

*Жуков Владимир Павлович,*

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой прикладной математики, телефон (4932) 26-97-45, e-mail: zhukov-home@yandex.ru

*Zhukov Vladimir Pavlovich,*

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences (Post-doctoral degree), Professor, Head of the Applied Mathematics Department, telephone (4932) 26-97-45, e-mail: zhukov-home@yandex.ru

*Ледуховский Григорий Васильевич,*

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, доцент, зав. кафедрой тепловых электрических станций, телефон (4932) 26-99-31, e-mail: lgv83@yandex.ru

*Ledukhovsky Grigory Vasilievich,*

Ivanovo State Power Engineering University, Candidate of Engineering Sciences (PhD), Associate Professor of the Heat Power Plants Department, telephone (4932) 26-99-31, e-mail: lgv83@yandex.ru

УДК 004.94:66.011

## ИМИТАЦИЯ ПОТОКОВ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

С.П. БОБКОВ, А.С. ЧЕРНЯВСКАЯ

ФГБОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,

г. Иваново, Российская Федерация

E-mail: bsp@isucl.ru

### Авторское резюме

**Состояние вопроса.** Подавляющее большинство теплоэнергетических процессов включает в себя перемещение значительных количеств газов и жидкостей. Поэтому важной и актуальной задачей следует считать разработку подходов для компьютерной имитации и визуализации потоков сплошной среды в технологических аппаратах и трубопроводах. В последнее время появилась целая группа новых подходов к математическому моделированию потоков сплошных сред, прежде всего использование для данных целей дискретных математических объектов. Дискретные подходы могут упрощать процедуры моделирования в тех случаях, когда традиционные методы приводят к сложным вычислениям, требующим больших затрат времени. В то же время при использовании дискретных моделей часто возникают вопросы, касающиеся корректности описания дискретными методами тех или иных режимов течения. Вторая проблема использования упомянутых моделей – это масштабный переход от модельных дискретных параметров к общепринятым макроскопическим характеристикам течений. Целью данной работы является определение режимов течения сплошной среды, для которых применение конкретных моделей можно считать корректным.

**Материалы и методы.** Рассмотрены дискретные динамические модели в виде решеточных газов. При этом сплошная среда представляется совокупностью частиц, движущихся только в разрешенных направлениях. Несмотря на определенные ограничения, имеется много доказательств того, что решеточные газы достаточно успешно описывают целый ряд гидродинамических явлений, а полученные результаты не противоречат общепринятым взглядам на физическую природу процессов движения сплошных сред.

**Результаты.** Описываются подходы, позволяющие оценить параметры течений, используя общепринятые макроскопические показатели. Исследованы возможные области применения моделей решеточных газов, использующих движение виртуальных частиц на пространственной решетке (модели НРР и FHP), а также модели, использующей дискретный аналог уравнения Больцмана (модель LBM) для имитации и визуализации потоков сплошных сред.

**Выводы.** Полученные данные хорошо согласуются с общепринятыми результатами и не противоречат положениям классической гидродинамики. Модели, рассматривающие столкновения частиц (НРР и FHP), применимы для описания течений газов в ламинарных режимах. Для моделирования и визуализации течений реальных жидкостей более корректной следует считать модель LBM.

**Ключевые слова:** дискретный подход, решеточный газ, НРР, FHP и LBM модели

## SIMULATION OF CONTINUOUS FLOWS WITH DISCRETE MODELS

S.P. BOBKOV, A.S. CHERNYAVSKAYA

Ivanovo State University of Chemistry and Technology, Ivanovo, Russian Federation

E-mail: bsp@isuct.ru

### Abstract

**Background.** The vast majority of heat and power processes include the motion of significant amounts of gases and liquids. This makes it important and quite urgent to develop approaches for computer simulation and visualization of continuum flows in technological devices and pipelines. A whole set of new approaches to mathematical modelling of continuum flows has been recently developed. The most common one is using discrete mathematical models for these purposes. Discrete approaches can simplify modeling procedures in cases where traditional methods require complex time-consuming calculations. At the same time, correctness of description of various flow regimes by the discrete methods is often questioned. The second problem of the mentioned models is a large-scale transition from model discrete parameters to generally accepted macroscopic characteristics of flows. The purpose of this work is to determine continuous flow regimes that can be correctly described by certain models.

