УДК 621.039.516

Владимир Константинович Семенов
ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор кафедры атомных электрических станций, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-99-15, e-mail: semenov_vk@mail.ru

Наталья Борисовна Иванова
ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», кандидат физико-математических наук, доцент кафедры атомных электрических станций, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-99-15, e-mail: rgr_ivanova@rambler.ru

Ирина Игоревна Черняева
ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», студент 4 курса кафедры атомных электрических станций, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-99-15,
e-mail: chernyaeva0880@yandex.ru

Применение принципа Понтрягина для оптимального отключения энергетического ядерного реактора

Авторское резюме

Состояние вопроса. Теория оптимального управления базируется на двух подходах – методе динамического программирования (уравнение Беллмана) и принципе максимума Понтрягина. Последний нашел применение в физике ядерных реакторов при оптимизации различных переходных процессов. Математическое обоснование этой теории базируется на элементах выпуклого анализа, который не используется физиками и инженерами, так что физическая сторона дела мало описана в литературе.
Материалы и методы. В качестве объекта исследования с использованием аналитического и численного методов рассматривается энергетический ядерный реактор типа ВВЭР, для которого решается задача минимизации времени его отключения в обход йодной ямы с возможностью включения реактора на мощность в любой произвольный момент после его остановки.
Результаты. Рассматривается пример применения принципа максимума для оптимального управления процессом отключения ядерного реактора в обход йодной ямы. На физическом уровне строгости сформулирована математическая модель принципа Понтрягина. Обоснован и рассчитан процесс оптимального управления отключением реактора при большом и малом запасе реактивности.
Выводы. Принцип Понтрягина не содержит алгоритма нахождения оптимизационного процесса, составляющие этапы процесса должны выбираться на основе физических соображений, но эти этапы должны удовлетворять указанному принципу. Результаты исследования позволили на основе принципа Понтрягина составить поэтапный план действий при отключении реактора типа ВВЭР с любым значением запаса реактивности с последующим его включением в любой момент времени после окончания переходного процесса, что позволяет избежать простоя. Предложенный план может быть использован как при математическом моделировании переходных процессов в реакторе, так и в системах управления реактором для повышения его управляемости и, как следствие, повышения безопасности.

Ключевые слова: энергетический ядерный реактор, оптимальное управление ядерным реактором, математическая модель, принцип максимума Понтрягина, йодная яма, отравление реактора ксеноном

Vladimir Konstantinovich Semenov
Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences (Post-doctoral degree), Professor of Nuclear Power Plants Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-99-15, e-mail: semenov_vk@mail.ru

Natalia Borisovna Ivanova
Ivanovo State Power Engineering University, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, (PhD), Associate Professor of Nuclear Power Plants Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-99-15, e-mail: rgr_ivanova@rambler.ru

Irina Igorevna Chernyaeva
Ivanovo State Power Engineering University, Student of Nuclear Power Plants Department, Russia, Ivanovo,
telephone (4932) 26-99-15, e-mail: chernyaeva0880@yandex.ru

Вестник ИГЭУ, 2024, вып. 3, с. 71–77.

Application of Pontryagin principle for optimal shutdown of a nuclear power reactor

Abstract

Background. The theory of optimal control is based on two approaches, the dynamic programming method (Bellman equation) and Pontryagin maximum principle. Pontryagin maximum principle is applied in the physics of nuclear reactors when optimizing various transient processes. The mathematical justification of this theory is based on the elements of convex analysis, which is not used by physicists and engineers, so the physical issues are less studied in scientific literature.
Materials and methods. The subject of the study is a nuclear power reactor of the WWER type. The problem of minimizing its shutdown time, bypassing the iodine pit is solved and it is possible to start up the reactor at any moment after its shutdown. Analytical and numerical methods are used.
Results. The paper considers an example of applying the maximum principle for optimal control of the process of shutting down a nuclear reactor bypassing the iodine pit. A physical mathematical model of the Pontryagin principle is formulated. The process of optimal control of reactor shutdown for large and small reactivity margins is justified and calculated.
Conclusions. Pontryagin principle does not contain an algorithm to find an optimization process; the stages of the process must be selected based on physical considerations, but these stages must satisfy the specified principle. Based on the Pontryagin principle, the results of the study make it possible to draw up a step-by-step action plan when shutting down a WWER-type reactor with any value of the reactivity margin and its switching is possible at any time after the transition process, which avoids downtime. The proposed plan can be used both in mathematical modeling of transient processes in a reactor and in reactor control systems to improve its controllability and, consequently, to improve safety.

