,87 \cdot 10^{-3} \quad -0,14 \quad -6,53 \quad -498,89 \quad -8,47];$$

$$R(s) = -1,27 \cdot 10^3 s^4 + 2,66 \cdot 10^6 s^3 + 4,49 \cdot 10^3 s^2 + 3,46 \cdot 10^{10} s + 1,25 \cdot 10^{12};$$

$$C(s) = s^4 + 1,56 \cdot 10^3 s^3 + 1,35 \cdot 10^6 s^2 + 5,55 \cdot 10^8 s + 2,23 \cdot 10^{11}.$$

Они свидетельствуют о формировании дестабилизирующей (положительной) обратной связи в составе САУ с РС и наличии неминимально-фазового звена в составе ПР.

Соответствующие переходные характеристики САУ (рис. 1,б,в) на базе РС и ПР, полученные при исходных значениях параметров матрицы **A** (графики 1) и при вариациях ее элемента A_{45} на $\pm 35\%$ (графики 2, 3), подтверждают гораздо более высокую параметрическую чувствительность САУ с регулятором «вход–выход». Это хорошо согласуется с вычисленными значениями оценок степени управляемости и наблюдаемости заданного объекта управления и вполне может прогнозироваться на стадии его анализа.

Пример 2. Оценим возможность использования предложенных критериев для прогноза необычной ситуации, выявленной ранее в [7], когда робастные свойства синтезируемой САУ на базе ПР оказываются выше таковых для САУ на базе РС при их одинаковых исходных настройках.

Для этого используем следующее матричное представление ОУ2 пятого порядка с новой МПВ, структурно расположенной ближе к месту измерения выходной величины:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 83,33 & -73,33 & -106,67 & 0 & 0 \\ 0 & 4,59 & 0 & -4,48 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7,46 \cdot 10^4 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1].$$

Соответствующая нормализованная форма передаточной функции такого ОУ принимает вид

$$H(s) = \frac{3,14 \cdot 10^{10}}{s^5 + 123,33s^4 + 1,24 \cdot 10^4 s^3 + 1,48 \cdot 10^7 s^2 + 4,74 \cdot 10^8 s + 1,38 \cdot 10^9}.$$

Проводя изложенные в примере 1 вычислительные процедуры по определению предложенных критериев оценки системных свойств ОУ, согласованного по входу и выходу с КФУ и КФН, получаем:

$$S_u = 313,67; \quad S_v = 2,59.$$

Полученные значения согласуются с соответствующими сингулярными разложениями грамианов на рис. 3,а, указывают на значительно более низкую управляемость такого объекта и позволяют уверенно прогнозировать лучшие по сравнению с системой на базе РС робастные свойства САУ с неминимально-фазовым ПР, формирующим обратные связи разного знака.

В подтверждение этого на рис. 3,б,в приведены переходные характеристики САУ с РС и ПР, полученные соответственно при назначении желаемых ХП в виде $D(s) = (s + 180)^5$ и $D(s) = (s + 293)^9$, формирующих следующие параметры синтезируемых регуляторов:

$$K = [0,71 \quad -1,57 \quad 117,87 \quad 4,56 \cdot 10^4 \quad -122,93];$$

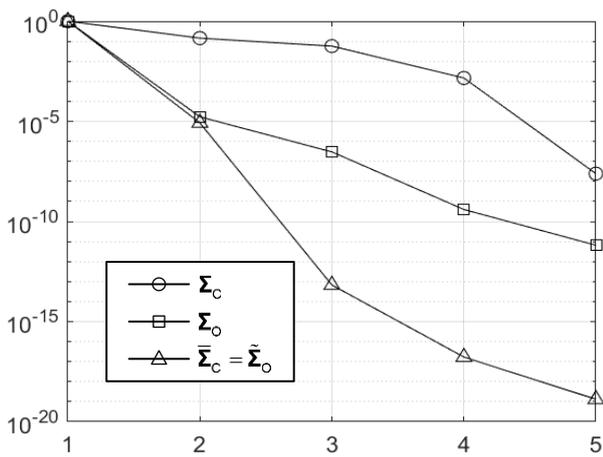
$$R(s) = 130,16s^4 - 5,39 \cdot 10^5 s^3 + 1,05 \cdot 10^7 s^2 + 9,71 \cdot 10^9 s + 4,84;$$

$$C(s) = s^4 + 2,51 \cdot 10^3 s^3 + 2,66 \cdot 10^6 s^2 + 1,46 \cdot 10^9 s + 3,83 \cdot 10^{11}.$$