**Materials and methods.** The paper considers discrete dynamic models in the form of lattice gases. A continuum in this case is represented by a set of particles moving only in allowed directions. Despite certain limitations, there is solid evidence that lattice gases quite successfully describe a whole range of hydrodynamic phenomena, and the obtained results do not contradict the generally accepted views on the physical nature of continuum motion processes.

**Results.** The paper describes approaches that allow estimating flow parameters using generally accepted macroscopic indicators. It also studies possible application areas of lattice gas models using the motion of virtual particles on a spatial lattice (HPP and FHP models) and the model based on the discrete analogue of the Boltzmann equation (LBM model) to simulate and visualize continuum flows.

**Conclusions.** The obtained data are in good agreement with the generally accepted results and do not contradict the provisions of classical hydrodynamics. The paper shows that the models considering particle collisions (HPP and FHP) are applicable to describing gas flows in laminar regimes. The LBM model should be considered to be more correct for simulation and visualization of real fluid flows.

**Key words:** discrete approach, lattice gas, HPP, FHP and LBM models

**DOI:** 10.17588/2072-2672.2019.3.068-075

**Введение.** В отличие от классических уравнений движения сплошной среды, в решеточных газах рассматривается движение виртуальных частиц в некотором дискретном пространстве и дискретном времени [1, 2, 3]. Подавляющее большинство известных моделей решеточных газов строятся по следующим основным принципам [4, 5]. Исследуемое пространство разбивается на дискретные элементы некоторой пространственной решеткой. Сплошная среда представляется заполненной гипотетическими идеальными частицами, которые могут двигаться только в направлении узлов указанной решетки. Вид пространственной решетки, а также правила перемещения и взаимодействия частиц на ней определяются конкретной принятой моделью.

Существует несколько разновидностей моделей решеточных газов.

Большая группа моделей предполагает рассмотрение движения отдельных частиц, заполняющих модельное про-

странство. Достаточно хорошо известны модели HPP и FHP, названные так по первым буквам фамилий их авторов [6, 7]. При использовании указанных моделей приняты следующие допущения и ограничения:

1. В каждый момент дискретного модельного времени частицы могут находиться только в узлах пространственной решетки.

2. Все частицы имеют одинаковую массу, равную единице.

3. Вектор скорости каждой частицы может быть направлен только в сторону одного из соседних узлов решетки.

4. Модуль вектора скорости частицы либо равен единице, либо равен нулю (если модель предполагает наличие частиц покоя).

5. В один и тот же момент времени в каждом узле решетки не могут находиться две и более частиц с одинаковыми векторами скорости.

Основной принципиальной разницей между НРР и FНР моделями является тот факт, что первая из них рассматривает движение виртуальных частиц по ортогональной решетке, а вторая – по гексагональной.

**Методика моделирования.** Моделирование поведения газа на каждом шаге по времени происходит в два этапа: перемещение частиц в соседние узлы (этап сдвига); соударение частиц в узлах (этап столкновения). Правила поведения частиц в узлах при столкновении принимаются такими, чтобы сохранялось количество частиц и их полный импульс. Для моделирования процессов в реальных объектах в рассмотрение вводятся узлы-стенки, которые задают граничные условия. В необходимых случаях в модели можно рассматривать и узлы-источники (стоки) частиц. В них с некоторой вероятностью могут появляться (исчезать) частицы с определенными направлениями вектора скорости. Такой прием позволяет моделировать потоки. Изменение давления можно моделировать, меняя среднюю концентрацию частиц в исследуемом пространстве.

Изотропия дискретного пространства при наличии фиксированных направлений скорости частиц обеспечивается необходимыми соотношениями симметрии между векторами скоростей частиц. Теория дискретной газовой динамики определяет условия изотропии с помощью тензоров, которые отображают (линейно преобразуют) пространственную решетку соответствующей модели в декартову решетку [8]. При этом структура дискретного пространства считается изотропной, если выполняются условия симметрии упомянутых тензоров до четвертого ранга включительно. Для FНР модели условия выполняются полностью, для НРР модели симметрия выполняется до тензоров третьего ранга, однако модель остается вполне пригодной для использования [9].

Во всех случаях процесс моделирования поведения газа представляет собой получение последовательности массивов скоростей частиц в узлах соответствующей решетки в конкретный момент дискретного времени.