Key words: nuclear power reactor, optimal control of a nuclear reactor, mathematical model, Pontryagin maximum principle, iodine pit, xenon poisoning of the reactor, step-by-step action plan

DOI: 10.17588/2072-2672.2024.3.071-077

Введение. Применение теории оптимального управления на основе принципа Понтрягина в ядерной физике, и в частности при анализе ксеноновых переходных процессов в ядерном реакторе, начато в работах А.П. Рудика и его соавторов [1–3]. На основе разработанного ими подхода в работе других авторов приведены результаты численного исследования оптимального режима снижения мощности реактора [4], однако алгоритм расчета ими не описан. Если положение двух начальных точек смены управления реактора очевидно, то поиск места нахождения на фазовых диаграммах двух других точек смены управления реактора на конечной стадии переходного процесса требует специального обоснования. Ниже предложен простой численный метод нахождения этих точек.

Методы исследования. Теория оптимального управления, разработанная советским математиком Л.С. Понтрягиным и его школой, нашла широкое применение при управлении ракетами, решении различных технических задач автоматического регулирования, а также в экономике, ядерной физике и других областях науки и техники [5–14]. В частности, она применяется при решении задач оптимизации различных режимов ядерных ректоров [1–3]. Обоснование этой теории базируется на элементах выпуклого анализа, который не используется физиками и инженерами, поэтому этот принцип необходимо сформулировать на физическом уровне строгости [15], т. е. на языке, понятном физикам и инженерам.

Суть принципа оптимального управления заключается в решении вариационной задачи, которая в одномерном случае имеет следующий вид:

$$J(x,u)=\int_0^T f_0(x(t),u(t))dt=\min, \qquad (1)$$

где $J(x,u)$ – минимизируемый функционал; $f_0(x(t), u(t))$ – целевая функция; $x(t)$ – зависимость минимизируемого процесса от времени; $u(t)$ – управляющий процессом параметр.

Процесс $x(t)$ подчиняется закону

$$\frac{dx}{dt}=f_1(x,u), \qquad (2)$$

а на управление $u(t)$ наложено ограничение $u_{\min}\le u(t)\le u_{\max}$.

Наличие ограничений на управляющий параметр говорит о несостоятельности классического вариационного исчисления для решения данной задачи и требует поиска нового подхода для ее решения. Рассмотрим этот подход ниже.

Определим вариацию минимизируемого функционала

$$\delta J = \int_0^T \left(\frac{\partial f_0}{\partial u} \delta u + \frac{\partial f_0}{\partial x} \delta x \right) dt = 0 . \qquad (3)$$

Вариации δx и δu связаны между собой. Учтем эту связь, используя уравнение (2):

$$\frac{d\delta x}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x . \qquad (4)$$

Выберем вспомогательную функцию $\Psi_1(t)$ так, чтобы она удовлетворяла следующему уравнению:

$$\frac{d\psi_1}{dt} + \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_0}{\partial x} . \qquad (5)$$

Умножим уравнение (4) на $\Psi_1(t)$ и сложим его с уравнением (5), умноженным на δx. После элементарных преобразований получим

$$\frac{d}{dt}(\psi_1 \delta x) - \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial u} \delta u = \frac{\partial f_0}{\partial x} \delta x . \qquad (6)$$

Подставляя полученное уравнение в соотношение (3), получим

$$\delta J = -\int_0^T \left(-\frac{\partial f_0}{\partial u} + \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) \delta u dt + \psi_1 \delta x \Big|_0^T = 0 . \qquad (7)$$

Знак минус перед интегралом говорит о том, что, в отличие от выражения (1), определяется не минимум, а максимум функционала.

Введем в рассмотрение функцию $H(x(t),u(t)) = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1$, где $\Psi_0 = -1$. Очевидно, что мы можем записать следующие соотношения:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_1}, \quad \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad (8)$$

т.е. мы пришли к известным в механике уравнениям Гамильтона для функции $x(t)$ и сопряженной ей функции $\Psi_1(t)$. Теперь вариацию δJ можно будет записать следующим образом:

$$\delta J = -\int_0^T \frac{\partial H}{\partial u} \delta u dt + \psi_1 \delta x \Big|_0^T = 0 . \qquad (9)$$

Следует подчеркнуть, что условие (9) является условием максимума функции Гамильтона H в требуемом диапазоне управляющего параметра, при этом управляющий параметр является кусочно-непрерывной функцией времени (в точках переключения функция имеет разрыв), а гамильтониан – непрерывной. Если искомый максимум (экстремум) гамильтониана лежит внутри указанного диапазона управляющего параметра, то $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$. Если максимум гамильтониана находится за пределами указанного диапазона, то $\delta u = 0$. В любом случае интеграл в условии (9) равен нулю.

