

УДК 621.316

Денис Геннадьевич Григорьев

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», ассистент кафедры автоматического управления электроэнергетическими системами, Россия, Иваново, телефон 8(4932) 26-99-04, e-mail: denis.grigorev@mail.ru

Фильтрация гармоник на основе тригонометрических закономерностей

Авторское резюме

Состояние вопроса. На данный момент основным способом получения информации о гармоническом составе сигнала является разложение сигнала в ряд Фурье. Данное преобразование производит свертку сигнала из области мгновенных значений в область амплитуд и фаз гармоник, содержащихся в исходном сигнале. Однако в ряде задач расчета векторов подобная свертка сигнала является нежелательным явлением, поскольку дальнейшие операции проводятся в области мгновенных значений соответствующих гармоник. Использование свойств тригонометрических функций делает возможным разработку метода преобразования мгновенных значений сигнала в мгновенные значения гармоник с различной степенью разделения гармоник в полученных сигналах и различным временем выполнения операций.

Материалы и методы. Для решения задач, поставленных в рамках данного исследования, использованы аналитические и численные методы решения линейных уравнений. Аналитические методы представлены полученными выражениями для разложения сигнала на ряды гармоник. Численные методы использованы при проверке работоспособности предложенных методов фильтрации и осуществлены с применением языка программирования Python.

Результаты. Предложены методы преобразования сигнала в ряды мгновенных значений гармоник с применением тригонометрических закономерностей. Произведена проверка данных методов на математически смоделированном сигнале и получены достоверные результаты, сравнимые с результатами аналогичного алгоритма.

Выводы. Предложенные методы обладают вариативностью и гибкостью выбора затраченного на фильтрацию времени и точности полученного результата. Сравнение с преобразованием Фурье показало схожие результаты при наличии гармоник и шумов и лучшие результаты при наличии апериодической составляющей.

Ключевые слова: гармоники, преобразование Фурье, цифровая фильтрация сигнала, цифровая обработка сигнала, тригонометрические тождества

Denis Gennadievich Grigoriev

Ivanovo State Power Engineering University, Teaching Assistant of Automatic Control of Electrical Power Systems Department, Russia, Ivanovo, telephone 8(4932)26-99-04, e-mail: denis.grigorev@mail.ru

Harmonic filtering based on trigonometric laws

Abstract

Background. Currently, the main method to obtain information about the harmonic composition of a signal is to decompose the signal into a Fourier series. This decomposition brings to a convolution of the signal from the domain of instantaneous values into the domain of amplitudes and phases of harmonics of the original signal. However, in a number of vector calculation problems, such signal convolution is an undesirable phenomenon, since further operations are carried out in the domain of instantaneous values of the corresponding harmonics. Application of the properties of trigonometric functions makes it possible to develop a method to convert instantaneous signal values into instantaneous harmonic values with varying degrees of harmonic separation in the received signals and varying operation times.

Materials and methods. Analytical and numerical methods to solve linear equations have been used to solve the problems posed in this study. Analytical methods are presented by the obtained expressions to decompose the signal into harmonic series. Numerical methods have been used to test the filtering methods proposed in the study and have been implemented using the Python programming language.

Results. The author has proposed the methods to convert a signal into a series of instantaneous harmonic values using trigonometric principles. These methods have been tested on a mathematically modeled signal. Reliable results have been obtained, comparable to the results of a similar algorithm.

Conclusions. The proposed methods have variability and flexibility when choosing the time spent on filtering and the accuracy of the obtained result. A comparison with the Fourier transform has shown similar results in the presence of harmonics and noise, and better results in the presence of an aperiodic component.

Key words: harmonics, Fourier transform, digital signal filtering, digital signal processing, trigonometric identities

DOI: 10.17588/2072-2672.2026.3.031-041

Введение. Применяемые в данный момент методы разложения сигнала на гармонические составляющие в большинстве своем используют математический аппарат преобразования Фурье (в частности, дискретное и быстрое преобразования) [1–5]. Это позволяет получить информацию о сигнале за период частоты основной гармоники. В то же время это накладывает некоторые ограничения на скорость работы этих методов. Так, для вычисления основной гармоники и кратных ей гармоник необходимо накопить в памяти процессора и обработать массив выборок за период основной частоты сети. Для ускорения этого процесса был разработан метод полупериодного дискретного преобразования Фурье, обладающий как достоинствами, так и недостатками, связанными с укорочением окна наблюдения сигнала [6–8]. Из достоинств можно отметить более быструю реакцию на изменение сигнала. Из недостатков – большую подверженность влиянию аperiodической составляющей сигнала, шумовой компоненты и прочих искажающих сигнал факторов.

Альтернативой преобразованию Фурье могут служить другие методы, например вейвлет-преобразование. Применение этих методов переводит сигнал в амплитудно- и фазочастотную области. Подобная свертка является довольно удобной для алгоритмов релейной защиты, основанных на сравнении амплитуд или фаз измеряемых значений. Так, например, имея вектора тока и напряжения первой гармоники, можно легко получить значения сопротивлений для дистанционной защиты путем простых математических операций. Однако для быстродействующих алгоритмов релейной защиты или получения вектора могут потребоваться мгновенные значения соответствующих гармоник, и в таком случае получение ряда мгновенных значений из значений вектора займет время и вычислительные ресурсы. Так, в [9] предложен метод получения вектора тока по мгновенным значениям с двух датчиков, один из которых измеряет ток, а другой – производную тока. На получаемый таким образом вектор оказывает влияние наличие гармоник, от которых необходимо избавиться до проведения расчета вектора без преобразования сигнала из области мгновенных значений.

В качестве такого решения предлагается применение фильтрации гармонических составляющих с использованием тригонометрических формул, не производящее свертки значений до амплитуд и фаз векторов гармоник [10]. Ниже предлагается описание метода фильтрации группы векторов и пар векторов.

Для упрощения представления метода примем следующее: сигнал стационарный, с частотой 50 Гц (и угловой частотой ω без индекса), дискретизацией $N = 12$ точек на период основной частоты; факт наличия гармоник в исходном

сигнале с частотой, кратной частоте 50 Гц, с отсутствием интергармоник. Такой исходный сигнал можно представить следующей формулой:

$$u(t) = \sum_{i=1}^N U_i \cdot \sin(\omega_i t + \psi_i) = \sum_{i=1}^N U_i \cdot \sin(i\omega t + \psi_i) = \sum_{i=1}^N \overleftarrow{U}_i(\psi_i), \quad (1)$$

где i – номер гармоники; $\overleftarrow{U}_i(\psi_i)$ – проекция вектора (мгновенное значение) i -й гармоники с фазой ψ_i на мнимую ось; U_i – амплитуда i -й гармоники; ω_i – угловая частота i -й гармоники; ψ_i – фаза i -й гармоники.

Итоговое мгновенное значение сигнала является суммой мгновенных значений всех гармоник, из которых он состоит. Сигнал не рассматривается как комплексный, поскольку классические измерительные преобразователи измеряют лишь мгновенное значение сигнала, без вычисления его производной. Следовательно, данные о второй оси комплексной плоскости изначально отсутствуют.

Если же нужно получить значение сигнала через определенный момент времени при сохранении его стационарности, то следует воспользоваться модифицированной версией формулы (1):

$$u(t + \Delta t) = \sum_{i=1}^N U_i \cdot \sin(i\omega t + \psi_i + i\varphi_i) = \sum_{i=1}^N U_i \cdot \sin(i\omega t + \psi_i + \varphi_i) = \sum_{i=1}^N \overleftarrow{U}_i(\psi_i + \varphi_i), \quad (2)$$

где φ_i – поворот угла i -й гармоники за время Δt .