Таким образом, моделируемая среда представляется клеточным полем (массивом)  $\Phi(t)$ , в котором состояние каждой клетки (узла) описано булевым вектором длиной  $b$  – по числу возможных направле-

ний векторов скорости. Каждый разряд вектора определяет наличие ( $s_i = 1$ ) или отсутствие ( $s_i = 0$ ) в клетке частицы, которая движется со скоростью  $c_i$  в сторону  $i$ -го соседа.

Эволюцию клеточного поля пространственной решетки в дискретном времени  $t = \{t_0, t_1, \dots\}$  можно представить следующим образом:

$$\Phi(t_0), \Phi(t_1), \Phi(t_2), \dots, \Phi(t_{\text{end}}). \quad (1)$$

При этом клеточное поле определяется векторами состояний клеток  $S_j$  и их координатами  $r_j$ :

$$\Phi = \Phi(S_j, r_j, t_k). \quad (2)$$

Режим работы клеточного автомата – синхронный. На этапе сдвига все частицы перемещаются в соседние узлы в направлении соответствующих векторов скоростей. На этапе взаимодействия происходит изменение состояния элементарного автомата в соответствии с принятыми в конкретной модели правилами столкновения. При этом происходит замена одного состояния клетки на другое в соответствии с функцией переходов:

$$S = (s_1, \dots, s_b) \rightarrow S' = (s'_1, \dots, s'_b). \quad (3)$$

Функция переходов  $\varphi(X, S)$  должна обеспечивать выполнение законов сохранения.

**Результаты и обсуждение.** Можно привести некоторые результаты моделирования течения сплошных сред с применением рассмотренных выше моделей. В частности, на рис. 1 представлены векторы скоростей потока сплошной среды в отдельных узлах решетки в установившемся режиме. Результаты получены с использованием НРР модели.

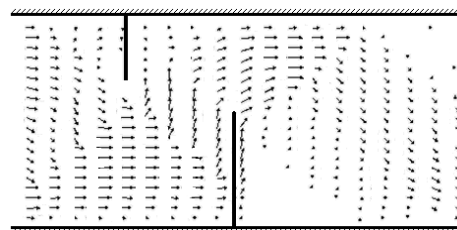


Рис. 1. Поток НРР-газа между стенками при наличии двух препятствий

Использовалась ортогональная решетка размера 800 на 200 узлов. На левой границе рассматриваемой области располагались узлы-источники, генерирующие появление частиц, вектор скорости которых направлен внутрь области. На правой

границе были расположены узлы-стоки, которые поглощали попадающие в них частицы. Плотность среды, (а в конечном итоге и давление) моделировалась величиной исходной относительной концентрации виртуальных частиц, которая для приведенного случая была равна 0,1.

Анализ полученных данных показывает, что в целом картина течения достаточно адекватна реальным представлениям. В частности, можно заметить уменьшение скорости потока у стенок, образование застойных зон и областей повышенной скорости потока при обтекании препятствий.

Интересные результаты были получены с помощью FHP модели при исследовании потока в криволинейном участке трубы (рис. 2). Использовалась гексагональная решетка размера 500 на 300 узлов.

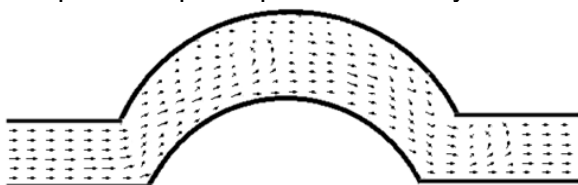


Рис. 2. Поток FHP-газа в криволинейном участке трубы

Анализ полученных данных показывает, что на обоих рисунках картина течения достаточно адекватна реальным представлениям. В частности, можно заметить уменьшение скоростей у стенок, образование застойных зон, завихрений и областей повышенной скорости потока.

**Вероятностная модель решетчатого газа.** Продолжением и развитием дискретного подхода к моделированию течений сплошной среды стала модель, в которой используются совершенно иные представления о пространственной решетке и частицах. Модель LBM (Lattice Boltzmann Method) основана на использовании дискретного аналога уравнения Больцмана. В ней исследуется не поведение каждой частицы в отдельности, а функция распределения плотности вероятности частиц по координатам и скоростям [10, 11].

