

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕХНИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

УДК 621.165

Владимир Павлович Жуков

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45, e-mail: zhukov-home@yandex.ru

Дмитрий Сергеевич Бараковских

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», кандидат технических наук, доцент кафедры оборудования и автоматизации силикатных производств, Россия, Екатеринбург, e-mail: d.s.barakovskikh@urfu.ru

Антон Николаевич Беляков

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45, e-mail: ab_pm@mail.ru

Илья Дмитриевич Аксаковский

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», аспирант кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45, e-mail: aksil1703@gmail.com

Матричное моделирование и решение обратной задачи замкнутого цикла измельчения со струйной мельницей

Авторское резюме

Состояние вопроса. Измельчение порошков в струйных мельницах позволяет получать чистые продукты для химической и фармацевтической отраслей промышленности. Для обеспечения требований к гранулометрическому составу готового порошка необходимо организовать работу мельницы в замкнутом цикле с классификатором для выделения готовых наработанных фракций, не допуская их переизмельчения. В связи с этим разработана адекватная математическая модель и методов диагностики замкнутых циклов струйного измельчения, которые позволяют ставить и решать задачи проектирования и диагностики состояния таких систем, является актуальной научной и практической задачей.

Материалы и методы. Для моделирования замкнутых циклов измельчения, постановки и решения обратных задач диагностики использована матричная методология описания процесса измельчения, классификации и замкнутых циклов измельчения. Идентификация модели измельчения выполнена по результатам специально проведенных экспериментальных исследований.

Результаты. Разработана математическая модель замкнутого цикла струйного измельчения с произвольной структурой связей между элементами. С использованием полученных экспериментальных данных проведена идентификация матричной модели струйного измельчения. В рамках представленной модели предложен подход к постановке и решению задач диагностики и проектирования систем струйного измельчения для эффективной наработки порошков с заданными характеристиками.

Выводы. Полученные результаты могут быть использованы при разработке и реализации новых оптимальных технологий струйного измельчения в целях получения особо чистых продуктов и диагностики состояния закрытых циклов измельчения.

Ключевые слова: струйная мельница, замкнутый цикл струйного измельчения, гранулометрический состав продукта, дисперсные материалы, матричная формализация, обратная задача

Vladimir Pavlovich Zhukov

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences (Postdoctoral degree), Professor of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45, e-mail: zhukov-home@yandex.ru

Dmitry Sergeevich Barakovskikh

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Candidate of Engineering Sciences, (PhD), Associate Professor of Equipment and Automation of Silicate Production Department, Russia, Ekaterinburg, e-mail: d.s.barakovskikh@urfu.ru

Anton Nikolaevich Belyakov

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Technical Sciences, (Post-doctoral degree), Head of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45, e-mail: ab_pm@mail.ru

Ilya Dmitrievich Aksakovsky

Ivanovo State Power Engineering University, Postgraduate Student of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45, e-mail: aksil1703@gmail.com

Matrix modeling and solution of the inverse problem of grinding in a closed loop with a jet mill

Abstract

Background. Powder grinding in jet mills allows obtaining pure powders for the chemical and pharmaceutical industries. To meet the required particle size distribution of the finished powder, it is necessary to operate the mill in a closed circuit with a classifier to separate the produced fractions, preventing their overgrinding. Thus, the development of adequate mathematical models and diagnostic methods of closed-loop jet grinding, which enable the formulation and solution of design and diagnostic problems for such systems is a pressing scientific and practical challenge.

Materials and methods. To model closed grinding cycles, formulate and solve inverse diagnostic problems, a matrix methodology to describe grinding, classifying, and closed grinding cycles has been used. The grinding model has been identified based on the results of specially conducted experimental studies.

Results. A mathematical model of a closed-loop jet milling system with an arbitrary structure of connections between elements has been developed. A matrix model of jet milling has been identified using the obtained experimental data. Within the framework of the presented model, the authors have proposed an approach to define and solve problems in the diagnostics and design of jet milling systems for efficient production of powders with specified characteristics.

Conclusions. The obtained results allow us to propose an approach to the development and implementation of new optimal jet grinding technologies to obtain highly pure products and diagnose the state of closed grinding cycles.