В аналоговом сигнале квант времени Δt может принимать любые значения, в то время как в цифровом представлении аналогового сигнала значение Δt будет кратно величине T_d , для нашего случая равной $T_d = 1 / (50 \cdot N)$. Так, например, первая гармоника с частотой 50 Гц за момент времени $\Delta t = 6 \cdot T_d = 0,01$ с повернется на угол $\varphi_1 = 180^\circ$ относительно момента времени t , вторая гармоника – на угол $\varphi_2 = 360^\circ$, третья гармоника – на угол $\varphi_3 = 540^\circ = 180^\circ$ и т.д. Дискретный сигнал не обладает всей той вариативностью углов, которые присущи аналоговому сигналу, поскольку изменения угла связаны с временем дискретизации. Минимальное изменение угла для каждой гармоники можно найти по формуле

$$\varphi_i = 360 \cdot f_i T_d = \frac{360}{N} \frac{f_i}{f_1} = 360 \cdot \frac{i}{N}, \quad (3)$$

где f_i – частота i -й гармоники; f_1 – частота основной гармоники; T_d – период дискретизации сигнала; N – число точек на период.

Для вышеописанных условий по формуле (3) получаем значение 30 градусов для первой

гармоники, 60 градусов для второй и т. д. Следовательно, в оцифрованном сигнале любое изменение угла будет кратно этим значениям. Также можно сделать вывод, что гармоники $i + k \cdot N$ будут вести себя так же, как и гармоника с номером i при любом значении k . Так, гармоника с номером 13 будет иметь минимальное изменение угла, равное 390 градусам, что может быть принято аналогичным значению 30 градусов, равному значению у первой гармоники. Таким образом, для $N = 12$ достаточно исследовать поведение первых 12 гармоник. Примем абсолютные начальные углы для каждой из гармоник равными нулю, т.е. $\psi_i = 0$, а амплитуды – равными друг другу и исследуем поведение векторов в разные моменты времени. Изобразим результаты, указав рядом с каждым вектором номера соответствующих ему гармоник (рис. 1). Далее будет продемонстрировано, что начальная фаза и амплитуда не влияют на получаемый результат.

Анализ полученных данных (рис. 1) показывает, что вектора группируются по определенным правилам: число групп векторов равно отношению количества точек на период основной частоты к соотношению $\Delta t / T_d$. При этом действуют схожие с формулой (3) правила, поэтому картина распределения векторов при $\Delta t = 13 \cdot T_d$ будет совпадать с изображением на рис. 1,а, поскольку $13 = 1 + k \cdot N$.

Целью настоящего исследования является разработка метода разделения сигнала на ряды мгновенных значений гармоник с учетом поведения гармоник в дискретном сигнале, изображенном на рис. 1 и описанном формулами (1), (2).

Методы исследования. Для проведения исследования воспользуемся формулами (1) и (2), а также схемами поведения векторов гармоник (рис. 1). Основным инструментом для разделения гармоник является аналитическое решение уравнений сумм и разностей точек сигнала, использующих сигнал, описанный формулами (1) и (2), с учетом данных о поведении гармоник (рис. 1). Ниже представлены конкретные подходы к фильтрации сигнала с помощью данных инструментов.

Методы разложения сигнала. Фильтрация векторов по базисам простых чисел. Рассмотрим рис. 1,д. Можно заметить, что все четные гармоники сгруппированы в правом векторе, в то время как все нечетные гармоники находятся в левом. Тот факт, что вектора имеют различное поведение в одинаковые по времени

моменты, позволяет разделить сигнал на группы векторов, объединенных по общему признаку, с помощью математического аппарата. В начальный момент времени t мгновенное значение сигнала может быть описано следующей формулой:

$$u(t) = \overleftarrow{U}_1(\psi_1) + \overleftarrow{U}_2(\psi_2) + \overleftarrow{U}_3(\psi_3) + \dots + \overleftarrow{U}_i(\psi_i). \quad (4)$$

Тогда для момента $\Delta t_2 = \pi / \omega$ сигнал может быть описан формулой:

$$u(t + \Delta t_2) = \overleftarrow{U}_1(\psi_1 + 180^\circ) + \overleftarrow{U}_2(\psi_2 + 360^\circ) + \overleftarrow{U}_3(\psi_3 + 540^\circ) + \dots + \overleftarrow{U}_i(\psi_i + \varphi_i) = -\overleftarrow{U}_1(\psi_1) + \overleftarrow{U}_2(\psi_2) - \dots + \overleftarrow{U}_i(\psi_i + \varphi_i) \quad (5)$$

или в упрощенном виде

$$u(t + \Delta t_2) = \sum_{i=1}^{N/2 \leftarrow} U_{2i}(\psi_{2i}) - \sum_{i=1}^{N/2 \leftarrow} U_{2i-1}(\psi_{2i-1}). \quad (6)$$

Таким образом, все четные гармоники сохраняют свое значение, в то время как значение нечетных гармоник останется таким же по модулю, но поменяет знак, независимо от фазы сигнала ψ_i . Вычтем выражения (6) из выражения (1), получив выражение

$$u(t) - u(t + \Delta t_2) = \sum_{i=1}^N \overleftarrow{U}_i(\psi_i) - \sum_{i=1}^{N/2 \leftarrow} U_{2i}(\psi_{2i}) + \sum_{i=1}^{N/2 \leftarrow} U_{2i-1}(\psi_{2i-1}) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N/2 \leftarrow} U_{2i-1}(\psi_{2i-1}) = 2 \cdot u_H(t), \quad (7)$$

где $u_H(t)$ – сумма нечетных гармоник исходного сигнала.

Применить данный метод можно к любому сигналу, оцифрованному с количеством точек на период основной частоты N , кратным двум.

В результате расчетов получаем значение только нечетных гармоник в сигнале. Сменив вычитание в (7) на сумму, можно получить значение только четных гармоник. Таким образом, за полпериода основной частоты мы разделили сигнал на четные и нечетные гармоники. В свою очередь, ряд четных гармоник (2, 4, 6...) можно представить как новый базовый ряд гармоник, но с номерами гармоник, умноженными на два ($2, 4, 6... = 2 \cdot [1, 2, 3...]$). Соответственно, к нему применим подход, используемый в формуле (7), но за уменьшенное вдвое время Δt_2 , что уже требует делимости на четыре без остатка числа точек N в одном периоде сигнала.

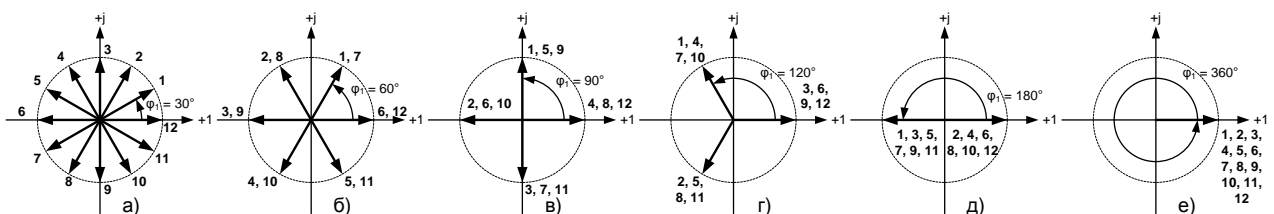


Рис. 1. Поведение векторов различных гармоник при $N = 12$, начальной фазе гармоник 0 градусов: а – $\Delta t = 1 \cdot T_d$; б – $\Delta t = 2 \cdot T_d$; в – $\Delta t = 3 \cdot T_d$; г – $\Delta t = 4 \cdot T_d$; д – $\Delta t = 6 \cdot T_d$; е – $\Delta t = 12 \cdot T_d$

К недостаткам данного подхода можно отнести необходимость измерения значения сигнала через полпериода от текущего момента. Этот недостаток можно нивелировать. Нетрудно заметить, что для установившегося сигнала $u(t + \Delta t_2) = u(t - \Delta t_2)$. Таким образом, измеряя предыдущие значения сигнала, можно в режиме реального времени вычислять значения четных и нечетных гармоник. Это не избавляет нас от эффекта задержки, однако в переходном режиме изменение сигнала гармоник начнется в тот же момент, что и в исходном сигнале. В полученном без этого исправления результирующем сигнале, рассчитанном по исходной формуле (7), начало переходного режима будет сдвинуто на полпериода назад от времени наступления переходного режима в исходном сигнале, что не совсем корректно.