В задаче должны быть заданы краевые условия при $t = 0$ и $t = T$. Эти условия могут касаться либо закона процесса $x(t)$, либо сопряженной функции $\Psi_1(t)$. Если максимум функционала найден и $\delta J = 0$, то, учитывая, что интеграл в условии (9) тоже равен нулю, необходимо потребовать, чтобы $\Psi_1(0) = 0$ и $\Psi_1(T) = 0$ для любых значений δx. Кроме того, краевые условия для функций $x(t)$ и $\Psi_1(t)$ могут быть заданы в комбинации. В частности, во многих задачах вариационного исчисления известно условие для $x(0)$, а условие для $x(T)$ неизвестно, вместо него задается условие $\Psi_1(T) = 0$ (так называемая задача Больца).

Обобщим вышеизложенное на задачу с двумя равноправными переменными $x_1(t)$ и $x_2(t)$. В этом случае оптимизируемый процесс подчиняется двум уравнениям:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, u), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, u), \qquad (10)$$

при этом гамильтониан и уравнения (7)–(9) имеют следующий вид:

$$H = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 ; \qquad (11)$$

$$\delta J = -\int_0^T \frac{\partial H}{\partial u} \delta u dt + \left(\psi_1 \delta x + \psi_2 \delta x \right) \Big|_0^T = 0 ; \qquad (12)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_1}; \quad \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1}; \qquad (13)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_2}; \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2}. \qquad (14)$$

Будем иметь в виду задачу Больца, т.е. при $t = 0$ заданы $x_1(0)$ и $x_2(0)$, а на втором краю выполняется условие

$$(\psi_1 \delta x_1 + \psi_2 \delta x_2)\Big|_T = 0, \qquad (15)$$

называемое в вариационном исчислении условием трансверсальности. Сформулированных уравнений (10)–(15) достаточно для решения изложенной ниже задачи об оптимальном отключении ядерного реактора.

Результаты исследования. Покажем, как на основе применения принципа Понтрягина составить поэтапный план действий при отключении энергетического реактора типа ВВЭР за минимальное время с последующим его включением в любой момент времени после окончания переходного процесса.

Работа реактора осуществляется за счет цепной реакции в ядерном топливе под действием нейтронов, рождающихся в ходе той же реакции. Процесс размножения нейтронов характеризуется коэффициентом размножения, равным отношению числа нейтронов в данном поколении к их числу в предшествующем поколении. Для удобства описания вводится понятие реактивности реактора ρ, равное отношению приращения числа нейтронов за время жизни поколения к числу нейтронов в данном поколении. В процессе работы реактора выгорает топливо, т.е. снижается запас реактивности, образуются шлаки, делящиеся нуклиды (плутоний) и яды. К ядам относятся радиоактивные вещества, поглощающие нейтроны. Примером такого яда является ксенон. По модели ядерных оболочек ксенону не хватает одного нейтрона для укомплектования последней оболочки, т.е. он обладает большим сечением поглощения нейтронов и тем самым значительным образом влияет на реактивность реактора. Рождение ксенона происходит по двум каналам:

$$\mathrm{n} + {}^{235}\mathrm{U} \xrightarrow{0{,}6\%} {}^{135}\mathrm{Xe}$$

$$\xrightarrow{6\%} {}^{135}_{52}\mathrm{Te} \xrightarrow[1{,}4\text{ мин}]{\beta^-} {}^{135}_{53}\mathrm{I} \xrightarrow[6{,}7\text{ час}]{\beta^-} {}^{135}_{54}\mathrm{Xe}+\mathrm{n} \longrightarrow {}^{136}\mathrm{Xe}.$$

Второй канал рождения ксенона является основным, поэтому будем рассматривать только его. Поскольку период полураспада теллура мал, то его во внимание принимать не будем. Гибель ксенона идет по следующей радиоактивной цепочке:

$${}^{135}\mathrm{Xe} \xrightarrow[9{,}2\text{ час}]{\beta^-} {}^{135}\mathrm{Cs} \xrightarrow[2{,}6\cdot 10^6\text{ лет}]{\beta^-} {}^{135}\mathrm{Ba}.$$