Key words: jet mill, grinding, closed-loop of jet grinding, granulometric composition, matrix formalization, inverse problem

DOI: 10.17588/2072-2672.2026.3.089-095

Введение. Замкнутые циклы измельчения со струйными мельницами используются в фармацевтической, химической, металлургической, пищевой и других отраслях промышленности для получения ультрадисперсных и особо чистых порошков (например, металлических порошков, керамических материалов, фармацевтических субстанций, минеральных наполнителей) [1–7]. При проектировании таких систем учитываются свойства материала (твердость, абразивность, термочувствительность), требуемая тонкость помола, производительность и другие параметры.

Ранее разработано математическое описание процесса измельчения дисперсного материала при однократном и многократном

нагрузении в струйной мельнице, работающей в открытом цикле [8]. В целях повышения эффективности работы и получения узких фракций материалов организуется работа струйной мельницы в замкнутом цикле с установкой после мельницы классификаторов материала по крупности для удаления из цикла частиц, достигших требуемого по технологическим характеристикам размера. Выделенные в классификаторе частицы требуемого размера выводятся из цикла, а крупные частицы направляются на повторное измельчение. При такой организации процесса не допускается переизмельчение частиц и, соответственно, сокращается расход энергии на их разрушение. Кроме того, измельчение частиц до размера, менее требуемого по

технологическим условиям, может приводить к снижению качества готового порошка [1, 2]. Решение этой проблемы актуально при работе, например, шлифовальных порошков или красящих пигментов [2, 7], когда крупность частиц и ширина фракции существенно влияют на качество готового продукта.

Материалы и методы. Объектом исследования является технология струйного измельчения материала. Предмет исследования – матричная модель и метод расчета струйной мельницы, работающей в замкнутом цикле измельчения.

Целью исследования является совершенствование процесса измельчения сыпучих материалов в струйной мельнице, работающей в замкнутом цикле.

Для достижения цели исследования последовательно решаются следующие задачи:

- разработка матричной модели мельницы, классификатора и замкнутого цикла измельчения произвольной структуры со струйной мельницей;
- проведение идентификации и проверки адекватности разработанной модели;
- постановка обратной задачи диагностики и проектирования замкнутого цикла измельчения в рамках разработанной модели.

Ранее нами предложена матричная модель измельчения в струйной мельнице, работающей в открытом цикле без классификатора [8]. Развитие использованного матричного подхода предполагает моделирование классификатора частиц по крупности и описание процесса измельчения в замкнутом цикле измельчения.

Рассмотрим моделирование замкнутого цикла измельчения на примере установки, схема которой представлена на рис. 1,а. Измельчаемый материал из бункера 1 питателем 2 через приемный бункер 3, заслонку 4, ресивер 5 подается в струйную мельницу 7. Сжатым воздухом через сопло 8 материал разгоняется в разгонной трубе 9 и измельчается в камере помола 10 посредством удара частиц о преграду 11. Продукты разрушения подаются для разделения по крупности сначала в проходной 12, а затем для более четкого разделения в центробежный классификатор 14. Тонкие продукты отделяются от воздуха в циклонах 15, 16. Воздух для более качественной очистки направляется после циклонов в фильтр 19. Грубые (крупные) частицы разделения после классификаторов подаются на доизмельчение в мельницу. Таким образом организуется замкнутый цикл измельчения материала.

На расчетной схеме замкнутого цикла измельчения со струйной мельницей (рис. 1,б) прямоугольником B_1 показана струйная мельница, треугольниками с одним входным и двумя выходными потоками C_2-C_5 изображены классификаторы и циклоны. Бункеры готовых порошков показаны кружками C_6-C_8 . Индексы у буквенных

обозначений соответствуют номерам элементов в разрабатываемой математической модели.