Следующим шагом в фильтрации гармоник является фильтрация гармоник, кратных трем, поскольку в исходном ряде нечетных гармоник (1, 3, 5...) третья гармоника находится сразу после основной. Для этого обратимся к рис. 1, г. По аналогии с предыдущим способом, нужно найти такое время Δt_3 , чтобы фильтруемые или интересующие нас гармоники сделали за это время поворот на π радиан. Для третьей гармоники это время $\Delta t_3 = \pi/(3\omega)$. При этом оставшиеся гармоники по своему поведению поделятся на три группы – повернувшиеся на 60, 180 и 300 градусов. В сигнале нет гармоник, повернувшихся на 120, 240 и 360 градусов, поскольку это присуще четным гармоникам, отфильтрованным на прошлом шаге. В данном случае обычными операциями сложения и вычитания нельзя добиться того же результата, что и на предыдущем шаге, поэтому для дальнейших расчетов потребуется применение тригонометрической формулы суммы двух синусов:

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right). \quad (8)$$

Применим данный подход, просуммировав значения нечетных гармоник в моменты t и $t + \Delta t_3$. Назовем данный результат α , получаем выражение

$$\begin{aligned} u_H(t) + u_H(t + \Delta t_3) &= \sum_{i=1}^{N/2 \leftarrow} U_{2i-1}(\psi_{2i-1}) + \overleftarrow{U}_1(\psi_1 + 60^\circ) + \\ &+ \overleftarrow{U}_3(\psi_3 + 180^\circ) + \overleftarrow{U}_5(\psi_5 + 300^\circ) + \dots \\ &\dots + \overleftarrow{U}_{11}(\psi_{11} + 660^\circ) = \overleftarrow{U}_1(\psi_1) + \overleftarrow{U}_1(\psi_1 + 60^\circ) + \quad (9) \\ &+ \overleftarrow{U}_5(\psi_5) + \overleftarrow{U}_5(\psi_5 - 60^\circ) + \overleftarrow{U}_7(\psi_7) + \overleftarrow{U}_7(\psi_7 + 60^\circ) + \\ &+ \overleftarrow{U}_{11}(\psi_{11}) + \overleftarrow{U}_{11}(\psi_{11} - 60^\circ) = \alpha. \end{aligned}$$

Согласно (9), третья и кратные ей гармоники исчезли из сигнала. Однако возникает следующая проблема – оставшиеся в таком

сигнале гармоники смещаются по фазе и изменяют свою амплитуду. Происходит суммирование исходных сигналов гармоник с точками, отстающими или опережающими их на 60 градусов. Для устранения этого эффекта необходимо пересчитать формулу (9), прибавляя к исходному сигналу точку в момент времени $t - \Delta t_3$. Назовем данный результат β , получаем формулу

$$\begin{aligned} u_H(t) + u_H(t - \Delta t_3) &= \sum_{i=1}^{N/2 \leftarrow} U_{2i-1}(\psi_{2i-1}) + \\ &+ \overleftarrow{U}_1(\psi_1 - 60^\circ) + \overleftarrow{U}_3(\psi_3 - 180^\circ) + \\ &+ \overleftarrow{U}_5(\psi_5 - 300^\circ) + \dots + \overleftarrow{U}_{11}(\psi_{11} - 660^\circ) = \overleftarrow{U}_1(\psi_1) + \quad (10) \\ &+ \overleftarrow{U}_1(\psi_1 - 60^\circ) + \overleftarrow{U}_5(\psi_5) + \overleftarrow{U}_5(\psi_5 + 60^\circ) + \overleftarrow{U}_7(\psi_7) + \\ &+ \overleftarrow{U}_7(\psi_7 - 60^\circ) + \overleftarrow{U}_{11}(\psi_{11}) + \overleftarrow{U}_{11}(\psi_{11} + 60^\circ) = \beta. \end{aligned}$$

В данный момент расчетные сигналы α и β не имеют в своем составе гармонических компонент, кратных трем, но содержат исходный сигнал и производные от исходного сигнала компоненты, отстающие друг от друга на одинаковое количество градусов. Для их устранения воспользуемся формулой (8), просуммировав расчетные сигналы α и β , получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2U_1 \cdot \sin\left(\frac{\omega t + \psi_1 + 60^\circ + \omega t + \psi_1 - 60^\circ}{2}\right) \times \\ &\times \cos\left(\frac{\omega t + \psi_1 + 60^\circ - \omega t - \psi_1 + 60^\circ}{2}\right) + \\ &+ 2\overleftarrow{U}_1(\psi_1) + \dots = 2U_1 \cdot \sin(\omega t + \psi_1) \cos(60^\circ) + \quad (11) \\ &+ 2\overleftarrow{U}_1(\psi_1) + \dots = 3\overleftarrow{U}_1(\psi_1) + 3\overleftarrow{U}_5(\psi_5) + \\ &+ 3\overleftarrow{U}_7(\psi_7) + 3\overleftarrow{U}_{11}(\psi_{11}) = 3u_{HT}(t), \end{aligned}$$

где u_{HT} – сигнал из нечетных гармоник, исключая кратные трем.

Вычитая u_{HT} из исходного сигнала нечетных гармоник, можно получить ряд кратных трем нечетных гармоник, который представляет собой исходный ряд нечетных гармоник с умноженными на три номерами (3, 9, 15... = 3 · [1, 3, 5...]). Данный метод применим к любому сигналу с N , кратным шести, поэтому он имеет ограниченное применение. Так, для потока Sampled Values с цифрового трансформатора тока или напряжения, предназначенного для релейной защиты, необходимо обеспечить 80 измеренных точек на период промышленной частоты, что не кратно шести, или 96 точек на период, что уже кратно шести.

Следующим шагом предстоит отфильтровать гармоники, кратные пяти. Дальнейшая фильтрация представляет собой сложные математические операции, поскольку требует число

этапов, соразмерное половине числа кратности, и поэтому будет опущена в настоящем исследовании. Для кратных пяти гармоник это 2 этапа, для кратных семи гармоник это 3 этапа и т.д. Дальнейшее разбиение приводит к рядам гармоник, начинающимся с 11-й, 13-й и т.д., т.е. имеющим базисную гармонику с простым числом.

Вышеописанные методы фильтрации позволяют фильтровать сигнал с некоторой степенью вариативности, в зависимости от того, какой точностью должен обладать конечный результат. Допустимой является как простая фильтрация сигнала на четные и нечетные гармоники, так и продолжение фильтрации кратных трем, пяти и т.д. рядов гармоник. Это отличает данные методы от быстрого преобразования Фурье (БПФ), поскольку БПФ вычисляет сразу все доступные гармоники, или от дискретного преобразования Фурье (ДПФ), которое вычисляет одну гармонику. Так, при наличии в сигнале только первой и четных гармоник возможно выполнить фильтрацию за один этап по формуле (7). При этом чем больше этапов фильтрации сигнала происходит, тем больше операций за все меньшее время предстоит выполнить. Для фильтрации четных и нечетных гармоник необходимо просуммировать два измеренных значения, достаточно удаленных по времени, и получить две группы векторов как результат, в то время как для фильтрации пятой гармоники уже необходимо оперировать тремя группами векторов и совершать с ними большее число операций за меньшее время.

Данные методы довольно сложно применить, поскольку требуется такое число выборок на период, которое будет кратно произведению простых чисел. Сложность этой задачи кратно возрастает при увеличении количества простых чисел, а также является избыточной, поскольку большинство терминалов релейной защиты работает с числом выборок кратным 2, 3 и 5. Как уже было отмечено, стандартный SV-поток может иметь либо 80 выборок на период, что кратно простым числам 2 и 5, либо 96, что кратно 2 и 3. В таком случае применить фильтрацию для кратных 7, 11 и более высших простых гармоник не представляется возможным, поскольку отсутствуют выборки, повернутые друг относительно друга на необходимый угол. Фильтрация кратных 2, 3, 5 гармоник может применяться для предварительного разделения сигнала на ряды гармоник. Для продолжения фильтрации необходим иной метод, который описан ниже.

