Шумыло Евгений Романович,
ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
студент, кафедра прикладной математики,
e-mail: evgenyshumylo@gmail.com
Shumylo Evgeny Romanovich,
Ivanovo State Power Engineering University,
Student of the Applied Mathematics Department,
e-mail: evgenyshumylo@gmail.com

УДК 519.688

Моделирование нелинейной теплопроводности дискретными методами

С.П. Бобков, А.С. Чернявская
ФБГОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: bsp@isuctl.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Адекватное описание явлений при передаче тепла является чрезвычайно важной задачей для энергетической отрасли как в теоретическом плане, так и с позиций практического использования тепловых процессов. Классический подход к моделированию передачи тепла в сплошной среде предполагает использование уравнений теплопроводности, в которых теплофизические характеристики материалов обычно являются константами. В ряде случаев это является грубым допущением, особенно при рассмотрении процессов горения твердых тел. Учет влияния температуры на характеристики материалов приводит к необходимости исследовать нелинейные уравнения, что вызывает значительные вычислительные сложности. В этой связи становится целесообразным использовать принципиально иные подходы к моделированию теплопроводности, одним из которых являются модели на основе систем клеточных автоматов.
Материалы и методы: Использованы дискретные динамические модели в виде систем детерминированных клеточных автоматов. При этом сплошная среда рассматривается как совокупность взаимодействующих элементов, поведение которых полностью описывается локальными функциями.
Результаты: Рассмотрены примеры использования систем клеточных автоматов для моделирования нелинейных процессов переноса тепла с учетом наличия в материале объемных источников переменной мощности. Показаны преимущества дискретного подхода в сравнении с параболическими дифференциальными уравнениями в частных производных с нелинейными коэффициентами.
Выводы: Полученные данные дискретного моделирования хорошо согласуются с результатами использования классического подхода и не противоречат общепринятым в теории тепловых явлений взглядам.

Ключевые слова: клеточные автоматы, теплопередача, нелинейные задачи теплопроводности, объемные источники тепла, дискретное моделирование.

Nonlinear heat transfer modeling by discrete methods

S.P. Bobkov, A.S. Chernyavskaya
Ivanovo State University of Chemistry and Technology, Ivanovo, Russian Federation
E-mail: bsp@isuctl.ru

Abstract

Background: An adequate description of heat transfer phenomena is an extremely important task for the energy industry both theoretically and in terms of practical use of thermal processes. The classical approach to modeling heat transfer in a continuous medium involves the use of the heat equation in which the thermophysical characteristics of the materials are usually constants. In some cases, this is a rough assumption, especially when the combustion of solids is considered. Taking into account the temperature effect on the materials characteristics makes it necessary to investigate nonlinear equations, which is associated with significant computational difficulties. That is why it is reasonable to use fundamentally different approaches to heat transfer modeling, such as models based on the systems of cellular automata.
Materials and methods: Discrete dynamic models in the form of deterministic cellular automata systems are used. In this case, a continuous medium is considered as a set of interacting elements whose behavior is completely described by local functions.
Results: We have considered examples of using cellular automata systems for modeling nonlinear heat transfer processes taking into account the presence of volumetric sources of variable power in the material. The paper shows the advantages of the discrete approach over the parabolic partial differential equations with nonlinear coefficients.

Conclusions: The obtained data of discrete modelling are in good agreement with the results of the classical approach and do not contradict the commonly accepted views adopted in the theory of thermal phenomena.

Key words: cellular automata; heat transfer; nonlinear heat conduction problems, volumetric heat sources, discrete modelling.

DOI: 10.17588/2072-2672.2018.3.064-070

Введение. Опыт математического моделирования достаточно убедительно показывает, что для анализа поведения нелинейных объектов явно недостаточно традиционных подходов [1, 2]. Это вызвано, прежде всего, сложным поведением величин, характеризующих эти объекты [3]. Этот тезис также справедлив и для линейных моделей, если они описывают объекты сложной пространственной структуры и содержат большое количество параметров, неизвестных величин, независимых переменных [4].