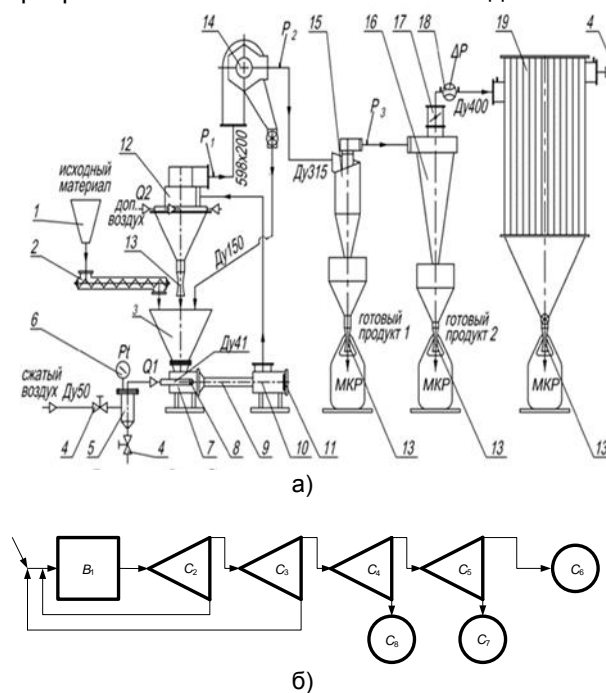


Рис. 1. Схема замкнутого цикла измельчения (а) и расчетная схема потоков материала в замкнутом цикле со струйной мельницей (б): 1 – бункер исходного материала; 2 – питатель; 3 – приемный бункер; 4 – заслонка сжатого воздуха; 5 – ресивер; 6 – манометр; 7 – струйная мельница; 8 – сопло; 9 – разгонная трубка; 10 – камера помола; 11 – преграда; 12 – проходной классификатор; 13 – клапан; 14 – центробежный классификатор; 15, 16 – циклоны; 17 – заслонка; 18 – расходомер; 19 – фильтр

Разработка матричной модели измельчения в струйной мельнице подробно рассматривается в [8], основные положения и расчетные формулы для построения замкнутого описания цикла измельчения приводятся ниже. Измельчение с заданным подводом энергии может быть описано в рамках матричной модели [1, 8, 9]

$$F'' = P \times F', \quad (1)$$

где F' , F'' – векторы гранулометрического состава порошка до и после измельчения соответственно; $P = \{p_{ij}\}$ – матрица измельчения, элементы которой могут быть выражены через селективную и распределительную функции [1, 9] следующим образом:

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j, \\ 1 - S_j, & i = j, \\ S_j b_{ji}, & i > j. \end{cases} \quad (2)$$

Селективная функция измельчения определяет вероятность разрушения частиц [1, 8] наблюдаемого размера δ :

$$S_j = \alpha \delta_j^k, \quad (3)$$

где α – коэффициент пропорциональности; значение показателя степени $k = 1$ соответствует закону измельчения Риттингера, $k = 0,5$ – закону Бонда, $k = 0$ – закону Кика [9].

Распределительная функция b_{ji} характеризует распределение продуктов разрушения по фракциям и выбирается линейной [1].

При известном подводе энергии коэффициент пропорциональности селективной функции определяется согласно [8, 9]:

$$\alpha_j = \alpha_j^0 \frac{E_j}{E_j^0}, \quad (4)$$

где верхний индекс «0» относится к значению параметра в базовом режиме.

Процесс измельчения в струйной мельнице в рамках матричной модели подробно описан в [8]. Матричная модель процесса показала адекватное описание гранулометрического состава порошка после 1, 2, 3, 4, 5 актов измельчения [8].

Для получения продукта заданного гранулометрического состава струйные мельницы часто работают в замкнутых циклах измельчения, поэтому математическое описание этого процесса в цикле является актуальной задачей исследования. Для ее решения сначала остановимся более подробно на моделировании процесса классификации частиц по крупности.

Для моделирования процесса классификации в сепараторах часто используется аппроксимация Плита [10], которая является одним из распространенных методов описания кривой фракционного разделения сыпучих материалов:

$$\varphi(\delta) = \frac{1}{1 + (\delta / \delta_g)^{k_s}}, \quad (5)$$

где $\varphi(\delta)$ – доля частиц размера δ попадающих в мелкий продукт классификации; δ – размер частицы; δ_g и k_s – параметры, определяемые экспериментально.

Основной параметр аппроксимации Плита – граничный размер разделения δ_g , для которого вероятность попадания в мелкий и крупный продукт равна 0,5; т.е. $\varphi(\delta_g) = 0,5$. Параметр эффективности k_s характеризует остроту разделения и часто выражается через отношение характерных размеров: $k_s = \delta_{25} / \delta_{75}$, где δ_{75} – размер, при котором 75 % материала уходит в мелкий продукт; δ_{25} – размер, при котором 25 % материала уходит в мелкий продукт. Большие значения k_s указывают на размытость границы разделения, а чем ближе k_s к 1, тем кривая разделение круче.