Фильтрация векторов по сопряженным векторам. Рассмотрим первые 12 гармоник. Проведем фильтрацию гармоник в исходном сигнале по простым числам (предыдущими методами) и изобразим полученный результат схематически (рис. 2).

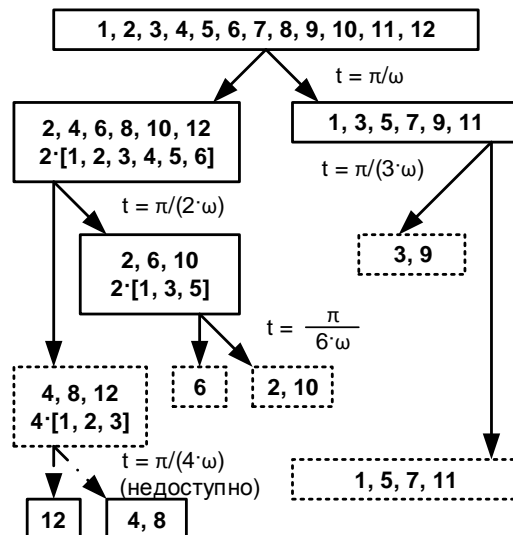


Рис. 2. Фильтрация сигнала на ряды гармоник при принятых условиях (пунктир – полученные ряды гармоник)

Анализ полученных результатов показывает, что большую часть гармоник удалось отфильтровать на группы по 1–2 гармоники в каждой. Исключениями являются ряд «1, 5, 7, 11», соответствующий сигналу $u_{нт}$ и содержащий сразу 4 гармоники, и ряд «4, 8, 12», в силу того что N не кратно 8. При принятом числе N гармоники этих рядов нельзя отфильтровать по старым методам, поэтому воспользуемся предлагаемым методом. Для этого нанесем оставшиеся гармоники ряда, включающего первую гармонику, на комплексную плоскость при минимально доступном угле, т.е. при $\Delta\theta = \pi / (6 \cdot \omega)$ (рис. 3).

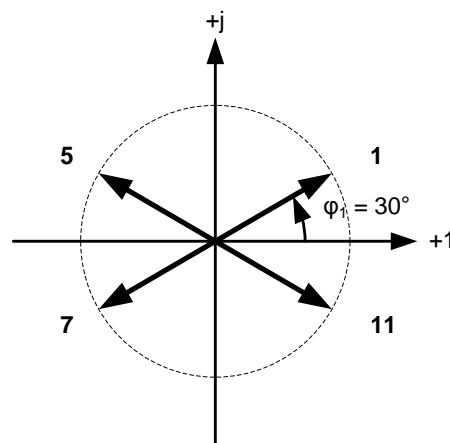


Рис. 3. Поведение векторов различных гармоник в сигнале оставшихся гармоник при начальной фазе 0 градусов и моменте времени $t + \Delta t$

Стоит заметить, что при принятых допущениях все вектора, находящиеся по одну сторону от действительной оси, имеют одинаковые по модулю, но разные по знаку проекции на эту ось, т.е. будут иметь одинаковое по модулю, но

разное по знаку значение косинуса, что говорит о схожести поведения и позволит отфильтровать их на два ряда.

Поскольку ни один из векторов не лежит на действительной оси, предыдущие методы с суммированием трех точек (предыдущей, удвоенной текущей, следующей, как в (11)) можно упростить до суммирования двух точек, исключая текущую из данного набора.

Просуммируем значения u_{HT} в моменты времени t с опережающим и отстающим на Δt_6 значением и получим формулу

$$\begin{aligned} u_{HT}(t + \Delta t_6) + u_{HT}(t - \Delta t_6) &= \overleftarrow{U}_1(\psi_1 + 30^\circ) + \\ &+ \overleftarrow{U}_5(\psi_5 + 150^\circ) + \overleftarrow{U}_1(\psi_1 - 30^\circ) + \\ &+ \overleftarrow{U}_5(\psi_5 - 150^\circ) + \dots = 2\overleftarrow{U}_1(\psi_1) \cdot \cos(30^\circ) + \\ &+ 2\overleftarrow{U}_5(\psi_5) \cdot \cos(150^\circ) + 2\overleftarrow{U}_7(\psi_7) \cdot \cos(210^\circ) + \\ &+ 2\overleftarrow{U}_{11}(\psi_{11}) \cdot \cos(330^\circ) = \lambda. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку вектора различных гармоник имеют одинаковую по модулю проекцию на ось $+j$ (равный коэффициент удвоенного косинуса) и противоположные знаки, проведем нормирование результата по вектору первой гармоники по формуле (12) и просуммируем его с исходным сигналом, получим формулу

$$\begin{aligned} u_{HT}(t) + \frac{\lambda}{2 \cdot \cos(30^\circ)} &= \\ &= \overleftarrow{U}_1(\psi_1) + \overleftarrow{U}_1(\psi_1) \frac{2 \cdot \cos(30^\circ)}{2 \cdot \cos(30^\circ)} + \\ &+ \overleftarrow{U}_5(\psi_5) + \overleftarrow{U}_5(\psi_5) \frac{2 \cdot \cos(150^\circ)}{2 \cdot \cos(30^\circ)} + \\ &+ \overleftarrow{U}_7(\psi_7) + \overleftarrow{U}_7(\psi_7) \frac{2 \cdot \cos(210^\circ)}{2 \cdot \cos(30^\circ)} + \\ &+ \overleftarrow{U}_{11}(\psi_{11}) + \overleftarrow{U}_{11}(\psi_{11}) \frac{2 \cdot \cos(330^\circ)}{2 \cdot \cos(30^\circ)} = \\ &= 2 \left(\overleftarrow{U}_1(\psi_1) + \overleftarrow{U}_{11}(\psi_{11}) \right) = 2\mu. \end{aligned} \quad (13)$$

Анализ данных показывает, что полученный по формуле (13) результат содержит только вектора, находящиеся справа (см. рис. 3). Для получения оставшихся слева гармоник необходимо вычесть из исходного сигнала полученный сигнал μ .

Данный метод будет работать таким образом с сопряженными по оси X векторами и поиному будет работать на сигналах, которые при минимальном угле поворота первой гармоники повернутся на 180 либо на 360 градусов, как, например, 6-я и 12-я гармоники при $N = 12$, поскольку для таких сигналов метод будет давать конкретную гармонику, а не пару гармоник.

Вектора 6-й и 12-й гармоники являются особенными, поскольку их проекция на ось действительных чисел дает единицу либо минус единицу. На схеме рис. 1, а можно заметить, что имеется еще одна группа уникальных векторов, проекция которых на ось действительных чисел равна нулю, – это гармоники 3 и 9. При суммировании значений, полученных при повороте этих гармоник на 90 градусов по часовой и против часовой стрелки, получается нулевой результат.

Проведем разложение изначального сигнала на сопряженные вектора без выше описанных методов фильтрации по базисам простых чисел, не разделяя гармоники на ряды, а сразу выделяя пары гармоник и единичные гармоники. Проведем данные операции для сигнала с $N = 12$. Минимальный угол поворота первой гармоники в таком случае составит 30 градусов и займет по времени Δt_6 . Для получения результата будем применять следующие сигналы: $\gamma^j = \zeta^{j-1}(t + \Delta t_6)$; $\rho^j = \zeta^{j-1}(t - \Delta t_6)$, ζ^j – промежуточные результаты, $\zeta^0 = u(t)$, j – номер шага.