Одной из альтернатив применению классических подходов к моделированию нелинейных процессов является использование дискретных динамических моделей в виде систем клеточных автоматов. Они явным образом сводят макроскопические явления к точно определенным микроскопическим процессам [5, 6].

Система клеточных автоматов в современном понимании – это модель, представляющая собой совокупность пространственных дискретных элементов (клеток, ячеек), определенным образом соединенных между собой. Каждая отдельная клетка системы функционирует как конечный автомат, т. е. характеризуется конкретным состоянием и может его изменять под действием входных сигналов в дискретные моменты времени. Изменение состояний происходит в соответствии с локальными функциями переходов для всех клеток системы синхронно в дискретные моменты времени. Указанные функции зависят от текущего состояния самой клетки и состояния ее ближайших соседей [7].

При моделировании физических процессов в качестве состояний и сигналов следует принимать фазовые переменные моделируемого процесса. Так, при исследовании тепловых процессов в качестве состояния выступает температура, сигналами являются потоки тепла между клетками.

Метод моделирования. Рассмотрим использование клеточных автоматов для анализа двухмерной задачи теплопроводности.

Представим твердое тело (пластину) как массив из $M \times N$ элементарных клеток размера $h \times h$. Схема дискретной модели двухмерного тела представлена на рис. 1. При этом внутренние клетки будут связаны с четырьмя соседями.

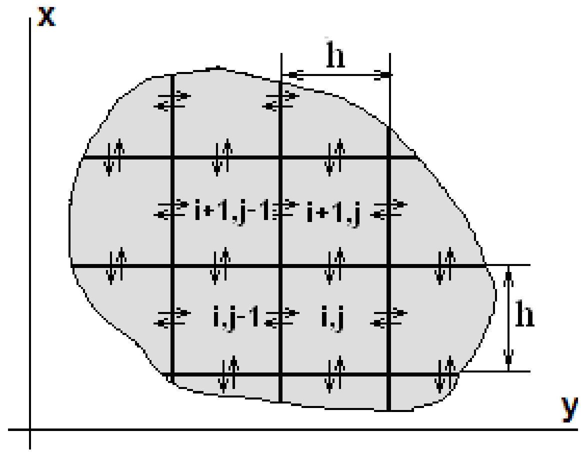

Рис. 1. Схема двухмерной клеточно-автоматной модели

Для осуществления процесса моделирования необходимо иметь конкретный вид локальной функции переходов, которая соответствует рассматриваемому процессу. Ранее [8, 9] нами был подробно описан процесс вывода функции переходов для теплопроводности, поэтому опустим некоторые подробности. В общем виде искомая функция имеет вид

$$T_{i,j}(t_{k+1}) = T_{i,j}(t_k) + \frac{\Delta t}{C_{i,j}\rho_{i,j}}\Big[q_{(i-1,j)}(t_k) + q_{(i+1,j)}(t_k) + q_{(i,j-1)}(t_k) + q_{(i,j+1)}(t_k)\Big] \quad (1)$$

или

$$T_{i,j}(t_{k+1}) = T_{i,j}(t_k) + \frac{\Delta t}{C_{i,j}\rho_{i,j}}\sum q_{(m,n)}(t_k), \quad (2)$$

где $T_{i,j}(t_k)$ и $T_{i,j}(t_{k+1})$ – температуры (состояния) клетки с номером i,j в моменты времени k и k+1; $C_{i,j}$, $\rho_{i,j}$ – теплоемкость и плотность материала клетки; $q_{(m,n)}(t_k)$ – удельные мощности тепловых потоков между соседними клетками; Δt – шаг дискретного времени.