Итак, процесс отравления реактора характеризуется двумя уравнениями рождения и гибели для йода и ксенона. Эти уравнения представим в безразмерном виде:

$$\frac{dx_1}{dt} = U - \lambda_1 x_1, \qquad (16)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_1 x_1 - (U + \lambda_2) x_2, \qquad (17)$$

где x_1 и x_2 – концентрации йода и ксенона соответственно; $U = \frac{\phi}{\phi_{max}}$ – управляющий параметр, равный отношению плотности нейтронного потока ϕ к его максимальному значению ϕ_{max}; λ_1 и λ_2 – безразмерные постоянные распада йода и ксенона соответственно.

Масштабами времени и концентрации являются величины $M_t = \frac{1}{\sigma_2 \phi_{max}}$ и $M_N = \frac{\gamma \Sigma_f}{\sigma_2}$, где σ_2 – микросечение поглощения нейтронов ксеноном; Σ_f – макросечение деления урана; γ – выход йода при делении.

При отключении стационарно работающего реактора происходит накопление ксенона за счет радиоактивного распада йода и снижение реактивности реактора за счет отравления ксеноном. Отравление ксеноном P_{Xe} определяется отношением макросечения ксенона Σ_{Xe} к макросечению урана Σ_U: $P_{Xe} = \frac{\Sigma_{Xe}}{\Sigma_U} = \frac{\sigma_2 x_2 M_N}{\Sigma_U}$. Если отравление P_{Xe} превысит запас реактивности реактора $\rho_{запаса}$, то реактор попадет в режим вынужденной стоянки (йодная яма) на время распада йода и ксенона, которое составляет от полутора до двух суток. На рис. 1 приведен пример йодной ямы при $\rho_{запаса} = 0{,}1$.

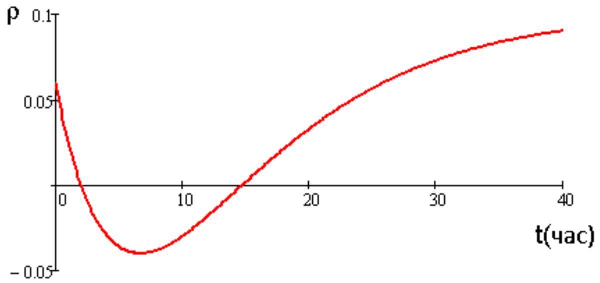

Рис. 1. Зависимость реактивности реактора ρ от времени при вынужденной стоянке

В связи с этим возникает вопрос об отключении реактора за минимальное время с возможностью его включения в работу в любой момент после остановки, причем продолжительность остановки заранее неизвестна. Эта задача, относящаяся к оптимальному управлению, вместе с уравнениями (16) и (17) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} H = W + UV, \\ W = \psi_0 - \psi_1\lambda_1 x_1 + \psi_2(\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2), \\ V = \psi_1 - \psi_2 x_2, \\ f_0 = 1, \\ 0 \le U \le 1, \\ \dfrac{d\psi_1}{dt} = \psi_1\lambda_1 - \psi_2\lambda_1, \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = \psi_2\lambda_2 + U\psi_2. \end{cases} \tag{18}$$

Естественно, возникает и другой вопрос: позволяет ли приведенная система уравнений найти оптимальную траекторию процесса отключения реактора? Ответ отрицательный. План действий отключения должен задаваться исследователем, он должен состоять из допустимых переходных процессов реактора, но при этом удовлетворять принципу Понтрягина.

В соответствии со структурой гамильтониана, допустимыми ксеноновыми переходными процессами являются следующие [12, 13]:

- включение реактора на мощность ($U = 1$, $V > 0$);
- отключение реактора ($U = 0$, $V < 0$);
- работа реактора при постоянном значении концентрации ксенона, определяемой запасом реактивности реактора;
- отключение реактора ($U = 0$) при максимуме концентрации ксенона, определяемой запасом реактивности реактора;
- управление реактором, определяемое условием $\dfrac{\partial H}{\partial U} = V = 0$, полученным на основе классического вариационного исчисления.