Для проведения фильтрации просуммируем отстающую и опережающую выборки полученного ранее (или исходного) сигнала и вычтем удвоенную текущую выборку, умноженную на двойной косинус. Угол под косинусом должен принимать дискретные значения от 0 до 180 включительно, кратные минимальному углу поворота первой гармоники, но не равные ему. Таким образом, необходимо взять все углы, кратные 30, исключая угол 30 градусов. Порядок взятия углов (от 0 до 180 градусов, от 180 до 0, произвольный и т.д.) на итоговый результат расчетов гармоник влияния не оказывает. На этапе фильтрации с косинусом угла 90 градусов будет отсутствовать текущая выборка ζ в выражении, а на этапе с косинусами углов 0 и 180 градусов будет присутствовать удвоенная текущая выборка с разными знаками. Проведем данный вид фильтрации поэтапно.

Этап 1 описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \gamma^j + \rho^j &= u(t + \Delta t_6) + u(t - \Delta t_6) = \left(\overleftarrow{U}_1 + \overleftarrow{U}_{11} \right) \times \\ &\times 2 \cdot \cos(30^\circ) + \left(\overleftarrow{U}_2 + \overleftarrow{U}_{10} \right) 2 \cdot \cos(60^\circ) + \\ &+ \left(\overleftarrow{U}_3 + \overleftarrow{U}_9 \right) 2 \cdot \cos(90^\circ) + \left(\overleftarrow{U}_4 + \overleftarrow{U}_8 \right) 2 \cdot \cos(120^\circ) + \\ &+ \left(\overleftarrow{U}_5 + \overleftarrow{U}_7 \right) 2 \cdot \cos(150^\circ) + \overleftarrow{U}_6 2 \cdot \cos(180^\circ) + \\ &+ \overleftarrow{U}_{12} 2 \cdot \cos(0^\circ) = 2\overleftarrow{U}_{12} - 2\overleftarrow{U}_6 + \left(\overleftarrow{U}_1 + \overleftarrow{U}_{11} \right) \times \\ &\times 2 \cdot \cos(30^\circ) + \left(\overleftarrow{U}_2 + \overleftarrow{U}_{10} \right) 2 \cdot \cos(60^\circ) - \left(\overleftarrow{U}_4 + \overleftarrow{U}_8 \right) \times \\ &\times 2 \cdot \cos(60^\circ) - \left(\overleftarrow{U}_5 + \overleftarrow{U}_7 \right) 2 \cdot \cos(30^\circ) = \zeta^j. \end{aligned} \quad (14)$$

Этап 2:

$$\gamma^{II} + \rho^{II} + 2\zeta^I = f\left(\overleftarrow{U}_1, \overleftarrow{U}_2, \overleftarrow{U}_4, \overleftarrow{U}_5, \overleftarrow{U}_7, \overleftarrow{U}_8, \overleftarrow{U}_{10}, \overleftarrow{U}_{11}, \overleftarrow{U}_{12}\right) = \zeta^{II}, \quad (15)$$

где $f(U)$ – функция соответствующих гармоник.

Этап 3:

$$\gamma^{III} + \rho^{III} - 2\zeta^{II} = f\left(\overleftarrow{U}_1, \overleftarrow{U}_2, \overleftarrow{U}_4, \overleftarrow{U}_5, \overleftarrow{U}_7, \overleftarrow{U}_8, \overleftarrow{U}_{10}, \overleftarrow{U}_{11}\right) = \zeta^{III}. \quad (16)$$

Этап 4:

$$\gamma^{IV} + \rho^{IV} + 2\zeta^{III} \cdot \cos(30^\circ) = f\left(\overleftarrow{U}_1, \overleftarrow{U}_2, \overleftarrow{U}_4, \overleftarrow{U}_8, \overleftarrow{U}_{10}, \overleftarrow{U}_{11}\right) = \zeta^{IV}. \quad (17)$$

Этап 5:

$$\gamma^V + \rho^V + 2\zeta^{IV} \cdot \cos(60^\circ) = f\left(\overleftarrow{U}_1, \overleftarrow{U}_2, \overleftarrow{U}_{10}, \overleftarrow{U}_{11}\right) = \zeta^V. \quad (18)$$

Финальный этап 6:

$$\begin{aligned} \gamma^{VI} + \rho^{VI} - 2\zeta^V \cdot \cos(60^\circ) &= \left(\overleftarrow{U}_1 + \overleftarrow{U}_{11}\right) \times \\ &\times 128 \cdot \cos^2(30^\circ) \cdot (\cos^2(30^\circ) - 1) \times \\ &\times (\cos^2(30^\circ) - \cos^2(60^\circ)) = \zeta^{VI}. \end{aligned} \quad (19)$$

Переформулируем результат шестого этапа, получая формулу для вычисления гармоник:

$$\begin{aligned} \left(\overleftarrow{U}_1 + \overleftarrow{U}_{11}\right) &= \frac{\zeta^{VI}}{128 \cdot \cos^2(30^\circ) (\cos^2(30^\circ) - 1)} \times \\ &\times \frac{1}{(\cos^2(30^\circ) - \cos^2(60^\circ))} = -\frac{\zeta^{VI}}{12}. \end{aligned} \quad (20)$$

Проанализируем задержку в формулах (14)–(20). Для формулы (14) требуются две выборки – в моменты времени $t + \Delta t_b$ и $t - \Delta t_b$. Полученный сигнал ζ^I определяется на момент времени t . Для получения результата по формуле (15) требуется знать сигнал $\gamma^{II} = \zeta^I(t + \Delta t_b)$, получить который можно только зная значение сигнала $u(t + 2 \cdot \Delta t_b)$, и зная сигнал $\rho^{II} = \zeta^I(t - \Delta t_b)$, зная значение сигнала $u(t - 2 \cdot \Delta t_b)$. Поскольку на каждом этапе происходит сдвиг на 30 градусов или Δt_b , можно легко посчитать финальную задержку. Для ζ^{VI} задержка составит $6 \cdot \Delta t_b$, или 180° .

Данный метод является рекурсивным, т.е. при получении новой выборки можно сразу приступать к расчету новых значений гармоник. Получив значение группы гармоник ($U_1 + U_{11}$) по формулам (19), (20), можно приступать к расчету значений группы гармоник ($U_2 + U_{10}$) по фор-

муле (18), продолжая в дальнейшем пересчет в обратном направлении вплоть до формулы (14). При отсутствии необходимости в информации обо всех гармониках, можно исключить этап пересчета в обратном направлении, вычислив только первую гармонику по (20).

Формулы (14)–(20) являются частным случаем при $N = 12$. Сформулируем уравнения для общего случая. Для этого разобьем вектора гармоник по группам. Те гармоники, которые при минимальном угле поворота первой гармоники и нулевой начальной фазе будут располагаться на оси мнимых чисел, обозначим как K . Те гармоники, которые будут располагаться на оси действительных чисел, разобьем на две группы – находящиеся слева M_L и находящиеся справа M_R . Оставшиеся гармоники разделим на левые и правые и дадим им обозначения – N_L для находящихся слева и N_R для находящихся справа. Для наглядности используем рис. 1, а как основу и обозначим вектора по их проекциям на оси действительных и мнимых чисел (рис. 4).