Предыдущие модели решетчатого газа (HPP, FHP) содержат много упрощений. Один из наиболее значимых недостатков состоит в том, что частицы, движущиеся по схеме столкновений, имеют большую длину свободного пробега. Дан-

ные модели хорошо подходят для моделирования газа. Но даже когда длина свободного пробега сводится к одной клетке, это не всегда дает возможность успешно моделировать жидкость [12]. В LBM понятие конкретной частицы заменили плотностью распределения частиц, а столкновения описываются оператором столкновений. Поскольку в модели LBM рассматривается не непосредственное движение частиц, а их распределение, то симметрия дискретного пространства достигается путем введения определенных коэффициентов в плотность распределения.

Так же, как и в моделях HPP и FHP, в модели LBM используются узлы-стенки и узлы-источники (стоки) частиц.

Итерацию клеточного автомата, функционирующего по методу LBM, можно записать следующим образом:

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i, t + 1) - f_i(\mathbf{r}, t) = \Omega_i(f), \quad (4)$$

где  $f_i$  – плотность распределения частиц в направлении вектора  $\mathbf{c}_i$ ;  $\mathbf{r}$  – координата ячейки;  $t$  – время;  $\Omega_i$  – оператор столкновений.

Выражение (4) является дискретным аналогом уравнения Больцмана, что доказано [13, 14].

Оператор столкновений вычисляется следующим образом:

$$\Omega_i(f) = -\frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{r}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{r}, t)], \quad (5)$$

где  $\tau$  – время релаксации;  $f_i^{eq}$  – функция равновесного распределения, зависящая от локальной скорости и плотности среды.

Выражение для равновесной функции следующее:

$$f_i^{eq} = w_i \rho [1 + 3\mathbf{c}_i \mathbf{u} + \frac{9}{2} (\mathbf{c}_i \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u}^2], \quad (6)$$

где  $w_i$  – специальные множители;  $\rho$  и  $\mathbf{u}$  – локальная плотность и скорость потока для ячейки соответственно.

Специальные множители выбирают таким образом, чтобы получаемые моменты импульса соответствовали моментам импульса по распределению Максвелла-Больцмана [10, 15].

Далее для каждой ячейки можно вычислить локальную плотность потока и его локальную скорость:

$$\begin{aligned} \rho &= \sum f_i(\mathbf{r}, t); \\ \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho} \sum \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Результаты моделирования потока, полученные с использованием метода

LBM, показаны на рис. 3. Использовалась решетка размера 1000x500 ячеек. Рассмотрены течение в гладкой трубе (рис. 3,а) и поток через диафрагму (рис. 3,б). Поскольку данный метод использует плотность распределения, то величина скорости на рис. 3 закодирована оттенками черного цвета (увеличение скорости – увеличение густоты цвета).

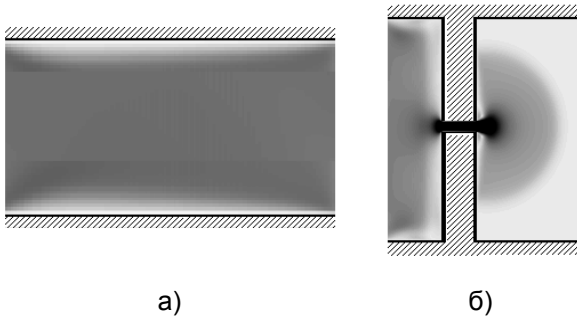


Рис. 3. Модели потоков сплошной среды, полученные методом LBM

Данная картина потока весьма реалистична. Можно увидеть торможение среды у неподвижных поверхностей, наличие застойных зон. В целом полученные результаты позволяют рекомендовать использование дискретных моделей для исследования течений жидкости или газа. Однако для более корректной проверки результатов моделирования желательно указать привычные (макроскопические) параметры рассматриваемых потоков.

Все более широкое использование решеточных моделей приводит к возникновению проблемы установления полноты соответствия (адекватности) дискретных и классических континуальных описаний потоков сплошной среды. Рассмотрим сложности, которые при этом возникают.

**Переход к макроскопическим параметрам.** Все модели решеточных газов рассматривают процессы, протекающие с гипотетическими частицами в идеализированном мире, где время и пространство дискретны, а основные параметры могут принимать значения только из некоторого конечного разрешенного множества. В то же время традиционно течения жидкостей и газов изучались в реальных физических условиях непрерывного времени и пространства. Следовательно, необходимо найти возможность перехода от виртуальных переменных решеточного мира к действительным физическим величинам, которые имеют смысл в макроскопических объемах реальных веществ. Следует учи-

тывать, что в решеточном дискретном пространстве рассматриваются параметры процесса, которые являются безразмерными.