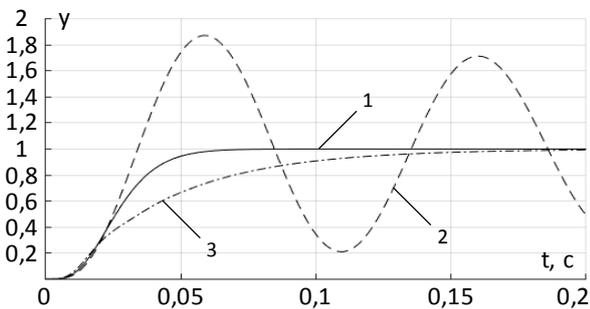
При этом графики 1 на рис. 3 рассчитаны при исходных (номинальных) параметрах объекта, а графики 2, 3 – при вариациях параметра A_{45} на $\pm 35\%$. Приведенные графики свидетельствуют о гораздо более высокой робастности САУ с регулятором «вход–выход».

Таким образом, приведенные примеры достаточно наглядно демонстрируют состоятельность и информативность выработанных критериев количественной оценки системных свойств управляемого объекта, возможность их эффективного использования для решения задач анализа ОУ, прогноза робастных свойств и структурной оптимизации регуляторов САУ.

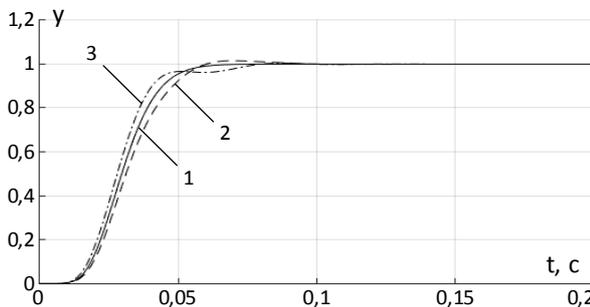
При этом следует отметить, что предложенные критерии не являются абсолютно универсальными и в общем случае не позволяют давать сравнительную количественную оценку системных свойств объектов различного порядка. Однако в определенных условиях это оказывается возможным и имеет соответствующее объяснение.



а)



б)



в)

Рис. 3. Сингулярные числа грамианов ОУ2 (а) и переходные характеристики САУ с регулятором состояния (б) и полиномиальным регулятором (в)

Сравнительная оценка степени управляемости и наблюдаемости исходного и редуцированного объектов. Анализируя диаграммы сингулярных чисел грамианов ОУ пятого порядка (пример 1), приведенные на рис. 1, приходим к выводу о том, что исключение МПВ и редуцирование объекта должно привести к существенному повышению степени наблюдаемости его расчетной модели при сохранении степени управляемости. Это объясняется значительными изменениями структуры редуцируемого ОУ в той части, которая наиболее удалена от его выхода.

Для проверки сделанного прогноза и его количественной оценки понизим порядок за-

данного ОУ на единицу, исключив из его исходного описания (обнулив) МПВ как дестабилизирующий малый параметр. В таком случае матричное представление ОУ3 четвертого порядка приобретает следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} -73,33 & -106,67 & 0 & 0 \\ 4,59 & 0 & -1,79 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1,49 \cdot 10^3 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 1,83 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \ 0 \ 0 \ 1];$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -73,33 & 4,89 \cdot 10^3 & -3,26 \cdot 10^5 \\ 0 & 4,59 & -336,44 & 1,42 \cdot 10^4 \\ 0 & 0 & 4,59 & -336,44 \\ 0 & 0 & 0 & 6,85 \cdot 10^3 \end{bmatrix};$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6,85 \cdot 10^3 \\ 0 & 0 & 1,49 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 1,49 \cdot 10^3 & 0 & -4,91 \cdot 10^6 \\ 1 & 0 & -1,49 \cdot 10^3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

а соответствующая числовая форма его нормализованной ПФ

$$H(s) = \frac{1,25 \cdot 10^7}{s^4 + 73,33s^3 + 3,77 \cdot 10^3 s^2 + 2,41 \cdot 10^5 s + 7,31 \cdot 10^5}$$

позволяет получить матричное представление объекта в КФУ (КФН) с матрицей управляемости и наблюдаемости следующего вида:

$$\bar{U} = \tilde{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -73,33 \\ 0 & 1 & -73,33 & 1,6 \cdot 10^3 \\ 1 & -73,33 & 1,6 \cdot 10^3 & -8,17 \cdot 10^4 \end{bmatrix}.$$

Определение сингулярных чисел грамианов (рис. 4, а) и вычисление оценок степени управляемости и наблюдаемости упрощенного объекта, согласованного по входу и выходу с КФУ и КФН, по предложенным критериям дает следующие значения:

$$S_u = \|\bar{U} \cdot U^{-1}\|_1 = 716,17, \quad S_v = \|\tilde{V} \cdot V^{-1}\|_1 = 47,84, \quad (7)$$

что указывает на существенное улучшение наблюдаемости и более сбалансированное сочетание системных свойств объекта при исключении МПВ из его расчетной модели.