Процессы, из которых может быть составлен план действий, рассмотрим на фазовой диаграмме, представляющей зависимость концентрации ксенона от концентрации йода (рис. 2, 3). Процесс накопления йода и ксенона в реакторе, работающем на мощности, обозначен на рисунках кривой *1*. Процесс отключения реактора характеризуется кривой *2*, причем максимальная концентрация ксенона определяется мощностью, на которой работал реактор до отключения, и она никак не связана с запасом реактивности реактора. Конечной кривой, на которую нужно перевести реактор, является кривая *3*, максимум ксенона на этой кривой определяется запасом реактивности реактора. Конечная точка переходного процесса должна лежать правее и ниже точки максимума кривой *3*.

Если у реактора большой запас реактивности (рис. 2, точка D пересечения кривых *1* и *3* лежит правее точки B), то план действий будет состоять из двух этапов: отключения реактора в точке A с переводом его в точку B и включения реактора на мощность с переходом на кривую отключения *3* в точку D. В первом примере (рис. 2) при $\rho_{запаса} = 0{,}1$ расчетное время переходного процесса составило 7,13 часа при продолжительности ямы 37,3 часа.

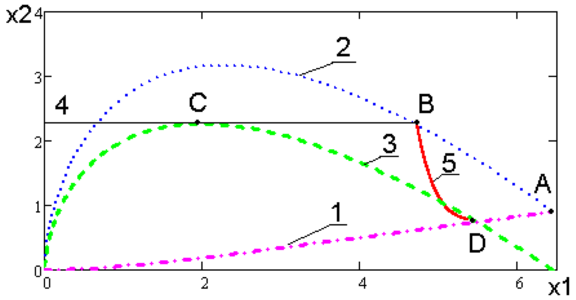

Рис. 2. Фазовая диаграмма процессов при большом запасе реактивности: x_1 – концентрация йода; x_2 – концентрация ксенона; 1 – реактор на мощности; 2 – отключение реактора; 3 – отключение реактора при запасе реактивности, равном отравлению; 4 – процесс с постоянной концентрацией ксенона; 5 – включение реактора на мощность

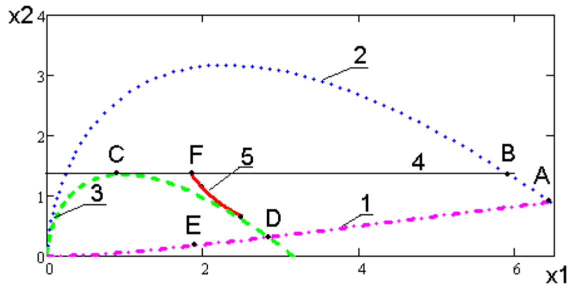

Рис. 3. Фазовая диаграмма оптимизации при малом запасе реактивности: x_1 – концентрация йода; x_2 – концентрация ксенона; 1 – реактор на мощности; 2 – отключение реактора; 3 – отключение реактора при запасе реактивности, равном отравлению; 4 – процесс с постоянной концентрацией ксенона; 5 – включение реактора на мощность

Если запас реактивности мал (рис. 3, точка D пересечения кривых *1* и *3* лежит левее точки B), то потребуется еще один процесс перехода из точки B по линии BC в точку F, находящуюся левее точки D. Этот переход выполняется переключением управления с $U_1 = 0$ на $U_2 = \frac{\lambda_1 x_1(t)}{x_{2m}} - \lambda_2$, при этом концентрация ксенона остается постоянной. Точка переключения F и точка E перехода на кривую *3* должны определяться на основе сшивки решений, соответствующих трем разным переходным процессам, и подчиняющихся уравнениям (16)–(18), однако эти точки проще определить численным методом стрельбы [16], т.е. на линии BC левее точки D следует подобрать такую точку, при переключении управления в которой на $U_3 = 1$ кривая включения коснется кривой *3*.

Итак, в случае малого запаса реактивности переходный процесс носит трехступенчатый характер с переключением управления в точке B с U_1 на U_2 и переключением управления в точке пристрелки F с U_2 на U_3. При принятом во втором примере (рис. 3) запасе реактивности 0,06 продолжительность переходного процесса составила 24 часа при продолжительности ямы 40 часов.

Выводы. Применение принципа Понтрягина с использованием анализа физических процессов отравления реактора ксеноном позволяет построить план действий при отключении ядерного реактора в обход йодной ямы и избежать простоя реактора.