При этом:

$$\begin{aligned} q_{(i-1,j)}(t_k) &= \lambda_{i-1,j}\frac{[T_{i-1,j}(t_k) - T_{i,j}(t_k)]}{h^2}, \\ q_{(i+1,j)}(t_j) &= \lambda_{i,j}\frac{[T_{i+1,j}(t_k) - T_{i,j}(t_k)]}{h^2}, \\ q_{(i,j-1)}(t_k) &= \lambda_{i,j-1}\frac{[T_{i,j-1}(t_k) - T_{i,j}(t_k)]}{h^2}, \\ q_{(i,j+1)}(t_k) &= \lambda_{i,j}\frac{[T_{i,j+1}(t_k) - T_{i,j}(t_k)]}{h^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\lambda_{m,n}$ – коэффициенты теплопроводности среды соответствующих клеток; h – шаг по координатам.

Выражения (1)–(3) справедливы для клеток внутри области. Для элементов, расположенных на границе моделируемой области, нетрудно получить подобные выражения, учитывая при этом наличие или отсутствие теплообмена с окружающей средой. В частности, граничные клетки имеют меньшее количество соседей внутри рассматриваемой области. Если считать моделируемое тело изолированным, при выводе функции переходов для крайних клеток следует установить равенство нулю потока тепла в окружающую среду. В противном случае следует выразить величину данного потока в соответствии с принятыми условиями на границе тела.

Таким образом, появляются локальные правила, позволяющие на каждом шаге по времени определять новое состояние каждого элемента клеточного автомата и дающие возможность моделировать процесс передачи тепла при известном начальном распределении температуры. Поскольку в выражения (1)–(3) входят теплофизические характеристики каждой отдельной клетки, можно рассматривать теплоперенос в среде, в которой имеются зоны с различными параметрами материалов.

Результаты и обсуждение. Конкретизируем поставленную задачу. Пусть мы имитирует процесс горения, для чего введем в выражения для функции переходов объемные источники тепла:

$$T_{i,j}(t_{k+1}) = T_{i,j}(t_k) + \frac{\Delta t}{C_{i,j}\rho_{i,j}}\left[\sum q_{(m,n)}(t_k) + \gamma(t_k)\right],$$

где $\gamma(t_k)$ – удельная мощность источника тепла.

Процесс моделируется на пластине, состоящей из 1681 (41x41) клеток размера 1 мм. Предусмотрена возможность отдачи тепла в окружающую среду, температура которой принимается постоянной. В исходном состоянии начальные температуры среды и пластины приняты равными 0 градусов. Центральная точка пластины «поджигается» мгновенным тепловым импульсом, температура которого превышает исходную температуру пластины на 5 градусов. Теплофизические характеристики материала принимались следующими: удельная теплоемкость 1000 Дж/(кг·К); плотность 1500 кг/м^3; исходная теплопроводность 1 Вт/(м·К). Величина шага по времени равна 0,005 с.

Пример 1. Рассмотрим квазилинейную задачу, в которой примем следующую зависимость удельной мощности источников от температуры:

$\gamma(T) = kT$.

Такие условия характерны для теплопереноса, осложненного экзотермическими явлениями. Результаты моделирования приведены на рис. 2, где показаны профили температуры в последовательные моменты времени при k = 0,9.