В качестве иллюстрации на рис. 4,б,в приведены переходные характеристики САУ с

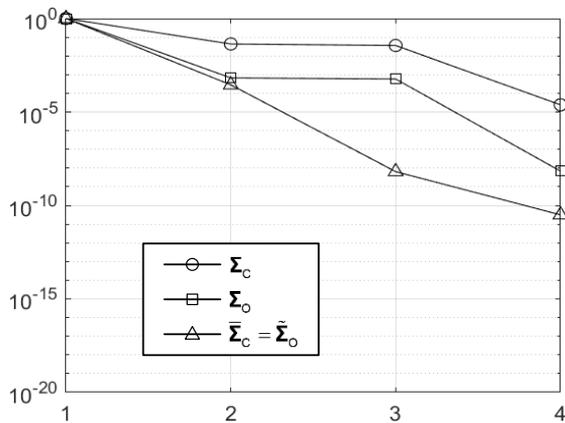
РС и ПР, полученные соответственно при назначении желаемых ХП в виде $D(s)=(s+150)^4$ и $D(s)=(s+238)^7$ и использовании синтезированных регуляторов с параметрами:

$$K = [-0,29 \quad -15,6 \quad -1,37 \cdot 10^3 \quad -24,67];$$

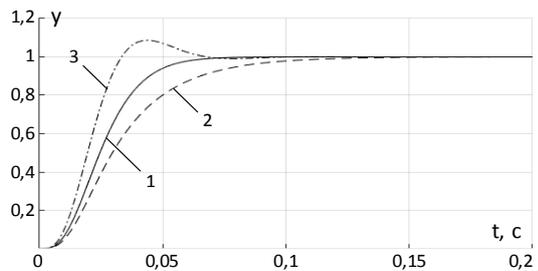
$$R(s) = 6,33 \cdot 10^3 s^3 + 1,14 \cdot 10^6 s^2 + 9,38 \cdot 10^7 s + 3,42 \cdot 10^9;$$

$$C(s) = s^3 + 1,59 \cdot 10^3 s^2 + 1,07 \cdot 10^6 s + 3,87 \cdot 10^8.$$

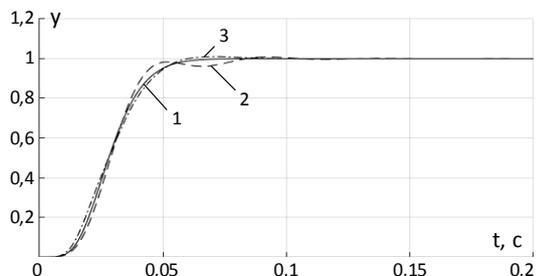
При этом графики 1 на рис. 4 рассчитаны при исходных (номинальных) параметрах ОУЗ, а графики 2, 3 – при вариациях параметра A_{45} на $\pm 35\%$. Они свидетельствуют о высокой робастности САУ с обоими типами регуляторов, которые в этом случае не формируют дестабилизирующих положительных обратных связей и неминимально-фазовых динамических звеньев.



а)



б)



в)

Рис. 4. Сингулярные числа грамианов ОУЗ (а) и переходные характеристики для САУ с регулятором состояния (б) и полиномиальным регулятором (в)

Таким образом, при снижении порядка объекта исключением из его состава МПВ предложенные критерии 4 способны правильно отражать соответствующие изменения его системных свойств. Это можно объяснить тем, что используемые канонические формы обладают стабильностью своих структур, представляющих собой цепочки интеграторов с набором независимых друг от друга обратных связей, параметры которых соответствуют коэффициентам полиномов передаточной функции объекта. При этом редуцирование объекта с МПВ сохраняет неизменными оставшиеся части структурных схем и значения параметров обратных связей, согласно усеченной передаточной функции «вход–выход», т. е. редуцируемые структуры объекта в КФУ и КФН сохраняют свой вид и не меняют параметры оставшихся звеньев. Как следствие, структура и параметры матриц управляемости и наблюдаемости редуцированного ОУ в КФУ и КФН также оказываются усеченными фрагментами соответствующих матриц исходного (полноразмерного) объекта, входившими в их составы при начальной оценке его системных свойств. В итоге при исключении МПВ новые канонические формы в значительной мере наследуют свойства своих исходные структур и получаемые на их основе оценки степени управляемости и наблюдаемости редуцированного ОУ могут использоваться для сопоставления с соответствующими оценками системных свойств исходного объекта.