Для перехода от безразмерных модельных значений параметров к размерным физическим значениям можно использовать следующие зависимости, в которых индекс «mod» указывает на принадлежность параметра к модельному решеточному пространству. Ниже приведены выражения для расстояния, времени, скорости и кинематической вязкости:

$$L = L_{\text{mod}}/m; \quad t = t_{\text{mod}}/s; \\ u = u_{\text{mod}}s/m; \quad v = v_{\text{mod}}s/m^2, \quad (8)$$

где  $m$  – число ячеек, содержащееся в одном метре;  $s$  – число модельных шагов по времени в секунду.

При использовании приведенных выше зависимостей наибольшую сложность вызывает определение модельного значения кинематической вязкости. Существует несколько подходов к определению данного параметра. В литературе можно встретить выражения для расчета модельной вязкости, полученные с использованием преобразований Галилея при переходе от модельного пространства к реальному [16, 17].

Для установления аналогий между реальными и модельными процессами течения сплошных сред можно использовать элементы теории подобия, в частности критерий гидродинамического подобия Рейнольдса ( $Re$ ). Удобство его использования обусловлено тем, что поведение жидкостей и газов зависит не столько от их реальных свойств (плотности, вязкости, скорости и пр.), сколько от соотношения указанных величин. Справедливо предположить, что модельные безразмерные потоки на решетке будут подобны реальным потокам в случае их геометрического подобия и равенства критериев Рейнольдса.

Для гидравлически подобных систем можно записать

$$Re = Re_{\text{mod}}. \quad (9)$$

Выражения (8), (9) позволяют осуществлять переход от модельных параметров процесса к реальным (физическим) и обратно.

Рассмотрим реальные условия, соответствующие потоку НРР-газа, изображенному на рис. 1. Вычислительные эксперименты позволили установить, что средняя скорость среды в ядре потока со-

ставляет 0,3. Примем, что физической средой является воздух при нормальных условиях, который движется между параллельными стенками, расположенными на расстоянии 10 мм друг от друга. Согласно расчетам, для указанного случая реальная средняя скорость среды равна 0,013 м/с, число Рейнольдса в данных условиях 9,4.

Определим реальные условия для примера, изображенного на рис. 2. Здесь в качестве среды принята вода, а расстояние между стенками на входе в объект равно 5 мм. При переходе к реальным условиям получим среднюю скорость потока 0,008 м/с и число Рейнольдса 40.

Рассчитанные физические условия для потока, показанного на рис. 3,а, следующие. Моделировалось течение воды при расстоянии между стенками 50 мм. Средняя скорость потока составила 0,15 м/с, число Рейнольдса 250.

Нами был также рассмотрен другой путь перехода от модельных параметров к реальным [18]. Он состоит в следующем.

Поскольку НРР и FНР модели рассматривают движение частиц между узлами решетки и их столкновения, можно при имитации процесса подсчитать модельную длину свободного пробега частиц и число их столкновений в течение шага дискретного времени. Далее по заданному характерному линейному размеру с помощью уравнения (8) нетрудно определить реальную (физическую) длину свободного пробега [19]. Найденная таким образом физическая величина позволяет по справочным данным найти реальное давление конкретного газа и его кинематическую вязкость.

**Выводы.** Согласно результатам экспериментов на модели НРР, проведенных при изменении плотности в диапазоне 0,02 до 0,16, реальное давление газа в опытах составляло 8–80 Па, что соответствует области среднего вакуума. При этом во всех сериях опытов значение числа Рейнольдса лежало в диапазоне от 4 до 45, что для сплошной среды должно указывать на ламинарный режим течения.

Проведенный анализ поведения моделей решеточных газов показал следующее. Модели, рассматривающие столкновения частиц (НРР и FНР), применимы для описания течений газов при относительно невысоких значениях числа Рейнольдса. При этом модель НРР целесообразно использовать для моделирования поведения

газов при пониженном давлении. Для исследования течений реальных жидкостей более приемлемой является модель, использующая метод LBM.