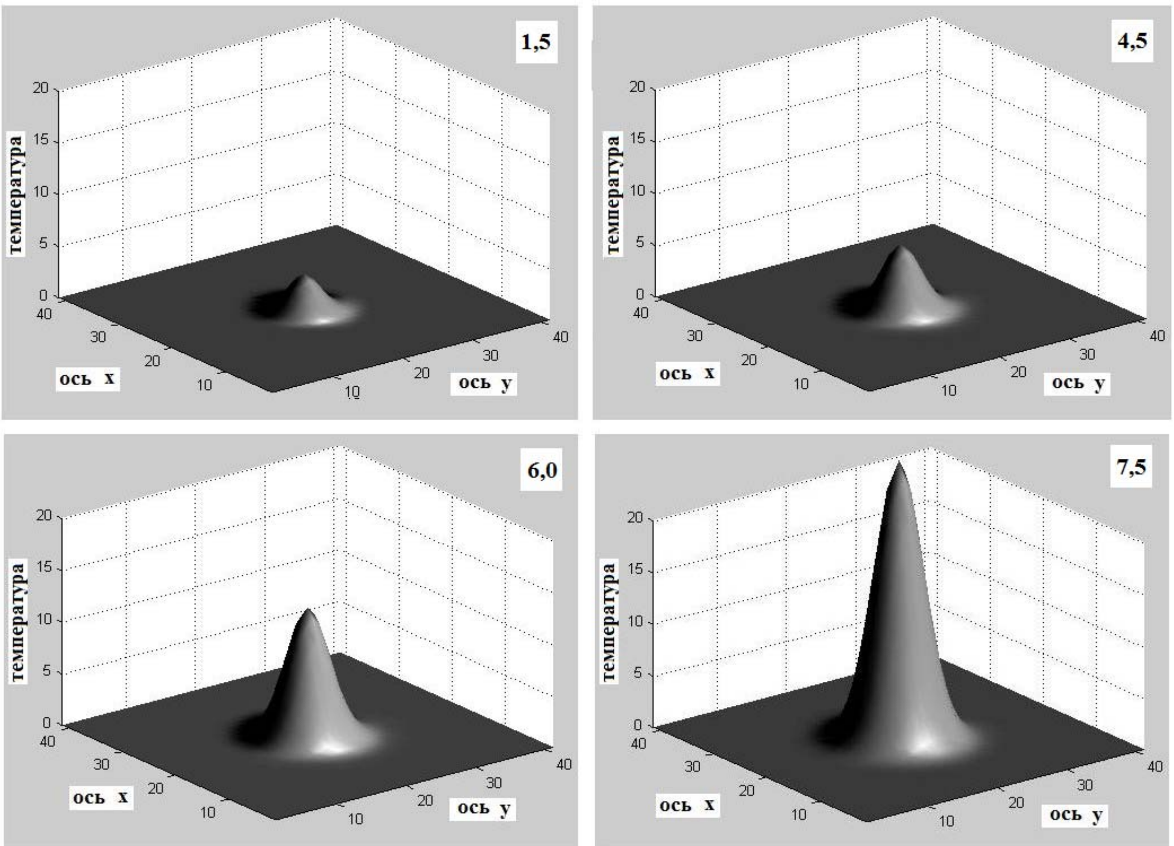

Рис. 2. Прогрев пластины при наличии источников постоянной удельной мощности

Моменты модельного времени на рис. 2–4 проставлены в правом верхнем углу. По горизонтальным осям отложены размеры пластины, по оси аппликат – температура в условных единицах. Анализ полученных результатов (рис. 2) показывает, что тепло распространяется от более нагретых участков к менее нагретым, но в точке воздействия начального импульса температура резко возрастает. Следует отметить, что линейная зависимость удельной мощности внутренних источников теплоты от температуры является слишком грубым приближением. Кроме того, в данном примере коэффициент теплопроводности принимался постоянным, хотя он зависит от температуры.

Пример 2. Рассмотрим второй пример, где введены нелинейные законы изменения мощности источника и учтено влияние температуры на транспортные коэффициенты. Примем следующее:

$$\gamma(T) = kT^{\beta}, \qquad \lambda(T) = \lambda_0 T. \qquad (4)$$

Иллюстрация второго примера при k = 0,1; β = 1,2; α = 0,05 дана на рис. 3.

В отличие от предыдущего примера, температура в центральной зоне возрастает более резко и, главное, нагретые участки более локализованы.

Следует сказать, что оба рассмотренных примера могут иллюстрировать процесс горения только на начальных этапах, поскольку неограниченное возрастание температуры противоречит физической картине реального процесса.

Пример 3. Исследуем процесс с учетом эндотермических эффектов, которые достаточно часто присутствуют в реальных условиях. Введем следующий закон зависимости удельной мощности источника от температуры:

$$\gamma(T) = kT - \gamma T^3.$$

Влияние температуры на изменение транспортных коэффициентов будем учитывать выражением (4). Результаты моделирования при k = 0,15; γ = 0,01 иллюстрирует рис. 4.