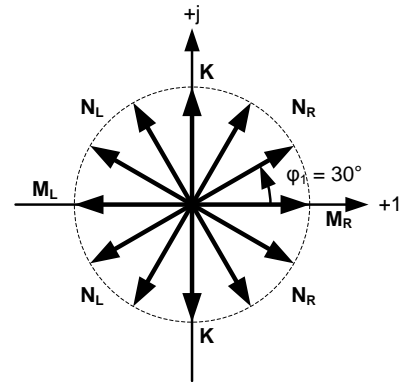


Рис. 4. Классификация векторов по их проекциям на оси действительных и мнимых чисел

Согласно полученному изображению (рис. 4), $K = 1$, так как данные вектора присутствуют на оси мнимых чисел; $M_L = M_R = 1$, так как данные вектора присутствуют на оси действительных чисел слева и справа соответственно; $N_L = N_R = 4$, поскольку слева и справа находится по 4 вектора, не лежащих ни на одной оси. Наличие вектора M_R , отвечающего за постоянную составляющую, обеспечивается при любом значении N ; наличие вектора M_L – при N , кратном 2, а векторов K – при кратности 4, причем K возникают всегда в паре. Векторы K фильтруются в один этап, при этом значение первой гармоники умножается на $2 \cdot \cos(\varphi_{\text{мин}})$. Векторы M_L и M_R фильтруются в два отдельных этапа, результатом которых служит увеличение первой гармоники в $2 \cdot (\cos(\varphi_{\text{мин}}) \pm 1)$. Векторы N_L изменяют значение первой гармоники в количество раз, равное $2 \cdot (\cos(\varphi_{\text{мин}}) + \cos(180 - \varphi_{\text{мин.Гарм}}))$, а N_R – в $2 \cdot (\cos(\varphi_{\text{мин}}) - \cos(\varphi_{\text{мин.Гарм}}))$ раз. Учтем, что $M_L + M_R + N_L + N_R + 2K = N$. Итоговый результат можно описать формулой

$$\zeta = 2^{\frac{N_L+N_R+M_L+M_R+K-1}{2}} \times \left(\cos\left(\frac{360^\circ}{N}\right) + 1 \right)^{M_R} \times \prod_{i=2}^{N/2} \left[\cos\left(\frac{360^\circ}{N}\right) - \cos\left(\frac{360^\circ}{N} \cdot i\right) \right] \times \left(\overleftarrow{U}_1(\psi_1) + \overleftarrow{U}_{N-1}(\psi_{N-1}) + \overleftarrow{U}_{N+1}(\psi_{N+1}) + \dots \right) \quad (21)$$

В формуле (21) произведение гармоник начинается с индекса 2, поскольку под индексом 1 находится первая гармоника. Векторы M_L, M_R, K могут иметь значения 0 или 1 при наличии или отсутствии гармоник на этих позициях. При $N = 12$ потребовалось 6 этапов фильтрации. В общем случае это значение будет равно $M_L + M_R + K + (N_L + N_R) / 2 - 1$ или же $N / 2$ шагов с округлением вниз при достаточно большом N . При этом каждый этап будет требовать задержки, равной отношению периода основной частоты к N . При минимальном адекватном числе точек на период $N = 3$ определение вектора займет 1/3 от периода основной частоты. При $N = 4$ это время сократится до 1/4 от периода. При увеличении N значительно изменяться будут только N_L и N_R , поэтому значение суммарной задержки будет стремиться к половине периода по следующему соотношению:

$$\Delta T = \frac{1}{f_1} \frac{M_L + M_R + K + \frac{N_L + N_R - 1}{2}}{M_L + M_R + 2K + N_L + N_R} \approx \frac{1}{2f_1} \quad (22)$$

Данный метод можно применять в комбинации с описанными выше, например отфильтровав сначала четные гармоники от нечетных.

Формулу (21) и коэффициенты косинусов в (14)–(20) удобнее изобразить в виде матрицы коэффициентов. Количество коэффициентов равно сумме уникальных гармоник и пар гармоник. Для $N = 12$ парами гармоник и уникальными гармониками являются постоянная составляющая, шестая гармоника, а также гармоники с первой по пятую с их парными гармониками – семь коэффициентов в сумме. Результирующая матрица для $N = 12$ следующая:

$$coef = \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} & k_{04} & k_{05} & 1 \\ 0 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & 1 \\ 0 & 0 & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k_{33} & k_{34} & k_{35} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{44} & k_{45} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{55} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Коэффициенты в (23) расположены следующим образом: в каждой строке указаны коэффициенты для соответствующей частоты (первый индекс 0 – для постоянной составляющей, индекс 1 – для первой и одиннадцатой гармоники, индекс 2 – для второй и десятой

гармоники и т.д.), а в каждом столбце – для соответствующего этапа фильтрации (второй индекс 0 – для первого этапа, индекс 1 – для второго этапа и т.д.). На основной диагонали находятся собственные коэффициенты, являющиеся конечными делителями (делитель в формуле (20)). Они применяются на финальном этапе расчета значений гармоники из сигналов. Остальные коэффициенты нужны для нормировки и устранения уже полученных гармоник в сигнале. Данная структура матрицы оптимизирована для проведения автоматических расчетов с применением процессора.

Для нахождения неизвестных коэффициентов в (23) необходимо воспользоваться следующим выражением:

$$k_{ij} = k_{i[j+1]} \cdot 2(\cos(\varphi_{\text{мин}} \cdot i) - \cos(\varphi_{\text{мин}} \cdot (j+1))), \quad (24)$$

где i, j – номер строки и столбца матрицы соответственно, начиная с нуля (например, k_{55} будет равен удвоенной разнице косинусов 150 и 180 градусов, умноженной на единицу (численное значение коэффициента k_{56})).

Для проведения фильтрации по коэффициентам (23) необходимо поменять порядок этапов в формулах (14)–(20), начиная первый этап с фильтрации центральной гармоники (шестой) с коэффициентом косинуса 180 градусов, уменьшая угол и номер фильтруемой гармоники в следующих этапах, и заканчивая на последнем этапе постоянной составляющей с коэффициентом косинуса 0 градусов. Полученные 6 промежуточных сигналов и исходный сигнал проходят через матрицу коэффициентов в соответствии с рис. 5.

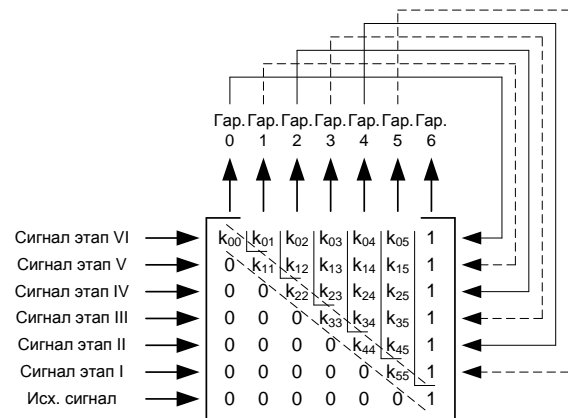


Рис. 5. Получение гармоник из матрицы коэффициентов

Для расчета значений соответствующих гармоник требуется провести 7 этапов разделения сигналов в соответствии с рис. 5. Нулевые коэффициенты ниже и левее основной диагонали показывают, что на данном этапе (в данном столбце) соответствующие промежуточные сигналы не используются. Коэффициенты выше и правее основной диагонали пока-

зывают влияние соответствующей гармоники в сигнале на данном этапе. Вычитая из промежуточного сигнала все полученные гармоники, домноженные на соответствующие коэффициенты, получается увеличенное на основной коэффициент значение гармоники. Расчет гармоники на каждом этапе производится по следующему выражению:

$$\overleftarrow{U}_i = \left(\zeta^{N/2-i} - \sum_{j=0}^{i-1} \left(\overleftarrow{U}_j \cdot k_{ji} \right) \right) / k_{ii}, \quad (25)$$

где ζ – промежуточный сигнал.

В качестве примера можно взять расчет второй гармоники, который производится после расчета первой и нулевой гармоник по следующему выражению:

$$\overleftarrow{U}_2 = \left(\zeta^{N/2-2} - \overleftarrow{U}_1 \cdot k_{12} - \overleftarrow{U}_0 \cdot k_{02} \right) / k_{22}. \quad (26)$$

Расчет последней, шестой гармоники производится с коэффициентами 1, поскольку это единственная на данном этапе гармоника с неизвестным значением в исходном сигнале. Расчет нулевой гармоники (постоянная составляющая, гармоника N) производится в самом начале путем деления последнего промежуточного сигнала на собственный коэффициент k_{00} . Все расчеты по (25) производятся одновременно для момента времени, отстающего от текущей выборки на полпериода. Алгоритмическое описание метода изображено на рис. 6.