### Список литературы

1. **Wolfram S.** A new kind of science. Wolfram media inc. – Champaign, IL, 2002. – 1197 p. doi: 10.1017/s1079898600004200.
2. **Toffoli T., Margolus N.** Cellular Automata Machines. – Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1987. – 280 p.
3. **Бандман О.Л.** Клеточно-автоматные модели пространственной динамики // Системная информатика. – 2006. – Вып. 10. – С. 59–111.
4. **Wolfram S.** Cellular automaton fluids 1: Basic theory // J. Stat. Phys. – 1986. – V. 45. – P. 471–526. doi: 10.1007/bf01021083.
5. **Simulatoin** of free boundaries in flow system by lattice-gas models / P. Clavin, P. Lallemand, Y. Pomeau, G. Searby // Journal of Fluid Mechanics. – 1988. – V. 188. – P. 437–464. doi: 10.1017/s0022112088000795.
6. **Hardy J., de Pazzis O., Pomeau Y.** Molecular dynamics of a classical lattice gas: transport properties and time correlation functions // Physical Review. – 1976. – V. 13, no. 5. – P. 1949–1961. doi: 10.1103/physreva.13.1949.
7. **Frisch U., Hasslacher B., Pomeau Y.** Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation // Physical Review Letters. – 1986. – V. 56, no. 14. – P. 1505–1508. doi: 10.1103/physrevlett.56.1505.
8. **Бандман О.Л.** Дискретное моделирование физико-химических процессов // Прикладная дискретная математика. – 2009. – № 3. – С. 33–49.
9. **Wolfram S.** Statistical mechanics of cellular automata // Reviews of Modern Physics. – July/September 1983. – V. 5. – P. 601–610. doi: 10.1103/revmod-phys.55.601.
10. **Wolf-Gladrow D.** Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models: An Introduction / Editors: A. Dold, Heidelberg, F. Takens, Groningen, B. Teissie. – Paris, 2005. – 302 p. doi: 10.1007/b72010.
11. **Guo Z., Zhao T.S.** Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media // Physical Review E. – 2002. – V. 66. – P. 036304-1–036304-9. doi:10.1103/physreve.66.036304
12. **Cellular** automata and lattice Boltzmann techniques. / B. Chopard, A. Dupuis, A. Masselot, P. Luthi // Advances in Complex Systems. – 2002. – V. 5, no. 2. – P. 1–144. doi: 10.1142/s0219525902000602.
13. **Chen H., Shan X.** Simulation of nonideal gases and liquid-gas phase transitions by the lattice Boltzmann equation // Phys. Rev. E. – 1994. – V. 49. – P. 2941–2948. doi: 10.1103/physreve.49.2941.



14. He X., Luo L. Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation // *Phys. Rev. E*. – 1997. – V. 56. – P. 6811–6817. doi: 10.1103/physreve.56.6811.

15. **The lattice Boltzmann equation method: Theoretical interpretation, numerics and implications** / R.R. Nourgaliev, T.N. Dinh, T.G. Theofanous, D. Joesph // *Int. J. Multipase Flow*. – 2003. – V. 29. – P. 117–169. doi: 10.1016/s03019322(02)-001088.

16. **Vogeler A., Wolf-Gladrow D.** Pair interaction lattice gas simulations: Flow past obstacles in two and three dimensions // *Journal of Statistical Physics*. – 1993. – V. 71. – P. 163–190. doi: 10.1007/bf01048093.

17. **Bandman O.L.** Fine-Grained Parallelism in Computational Mathematics // *Programming and Computer Software*. – 2001. – V. 27. – P. 170–182. doi: 10.1023/a:10-10962519223.

18. **Бобков С.П., Соколов В.Л.** Анализ возможностей применения решеточных моделей для исследования процессов в газах при пониженном давлении // *Вестник ИГЭУ*. – 2015. – Вып. 4. – С. 58–63.

19. **Абрамович Г.Н.** Прикладная газовая динамика. Ч. 2. – М.: Наука, 1991. – 304 с.

## References

1. Wolfram, S. A new kind of science. Wolfram media inc, Champaign, IL, 2002. 1197 p. doi: 10.1017/s1079898600004200

2. Toffoli, T., Margolus, N. Cellular Automata Machines. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1987. 280 p.

3. Bandman, O.L. Kletochno-avtomatnye modeli prostranstvennoy dinamiki [Three-dimensional dynamic models of cellular automata]. *Sistemnaya informatika*, 2006, issue 10, pp. 59–111. (in Russian).