Эти данные значительно отличаются от полученных ранее: температура пластины стремится к предельному значению, а распространение теплоты обладает достаточно ярко выраженным фронтом. В реальных процессах такая ситуация может иметь место, например, при выгорании топлива.

Можно отметить, что приведенные результаты, полученные с использованием дискретной динамической модели, вполне соответствуют классическим представлениям о протекании данных процессов.

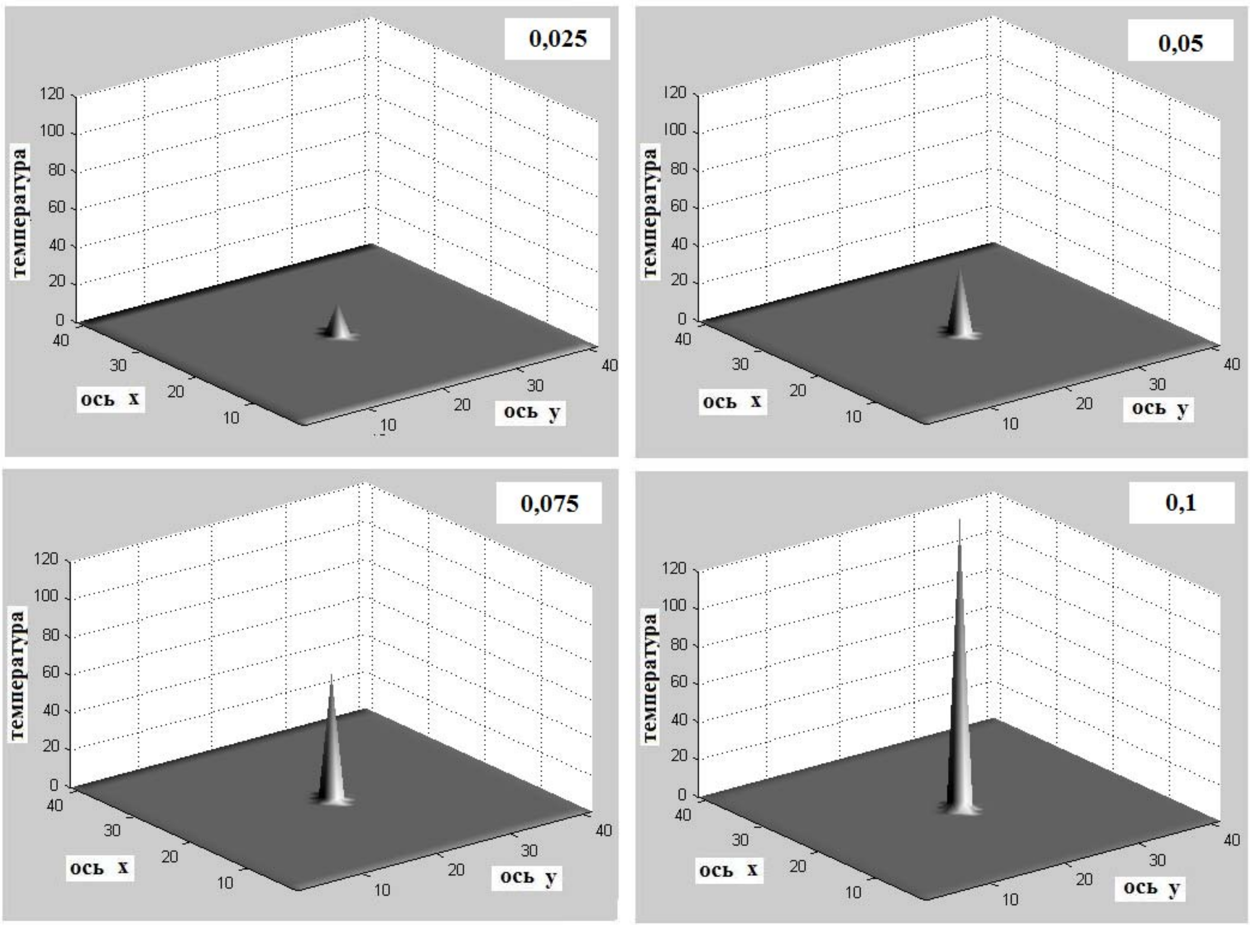

Рис. 3. Прогрев пластины с нелинейной теплопроводностью и нелинейными источниками тепла