Проиллюстрируем это следующим образом. Понизим на единицу порядок ПФ исходного объекта ОУ1, приведя ее к виду

$$H(s) = \frac{1,26 \cdot 10^{10}}{1,07 \cdot 10^3 s^4 + 7,72 \cdot 10^4 s^3 + 4,01 \cdot 10^6 s^2 + 2,42 \cdot 10^8 s + 7,31 \cdot 10^8} = \frac{1,17 \cdot 10^7}{s^4 + 71,84 s^3 + 3,74 \cdot 10^3 s^2 + 2,25 \cdot 10^5 s + 6,81 \cdot 10^5}.$$

Сформируем на этой основе матричные представления редуцированного ОУ в КФУ и КФН и вычислим соответствующие матрицы управляемости и наблюдаемости редуцированного объекта:

$$\bar{U}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -71,84 \\ 0 & 1 & -71,84 & 1,42 \cdot 10^3 \\ 1 & -71,84 & 1,42 \cdot 10^3 & -5,84 \cdot 10^4 \end{bmatrix};$$

$$\bar{V}_P = \begin{bmatrix} -1,17 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,17 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,17 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,17 \cdot 10^7 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Используя (8) и (6), получаем следующие приближенные значения критериев управляемости и наблюдаемости:

$$S_U = \|\bar{\mathbf{U}}_P \cdot \mathbf{U}^{-1}\|_1 = 732,6; \quad S_V = \|\tilde{\mathbf{V}}_P \cdot \mathbf{V}^{-1}\|_1 = 46,69.$$

Они достаточно точно соответствуют оценкам (7), вычисленным выше для ОУ четвертого порядка, не содержащего МПВ, что подтверждает преемственность свойств матриц управляемости и наблюдаемости канонических форм исходного и редуцированного объекта.

Безусловно, увеличение исключаемой из состава объекта МПВ будет приводить к снижению точности такого соответствия. Так, например, повышая МПВ от 1 мс до значения 5 мс, соизмеримого с основным темпом процессов в синтезированных САУ, получаем менее точные значения оценок:

$$S_U = \|\bar{\mathbf{U}}_P \cdot \mathbf{U}^{-1}\|_1 = 775,11; \quad S_V = \|\tilde{\mathbf{V}}_P \cdot \mathbf{V}^{-1}\|_1 = 32,18.$$

Тем не менее в результате проведения аналогичных процедур при исключении из описания объекта двух МПВ с величинами 1 мс и 2 мс оказалось возможным получить достаточно точные оценки системных свойств ОУ, редуцированного, соответственно, до третьего порядка.

Таким образом, предложенные критерии оценки системных свойств ОУ могут быть использованы для сопоставления степеней управляемости и наблюдаемости исходного и редуцированного объектов, если это редуцирование обусловлено исключением МПВ, величины которых существенно меньше темпов процессов в исходном объекте или синтезируемой САУ.

Выводы. Одним из наименее проработанных вопросов теории является формирование и применение количественных оценок управляемости и наблюдаемости объектов для прогнозирования и улучшения робастных свойств синтезируемых систем управления.

Эффективным методом формирования таких оценок является сопоставление исходной структуры объекта с его структурными представлениями в нормализованных канонических формах по свойствам управляемости и наблюдаемости на основе критериев 4. Для исключения влияния факторов усиления или ослабления управляющего воздействия и выходной величины должно быть выполнено предварительное согласование структуры объекта по входу и выходу соответственно с КФУ и КФН.

По сравнению с традиционным методом оценки системных свойств ОУ, основанным на использовании сингулярных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости, разработанный метод и сформированные на его основе критерии оценок степени управляемости и наблюдаемости минимально-фазовых

SISO-объектов являются более информативными и позволяют точнее прогнозировать робастные свойства синтезируемых систем модального управления с безынерционными и динамическими регуляторами, выполнять их структурную оптимизацию, а также количественно оценивать эффективность применения различных способов улучшения указанных системных свойств.