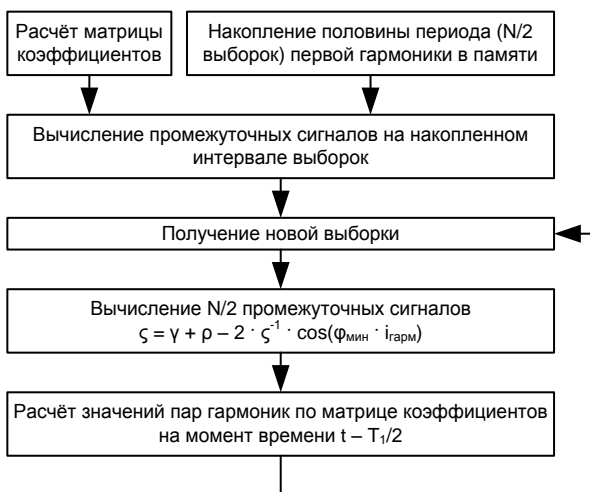


Рис. 6. Алгоритмическое описание метода получения гармоник

Проверка результатов. Проведем проверку второй группы методов на синтетических данных. Выбираем $N = 10$ точек на период, поскольку при таком количестве отсчетов удобнее визуализировать результат. Для первого опыта исследуем сигнал с амплитудой первой гармоники, равной 100 единиц, и высшими гармониками, амплитуда которых уменьшается кратно росту

частоты. Для второго опыта возьмем сигнал, состоящий из первой гармоники и апериодической составляющей с амплитудой, как у первой гармоники, и постоянной времени 0,06 с. Для третьего опыта возьмем сигнал, состоящий из первой гармоники и случайного шума, амплитуда которого не превышает 20 % от амплитуды первой гармоники. Проведем максимально возможное разложение сигнала на гармоники с данными начальными условиями. С учетом выбранного N и возможного количества проекций векторов на ось X (см. рис. 4) сигнал можно разложить на шесть групп гармоник.

Проведем фильтрацию гармоник по выбранным выше условиям и отразим результат графически (рис. 7).

Действительные значения гармоник выведены напрямую из кода, подмешивающего гармоники в сигнал. В случае с апериодической составляющей и шумами они считаются как отдельное возмущающее воздействие и не засчитываются кодом в действительные гармоники. Гармоника 10 ведет себя как постоянная компонента.

Для оценки результатов на рис. 7 приведены действительные значения гармоник, а также результат преобразования Фурье (преобразованный в мгновенное значение). Для исследования поведения предложенного метода в переходных режимах был смоделирован сигнал, который до момента времени 0,02 с и после момента 0,08 с имеет нулевое значение. В переходных режимах алгоритм быстрого преобразования Фурье имеет задержку на накопление данных в один период. В то же время предложенный метод имеет задержку в полпериода, а также отображает начало переходного процесса на полпериода раньше, чем он начинается в действительности. Однако в установившемся режиме исходные гармоники совпадают с предложенным методом фильтрации по сопряженным векторам и с алгоритмом Фурье. Стоит заметить, что в переходных режимах предложенный метод имеет ошибку, сравнимую с ошибкой алгоритма Фурье.

Наличие шумовой компоненты по-разному отображается в предложенном методе и в преобразовании Фурье, однако результаты соизмеримы. Наличие апериодической составляющей приводит к появлению плавно снижающейся составляющей в сигнале гармоник 3, 4, 5 (в моменты времени между 0,04 и 0,06 с в пунктирном сигнале), а также трудно-различимой составляющей в гармониках 1 и 2, полученных по алгоритму Фурье (см. рис. 7,б). В то же время предложенный метод в тех же гармониках демонстрирует результат, практически совпадающий с нулем. Апериодическая составляющая присутствует в этих данных, однако она достаточно мала, чтобы быть учтенной (менее 1 %).

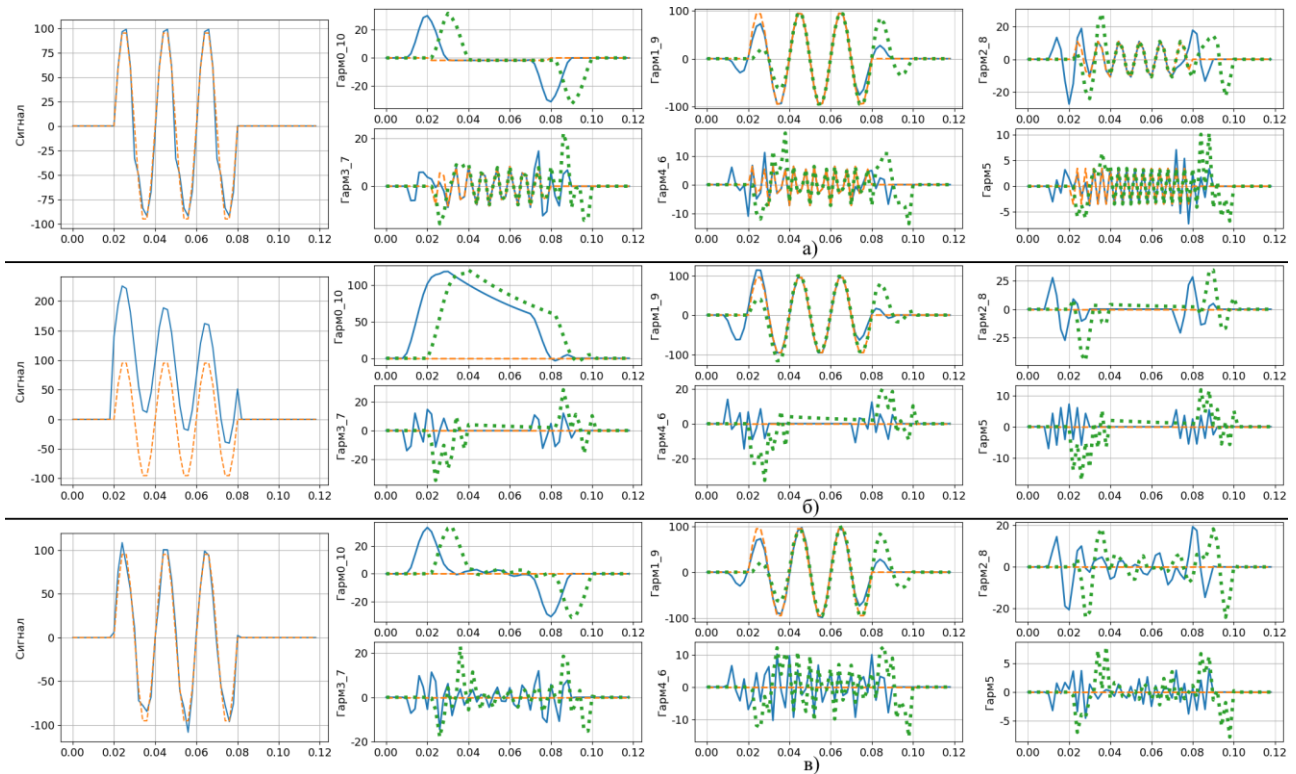


Рис. 7. Результат фильтрации сигнала (пунктирная линия – значение первой гармоники, сплошная линия – сигнал), состоящего: из десяти гармоник (а); первой гармоники с аperiodической составляющей (б); первой гармоники с шумами (в) на ряды Гарм0_10 (0, 10 гармоник), Гарм1_9 (1, 9 гармоник), Гарм2_8 (2, 8 гармоник), Гарм3_7 (3, 7 гармоник), Гарм4_6 (4, 6 гармоник), Гарм5 (5 гармоник) с помощью предложенного метода (сплошная линия), а также действительные значения гармоник (штриховая линия) и результаты преобразования Фурье (пунктирная линия)

Следует также отметить особенность данного метода, не отраженную в результатах на рис. 7. При увеличении количества точек на период могут возникнуть негативные колебательные эффекты, связанные с точностью расчетов (рис. 8).