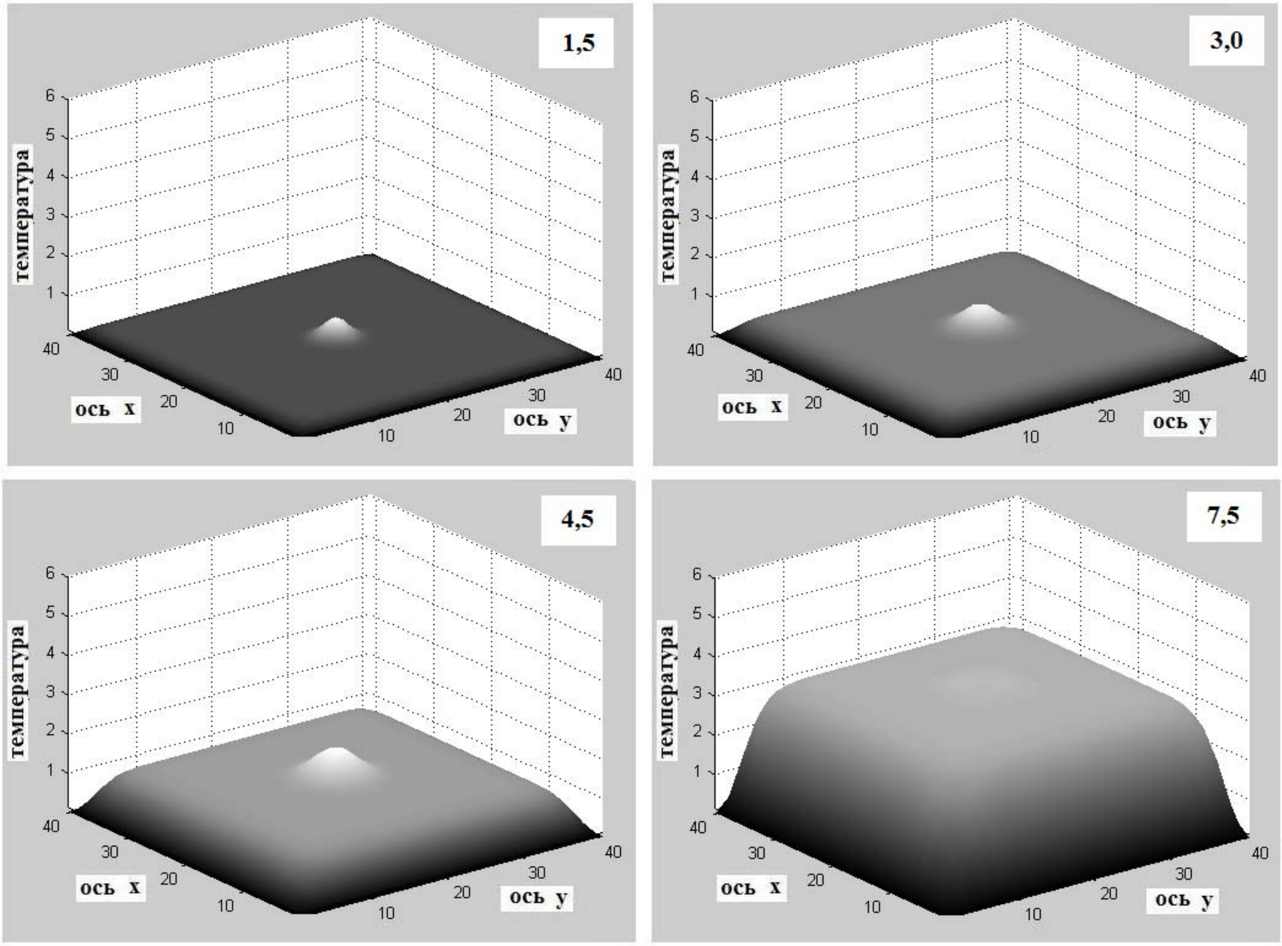

Рис. 4. Прогрев пластины с учетом эндотермических эффектов

Ранее публиковались данные о моделировании нелинейной теплопроводности [10], но их авторы использовали для исследований параболические дифференциальные уравнения переноса с нелинейными членами и коэффициентами.

В заключение следует отметить следующее. Использование дискретных динамических моделей в виде систем клеточных автоматов представляется в ряде случаев более простым в реализации по сравнению с применением дифференциальных уравнений с частными производными. Особенно это касается рассмотренных примеров анализа нелинейных процессов и процессов в неоднородных средах. В частности, при переходе от одного рассмотренного примера к другому не приходилось изменять вычислительный алгоритм, а только вводились новые зависимости для вычисления встроенных функций.

Выводы. Описанный подход представляется не только более простым в реализации, но и физически более ясным.

Принципиальное отличие между классическим и предлагаемым подходами состоит в том, что пошаговый характер правил переходов позволяет выразить присущие большинству физико-химических процессов нелинейность и дискретность самым непосредственным образом.

Клеточные автоматы позволяют описывать сложные механизмы процесса, которые другими методами описать чрезвычайно трудно. С этих позиций клеточные автоматы можно рассматривать как методику представления задачи, целью которой является разбиение большой задачи на множество дискретных, мелких задач таким образом, что формулировка задачи для одного элемента одновременно является формулировкой всех задач для всех элементов. К этому следует добавить, что присущая клеточным автоматам локальность создает все условия для успешного использования специализированных компьютеров, обладающих параллельностью вычислений. Данный факт, безусловно, позволит повысить скорость расчетов рассмотренных моделей.