Список литературы

1. **Рудик А.П.** Ядерные реакторы и принцип Понтрягина. – М.: Атомиздат, 1971.
2. **Рудик А.П.** Ксеноновые переходные процессы в ядерных реакторах. – М.: Атомиздат, 1974.
3. **Рудик А.П.** Физические основы ядерных реакторов. – М.: Атомиздат, 1979.
4. **Десятов В.М., Павлов В.И., Симонов В.Д.** Расчетное исследование оптимального режима снижения мощности реактора // Атомная энергия. – 1976. – Т. 40, Вып. 6. – С. 464.
5. **Математическая** теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1983.
6. **Понтрягин Л.С.** Принцип максимума. – М.: Фонд математического образования и просвещения, 1998.
7. **Болтянский В.Г.** Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969.
8. **Бушуев А.Ю.** Введение в оптимальное управление: электронное учебное издание. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.
9. **Методы** классической и современной теории автоматического управления / под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
10. **Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** Принцип максимума Понтрягина. – М.: Факториал Пресс, 2006.
11. **Дикусар В.В., Милютин А.А.** Качественные и численные методы в принципе максимума. – М.: Наука, 1989.
12. **Милютин А.А.** Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. – М.: Физматлит, 2001.
13. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
14. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002.
15. **Методы** математической физики: I. Основы комплексного анализа. II. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций / В.Г. Багров, В.В. Белов, В.Н. Задорожный, А.Ю. Трифонов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2002.
16. **Калиткин Н.Н.** Численные методы: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011.

References

1. Rudik, A.P. *Yadernye reaktory i printsip Pontryagina* [Nuclear reactors and the Pontryagin principle]. Moscow: Atomizdat, 1971.
2. Rudik, A.P. *Ksenonovye perekhodnye protsessy v yadernykh reaktorakh* [Xenon transients in nuclear reactors]. Moscow: Atomizdat, 1974.
3. Rudik, A.P. *Fizicheskie osnovy yadernykh reaktorov* [Physical foundations of nuclear reactors]. Moscow: Atomizdat, 1979.
4. Desyatov, V.M., Pavlov, V.I., Simonov, V.D. Raschetnoe issledovanie optimal'nogo rezhima snizheniya moshchnosti reaktora [Computational study of the optimal mode of reactor power reduction]. *Atomnaya energiya*, 1976, vol. 40, issue 6, p. 464.
5. Pontryagin, L.S., Boltyanskiy, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Nauka, 1983.
6. Pontryagin, L.S. *Printsip maksimuma* [Maximum principle]. Moscow: Fond matematicheskogo obrazovaniya i prosveshcheniya, 1998.
7. Boltyanskiy, V.G. *Matematicheskie metody optimal'nogo upravleniya* [Mathematical methods of optimal control]. Moscow: Nauka, 1969.
8. Bushuev, A.Yu. *Vvedenie v optimal'noe upravlenie* [Introduction to optimal control]. Moscow: Izdatel'stvo MGTU imeni N.E. Baumana, 2014.
9. Pupkova, K.A., Egupova, N.D. (ed.) *Metody klassicheskoy i sovremennoy teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Methods of classical and modern theory of automatic control]. Moscow: Izdatel'stvo MGTU im. N.E. Baumana, 2004.

10. Arutyunov, A.V., Magaril-Il'yaev, G.G., Tikhomirov, V.M. *Printsip maksimuma Pontryagina* [Pontryagin's maximum principle]. Moscow: Faktorial Press, 2006.

11. Dikusar, V.V., Milyutin, A.A. *Kachestvennye i chislennye metody v printsipe maksimuma* [Qualitative and numerical methods are in principle maximum]. Moscow: Nauka, 1989.

12. Milyutin, A.A. *Printsip maksimuma v obshchey zadache optimal'nogo upravleniya* [The maximum principle in the general problem of optimal control]. Moscow: Fizmatlit, 2001.

13. Alekseev, V.M., Tikhomirov, V.M., Fomin, S.V. *Optimal'noe upravlenie* [Optimal Control]. Moscow: FIZMATLIT, 2005.

14. Vasil'ev, F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: Faktorial Press, 2002.

15. Bagrov, V.G., Belov, V.V., Zadorozhnyy, V.N., Trifonov, A.Yu. *Metody matematicheskoy fiziki: I. Osnovy kompleksnogo analiza. II. Elementy variatsionnogo ischisleniya i teorii obobshchennykh funktsiy* [Methods of mathematical physics: I. Fundamentals of complex analysis. II. Elements of the calculus of variations and the theory of generalized functions]. Tomsk: Izdatel'stvo NTL, 2002.

16. Kalitkin, N.N. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Saint-Petersburg: BKhV-Peterburg, 2011.