Список литературы

1. **Воронов А.А.** Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
2. **Kalman R.E., Ho Y.C., Narendra K.S.** Controllability of linear dynamical systems // *Contributions to the Theory of Differential Equations*. – 1963. – Vol. 1, No. 2. – P. 189–213.
3. **Общая методология разработки критериев степени управляемости / Ю. Ху, К.А. Неусыпин, М.С. Селезнева, Л. Чжан // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика.** – 2023. – № 7. – С. 33–42.
4. **Шэнь К., Неусыпин К.А.** Исследование критериев степеней наблюдаемости, управляемости и идентифицируемости линейных динамических систем // *Мехатроника, автоматизация, управление.* – 2016. – Т. 17, № 11. – С. 723–731.
5. **Тютиков В.В., Тарарыкин С.В.** Робастное модальное управление технологическими объектами / ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина». – Иваново, 2006. – 256 с.
6. **Разработка** теоретических основ проектирования прецизионных мехатронных систем следящего и контурно-позиционного управления / С.В. Тарарыкин, А.А. Анисимов, Л.Г. Копылова и др. – Иваново, 2021. – 144 с.
7. **Анисимов А.А., Тарарыкин С.В.** Структурно-параметрический синтез, оптимизация и настройка систем управления технологическими объектами / ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина». – Иваново, 2015. – 296 с.
8. **Кузовков Н.Т.** Модальное управление и наблюдающие устройства. – М.: Машиностроение, 1976. – 184 с.
9. **Porter B., Crossley T.R.** Modal control. – London: Taylor and Francis, 1972. – 246 p.
10. **Гайдук А.Р.** Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2012. – 360 с.
11. **Острем К., Виттенмарк Б.** Системы управления с ЭВМ: пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 480 с.

References

1. Voronov, A.A. *Ustoychivost', upravlyaemost', nablyudaemost'* [Stability, controllability, observability]. Moscow: Nauka, 1979. 336 p.
2. Kalman, R.E., Ho, Y.C., Narendra, K.S. Controllability of linear dynamical systems. *Contributions to the Theory of Differential Equations*, 1963, vol. 1, no. 2, pp. 189–213.
3. Hu, Yu., Neusylin, K.A., Selezneva, M.S., Chzhan, L. *Obshchaya metodologiya razrabotki kriteriev*

stepeni upravlyaemosti [General methodology for developing criteria for the degree of controllability]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika*, 2023, no. 7, pp. 33–42.

4. Shen', K., Neusypin, K.A. Issledovanie kriteriev stepeney nablyudaemosti, upravlyaemosti i identifikatsionnosti lineynykh dinamicheskikh sistem [Study of criteria of degrees of observability, controllability and identifiability of linear dynamic systems]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 11, pp. 723–731.

5. Tyutikov, V.V., Tararykin, S.V. *Robastnoe modal'noe upravlenie tekhnologicheskimi ob"ektami* [Robust modal control of technological objects]. Ivanovo, 2006. 256 p.

6. Tararykin, S.V., Anisimov, A.A., Kopylova, L.G., Tikhomirova, I.A., Apolonskiy, V.V. *Razrabotka teoreticheskikh osnov proektirovaniya pretsizionnykh mekhatronnykh sistem sledyashchego i konturno-pozitsionnogo upravleniya* [Development of theoretical foundations to design preci-

sion mechatronic systems for tracking and contour-position control]. Ivanovo, 2021. 144 p.

7. Anisimov, A.A., Tararykin, S.V. *Strukturno-parametricheskij sintez, optimizatsiya i nastroyka sistem upravleniya tekhnologicheskimi ob"ektami* [Structural-parametric synthesis, optimization and tuning of control systems of technological objects]. Ivanovo, 2015. 296 p.

8. Kuzovkov, N.T. *Modal'noe upravlenie i nablyudayushchie ustroystva* [Modal control and monitoring devices]. Moscow: Mashinostroenie, 1976. 184 p.

9. Porter, B., Crossley, T.R. *Modal control*. London: Taylor and Francis, 1972. 246 p.

10. Gajduk, A.R. *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyy podkhod)* [Theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach)]. Moscow: Fizmatlit, 2012. 360 p.

11. Ostryom, K., Vittenmark, B. *Sistemy upravleniya s EVM* [Computer-based control systems]. Moscow: Mir, 1987. 480 p.