Список литературы

1. **Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В.** Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды. – М.: Озон, 2016. – 280 с.

2. **Мисбахов Р.Ш., Мизонов В.Е.** Моделирование теплопроводности в составной области с фазовыми переходами // Вестник ИГЭУ. – 2015. – № 4. – С. 39–44. doi: 10.17588/2072-2672.2015.4.039-043.

3. **Нелинейная** ячеечная модель взаимосвязанного тепловлагопереноса в ограждающей конструкции с внутренним источником влаги / С.В. Федосов, Н.Н. Елин, В.Е. Мизонов, Н.Р. Порошин // Строительные материалы. – 2011. – № 8. – С. 22–24.

4. **Mizonov, V., Yelin, N., Sakharov, A.** Theoretical study of the thermal state of building envelop in the neighborhood of embedded item // Applied Thermal Engineering. – 2015. – № 79. – P. 149–152.

5. **Бандман О.Л.** Клеточно-автоматные модели пространственной динамики // Системная информатика: сб. науч. тр. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2006. – Вып. 10. – С. 59–111.

6. **Бандман О.Л.** Дискретное моделирование физико-химических процессов // Прикладная дискретная математика. – 2009. – № 3. – С. 33–49.

7. **Тоффоли Т., Марголус Н.** Машины клеточных автоматов: пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 280 с.

8. **Бобков С.П.** Моделирование основных процессов переноса с использованием клеточных автоматов // Изв. вузов. Химия и хим. Технология. – 2009. – Т. 52, № 3. – С. 109–114.

9. **Моделирование** теплопроводности с использованием клеточных автоматов / В.Е. Мизонов, В.А. Зайцев, В.Ю. Волынский, С.П. Бобков // Моделирование, расчет и оптимизация тепломассообменных процессов в текстильной промышленности: монография Гл. 4 / Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2010. – С. 180–200.