4. Wolfram, S. Cellular automaton fluids 1: Basic theory. *J. Stat. Phys*, 1986, vol. 45, pp. 471–526. doi: 10.1007/bf01021083

5. Clavin, P., Lallemand, P., Pomeau, Y. and Searby, G. Simulatoin of free boundaries in flow system by lattice-gas models. *Journal of Fluid Mechanics*, 1988, vol. 188, pp. 437–464. doi: 10.1017/s0022112088000795

6. Hardy, J., de Pazzis, O. Pomeau, Y. Molecular dynamics of a classical lattice gas: transport properties and time correlation functions. *Physical Review*, 1976, vol. 13, no. 5, pp. 1949–1961. doi: 10.1103/physreva.13.1949

7. Frisch, U., Hasslacher, B., Pomeau, Y. Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation. *Physical Review Letters*, 1986, vol. 56, no. 14, pp. 1505–1508. doi: 10.1103/physrevlett.56.1505

8. Bandman, O.L. Diskretnoe modelirovanie fiziko-khimicheskikh protsessov [Discrete modelling of physico-chemical processes]. *Prikladnaya diskretnaya matematika*, 2009, no. 3, pp. 33–49. (in Russian).

9. Wolfram, S. Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of Modern Physics*, July/September 1983, vol. 5, pp. 601–610. doi: 10.1103/revmod-phys.55.601

10. Wolf-Gladrow, D. Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models: An Introduction. Paris, 2005. 302 p. doi: 10.1007/b72010

11. Guo, Z., Zhao, T.S. Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media. *Physical Review E*, 2002, vol. 66, pp. 036304-1–036304-9. doi:10.1103/physreve.66.036304

12. Chopard, B., Dupuis, A., Masselot, A., Luthi, P. Cellular automata and lattice Boltzmann techniques. *Advances in Complex Systems*, 2002, vol. 5, no. 2, pp. 1–144. doi: 10.1142/s0219525902000602

13. Chen, H., Shan, X. Simulation of nonideal gases and liquid-gas phase transitions by the lattice Boltzmann equation. *Phys. Rev. E*, 1994, vol. 49, pp. 2941–2948. doi: 10.1103/physreve.49.2941

14. He, X., Luo, L. Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 56, pp. 6811–6817. doi: 10.1103/physreve.56.6811

15. Nourgaliev, R.R., Dinh, T.N., Theofanous, T.G., Joesph, D. The lattice Boltzmann equation method: Theoretical interpretation, numerics and implications. *Int. J. Multipase Flow*, 2003, vol. 29, pp. 117–169. doi: 10.1016/s03019322(02)-001088

16. Vogeler, A., Wolf-Gladrow, D. Pair interaction lattice gas simulations: Flow past obstacles in two and three dimensions. *Journal of Statistical Physics*, 1993, vol. 71, pp. 163–190. doi: 10.1007/bf01048093

17. Bandman, O.L. Fine-Grained Parallelism in Computational Mathematics. *Programming and Computer Software*, 2001, vol. 27, pp. 170–182. doi: 10.1023/a:10-10962519223

18. Bobkov, S.P., Sokolov, V.L. Analiz vozmozhnostey primeneniya reshetochnykh modely dlya issledovaniya protsessov v gazakh pri ponizhenom davlenii [Analysis of possible applications of lattice models for studying processes in gases at reduced pressure]. *Vestnik IGEU*, 2015, issue 4, pp. 58–63 (in Russian).

19. Abramovich, G.N. Prikladnaya gazovaya dinamika. Chast' 2 [Applied dynamics of gases. Part 2]. Moscow: Nauka, 1991. 304 s. (in Russian).

*Бобков Сергей Петрович,*  
ФБГОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет», доктор технических наук,  
профессор, зав. кафедрой информационных технологий, e-mail: bsp@isuct.ru

*Bobkov Sergei Petrovich,*  
Ivanovo State University of Chemistry and Technology, Doctor of Engineering Sciences (Post-Doctoral Degree), Profes-  
sor, Head of the Information Technologies Department, e-mail: bsp@isuct.ru

*Чернявская Анастасия Сергеевна,*  
ФБГОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет», ассистент кафедры информа-  
ционных технологий, e-mail: mayananas@mail.ru

*Chernyavskaya Anastasia Sergeyevna,*  
Ivanovo State University of Chemistry and Technology, assistant of the Information Technologies Department,  
e-mail: mayananas@mail.ru