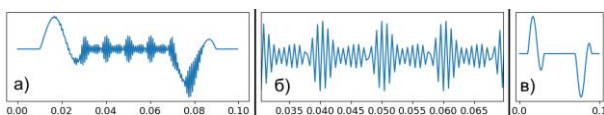


Рис. 8. Негативный эффект, наблюдаемый в сигнале на большом (а) и малом (б) масштабе, а также аналогичный сигнал при меньшем значении N без проявления подобного эффекта (в)

Это связано с тем, что при больших значениях N коэффициенты, полученные по формуле (23), могут отличаться друг от друга на десяток порядков. Решением может стать перевод вычислений в формат с большей точностью, вроде float128, или иная оптимизация расчетов. Одной из оптимизаций является изменение порядка расчета промежуточных сигналов (14)–(19) таким образом, чтобы в них сначала фильтровались гармоники с минимальными углами поворота около значений 0 и 180 градусов (при $N = 12$ это гармоники с номерами 0, 1, 6, 5...), постепенно приближаясь к 90 градусам на финальных этапах. Данная оп-

тимизация позволяет стабильно раскладывать на ряды гармоник сигналы со значением до 150 точек на период, в то время как обычный порядок расчета позволяет обрабатывать сигналы до 50 точек.

Выводы. Предложенный метод разложения сигнала на пары гармоник обладает схожими с преобразованием Фурье свойствами, но не дает возможности производить преобразования мгновенных значений гармоник в векторы. Разложение сигнала по базисам простых чисел также имеет свое применение, хотя и ограниченное, позволяя провести предварительную или неполную фильтрацию сигнала в задачах, где будет достаточно такого результата. Положительной стороной предложенных методов является вариативность разложения сигнала в ряды гармоник. Предложенные методы могут быть применены в терминалах релейной защиты при разработке алгоритмов защит, ориентированных на работу с мгновенными значениями гармоник.

Список литературы

1. Шнеерсон Э.М. Цифровая релейная защита. – М.: Энергоатомиздат, 2007. – 549 с.
2. Куликов А.Л., Петрова В.А., Заикина Н.С. Алгоритмы фильтрации аварийных токов и напряжений в «переменном окне данных» // Электроэнергетика глазами молодежи: труды VI Междунар.

науч.-техн. конф., Иваново, 09–13 ноября 2015 года. Т. 2. – Иваново, 2015. – С. 87–90. – EDN WASPJZ.

3. **Никитин А.А.** Цифровая релейная защита. Основы синтеза измерительной части микропроцессорных реле. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2014. – 240 с.

4. **Реализация** цифровых фильтров в микропроцессорных устройствах релейной защиты / Ю.В. Румянцев, Ф.А. Романюк, В.Ю. Румянцев, И.В. Новаш // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. – 2016. – Т. 59, № 5. – С. 397–417. DOI: 10.21122/1029-7448-2016-59-5-397-417. – EDN WWCRLF.

5. **Phadke A.G., Thorp J.S.** Computer Relaying for Power Systems. – 2 ed. – JohnWiley & Sons Inc, West Sussex, UK, 2009.

6. **Honorato T.R., Silva K.M.** Half-Cycle DFT-Based Phasor Estimation Algorithm for Numerical Digital Relaying // 2018 Workshop on Communication Networks and Power Systems (WCNPS). – Brasilia, Brazil, 2018. – P. 1–4. DOI: 10.1109/WCNPS.2018.8604396.

7. **Rosolowski E., Izykowski E., Kasztenny B.** New half-cycle adaptive phasor estimator immune to the decaying DC component for digital protective relaying // Proceedings of the 32nd Annual North American Power Symposium. – Waterloo, Canada, 2000.

8. **Revyakin V.A., Pletnev S.V., Klimova T.G.** Using the Fourier Transform of the Half-Cycle to Enhance the Application of the PMU // 2020 3rd International Youth Scientific and Technical Conference on Relay Protection and Automation (RPA). – M., 2020. – P. 1–14. DOI: 10.1109/RPA51116.2020.9301744.

9. **Лебедев В.Д., Григорьев Д.Г.** Разработка и исследование подхода к обработке сигналов цифровых измерительных трансформаторов тока и напряжения // Вестник ИГЭУ. – 2024. – Вып. 2. – С. 32–48. DOI: 10.17588/2072-2672.2024.2.032-048.

10. **Григорьев Д.Г.** Тригонометрическая цифровая фильтрация гармоник // Материалы XX Всерос. (XII Междунар.) науч.-техн. конф. студ., асп. и молодых ученых «Энергия-2025». В 6 т. Т. 3. – Иваново, 2025. – 117 с.

References

1. Shneerson, E.M. *Tsifrovaya reley'naya zashchita* [Digital Relaying]. Moscow: Energoatomizdat, 2007. 549 p.

2. Kulikov, A.L., Petrova, V.A., Zaikina, N.S. Algoritmy fil'tratsii aviarynykh tokov i napryazheniy v «peremennom okne dannyykh» [Algorithms for filtering fault currents and voltages in a “variable data window”]. *Trudy VI Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Elektroenergetika glazami molodezhi», Ivanovo, 09–13 noyabrya 2015 goda. T. 2* [Proceedings of the 6th Interna-

tional Scientific and Technical Conference “Electric Power Industry Through the Eyes of Youth”, Ivanovo, 09–13 November 2015. Vol. 2]. Ivanovo, 2015, pp. 87–90. EDN WASPJZ.

3. Nikitin, A.A. *Tsifrovaya reley'naya zashchita. Osnovy sinteza izmeritel'noy chasti mikroprotsessornykh rele* [Digital relaying. Fundamentals of Synthesis of the Measuring Part of Microprocessor Relays]. Cheboksary: Izdatel'stvo Chuvashskogo universiteta, 2014. 240 p.

4. Rumyantsev, Yu.V., Romanyuk, F.A., Rumyantsev, V.Yu., Novash, I.V. Realizatsiya tsifrovyykh fil'trov v mikroprotsessornykh ustroystvakh reley'noy zashchity [Implementation of digital filters in microprocessor-based relay protection devices]. *Energetika. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy i energeticheskikh ob'edineniy SNG*, 2016, vol. 59, no. 5, pp. 397–417. DOI: 10.21122/1029-7448-2016-59-5-397-417. EDN WWCRLF.

5. Phadke, A.G., Thorp, J.S. Computer Relaying for Power Systems. JohnWiley & Sons Inc. West Sussex, UK, 2009.

6. Honorato, T.R., Silva, K.M. Half-Cycle DFT-Based Phasor Estimation Algorithm for Numerical Digital Relaying. 2018 Workshop on Communication Networks and Power Systems (WCNPS). Brasilia, Brazil, 2018, pp. 1–4. DOI: 10.1109/WCNPS.2018.8604396.

7. Rosolowski, E., Izykowski, E., Kasztenny, B. New half-cycle adaptive phasor estimator immune to the decaying DC component for digital protective relaying. Proceedings of the 32nd Annual North American Power Symposium. Waterloo, Canada, 2000.

8. Revyakin, V.A., Pletnev, S.V., Klimova, T.G. Using the Fourier Transform of the Half-Cycle to Enhance the Application of the PMU. 2020 3rd International Youth Scientific and Technical Conference on Relay Protection and Automation (RPA). Moscow, 2020, pp. 1–14. DOI: 10.1109/RPA51116.2020.9301744.

9. Lebedev, V.D., Grigor'ev, D.G. Razrabotka i issledovanie podkhoda k obrabotke signalov tsifrovyykh izmeritel'nykh transformatorov toka i napryazheniya [Development and research of an approach to signal processing of digital instrument current and voltage transformers]. *Vestnik IGEU*, 2024, issue 2, pp. 32–48. DOI: 10.17588/2072-2672.2024.2.032-048.

10. Grigor'ev, D.G. Trigonometricheskaya tsifrovaya fil'tratsiya garmonik [Trigonometric digital harmonic filtering]. *Materialy XX Vserossiyskoy (XII Mezhdunarodnoy) nauchno-tekhnicheskoy konferentsii studentov, aspirantov i molodykh uchenykh «Energiya-2025»* [Proceedings of the Twentieth All-Russian (Twelfth International) Scientific and Technical Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists “Energy-2025”]. Ivanovo, 2025, vol. 3. 117 p.