10. **Структуры** в нелинейных средах / С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов, А.А. Самарский // Компьютеры и нелинейные явления. Гл. 1. – М.: Наука, 1988. – С. 5–43.

References

1. Malinetsky, G.G., Potapov, A.B., Podlazov, A.V. *Nelineynaya dinamika: Podkhody, rezul'taty, nadezhdy* [Nonlinear dynamics: Approaches, results, hopes]. Moscow: Ozon, 2016. 280 p.

2. Misbakhov, R.Sh., Mizonov, V.E. Modelirovanie teploprovodnosti v sostavnoy oblasti s fazovymi perekhodami [Simulation of heat conduction in a composite domain with phase transformation]. *Vestnik IGEU*, 2015, no. 4, pp. 39–44.

3. Fedosov, S.V., Elin, N.N., Mizonov, V.E., Poroshin, N.R. Nelineynaya yacheechnaya model' vzaimosvyazannogo teplovlagoperenosa v ograzhdayushchey konstruktsii s vnutrennim istochnikom vlagi [Nonlinear Cellular Model of Interrelated Heat-Moisture Transfer in an Enclosing Structure with Internal Source of Moisture]. *Stroitel'nye materialy*, 2011, no. 8, pp. 22–24.

4. Mizonov, V., Yelin, N., Sakharov, A. Theoretical study of the thermal state of building envelop in the neighborhood of embedded item. *Applied Thermal Engineering*, 2015, no. 79, pp. 149–152.

5. Bandman, O.L. Kletochno-avtomatnye modeli prostranstvennoy dinamiki [Cellular Automata Models of Spatial Dynamics]. *Sbornik nauchnykh trudov «Sistemnaya informatika»* [Collection of scientific works «System Informatics»]. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN, 2006, issue 10, pp. 59–111.

6. Bandman, O.L. Diskretnoe modelirovanie fiziko-khimicheskikh protsessov [Discrete modeling of physicochemical processes]. *Prikladnaya diskretnaya matematika*, 2009, no. 3, pp. 33–49.

7. Toffoli, T., Margolus, N. *Mashiny kletochnykh avtomatov* [Cellular automation machines]. Moscow: Mir, 1991. 280 p.

8. Bobkov, S.P. Modelirovanie osnovnykh protsessov perenosa s ispol'zovaniem kletochnykh avtomatov [Simulation of basic transfer processes by using cellular automata]. *Izvestiya vuzov. Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya*, 2009, vol. 52, issue 3, pp. 109–114.

9. Mizonov, V.E., Zaitsev, V.A., Volynsky, V.Yu., Bobkov, S.P. Modelirovanie teploprovodnosti s ispol'zovaniem kletochnykh avtomatov [Modeling of thermal conductivity using cellular automata]. *Modelirovanie, raschet i optimizatsiya teplomassoobmennykh protsessov v tekstil'noy promyshlennosti* [Modelling, calculation and optimization of heat and mass transfer processes in textile industry]. Ivanovo, 2010, head 4, pp. 180–200.

10. Kurdyumov, S.P., Malinetsky, G.G., Potapov, A.B., Samarsky, A.A. Struktury v nelineynykh sredakh [Structures in nonlinear media]. *Komp'yutery i nelineynye yavleniya* [Computers and nonlinear phenomena]. Moscow: Nauka, 1988, head 1, pp. 5–43.

Бобков Сергей Петрович,
ФБГОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий,
e-mail: bsp@isuct.ru
Bobkov Sergei Petrovich,
Ivanovo State University of Chemistry and Technology,
Doctor of Engineering Sciences (Post-Doctoral Degree), Professor, Head of the Information Technologies Department,
e-mail: bsp@isuct.ru

Чернявская Анастасия Сергеевна,
ФБГОУВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
ассистент кафедры информационных технологий,
e-mail: mayananas@mail.ru
Chernyavskaya Anastasia Sergeyevna,
Ivanovo State University of Chemistry and Technology,
assistant of the Information Technologies Department,
e-mail: mayananas@mail.ru