Основные расчетные формулы процесса классификации в матричном виде записываются следующим образом [1, 8]:

$$\begin{aligned} f_2 &= (\mathbf{I} - \mathbf{C}) \times f', \\ f_3 &= \mathbf{C} \times f', \end{aligned} \quad (6)$$

где f_2, f_3 – векторы гранулометрических составов крупного и мелкого продуктов классификации соответственно; \mathbf{I} – единичная матрица; f' – вектор исходной крупности порошка перед классификацией; \mathbf{C} – диагональная матрица классификации:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{mm} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где m – число анализируемых фракций.

В процессе классификации проверяется размер зерен и осуществляется разделение входного потока на два выходных потока по признаку «мелкие–крупные». Качество контроля тем выше, чем меньше частиц попадают не в свой продукт. Для описания процесса классификации пользуются диагональной матрицей кривой разделения \mathbf{C} , значения элементов которой c_{ij} показывают вероятность прохождения в мелкий продукт частиц i -го класса крупности. Очевидно, что для частиц с разными размерами эти вероятности будут различаться. В предлагаемом подходе элементы матрицы классификации определяются на основании аппроксимации (5).

Матричная математическая модель всей технологической системы измельчения (ТСИ), которая состоит из нескольких модулей классификации и измельчения (рис. 1,б) записывается в следующем виде [11]:

$$\mathbf{K} \times \mathbf{F} = -\mathbf{F}_0, \quad (8)$$

где \mathbf{K} – матрица, описывающая структуру системы измельчения и характеристики ее элементов; \mathbf{F}_0 – гранулометрические составы порошков внешних потоков ТСИ; \mathbf{F} – гранулометрические составы порошков внутренних потоков.

Матрица \mathbf{K} может быть построена на основе универсального алгоритма для схем, содержащих мельницы, классификаторы, узлы подвода сырья и вывода готового продукта. Алгоритм с учетом специфики представленных процессов сводится к следующим правилам построения матрицы \mathbf{K} [11].

1. Матрица \mathbf{K} – квадратная блочная матрица размером $n \times n$ блоков или $(mn) \times (nm)$ элементов, на главной диагонали которой размещены единичные матрицы со знаком минус.

2. Каждый столбец матрицы соответствует элементу технологической системы измельчения.

3. Если рассматриваемый элемент – мельница, то в ее столбце размещается нижняя треугольная матрица измельчения \mathbf{P} в строке с номером, соответствующим номеру элемента, в который подают материал из этой мельницы. Все остальные элементы столбца – нулевые.

4. Если рассматриваемый элемент – двухпродуктовый классификатор, то в его столбце

размещаются диагональная матрица классификации **C** (в строке, соответствующей элементу, в который подают мелкий продукт классификации) и матрица **I-C** (в строке, соответствующей элементу, в который подают крупный продукт). Все остальные элементы столбца – нулевые.

5. Если материал из какого-либо элемента полностью покидает ТСИ, то матрица схемы не содержит матрицы этого элемента.

6. В матричном уравнении (8) векторы гранулометрических составов сырья f_{0i} размещаются в строках блочной матрицы **F0**, соответствующих номерам элементов, в которые подается сырье. Если в i -й элемент сырье не подается, то в i -й строке матрицы **F0** размещается нулевой вектор.

Для ТСИ со струйной мельницей (рис. 1,б) матрица **K**, согласно представленным выше правилам, записывается в следующем виде:

$$K = \begin{bmatrix} -I & I-C_2 & I-C_3 & O & O & O & O & O \\ P_1 & -I & O & O & O & O & O & O \\ O & C_2 & -I & O & O & O & O & O \\ O & O & C_3 & -I & O & O & O & O \\ O & O & O & C_4 & -I & O & O & O \\ O & O & O & O & C_5 & -I & O & O \\ O & O & O & O & I-C_5 & O & -I & O \\ O & O & O & I-C_4 & O & O & O & -I \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где **O** – нулевая матрица размера $m \times m$.

Известный вид матрицы **K** позволяет решить систему (8) и вычислить гранулометрические составы продуктов на входе во все элементы ТСИ. Решение системы (8) методом обращения матриц [12] получено в виде

$$F = -K^{-1} \times F0,$$

где операция возведения в степень (-1) соответствует обращению матрицы.

В рамках разработанной модели (8) проведены тестовые расчеты ТСИ, представленной на рис. 1. Результаты расчетов гранулометрических составов готовых продуктов первого и второго циклонов и на входе в фильтр представлены на рис. 2 в виде зависимости проходов D через контрольные сита от размера сита. Номера контрольных классов порошка i соответствуют размерам фракции, приведенным в таблице.

Соответствие номера фракций в модели размеру зерен фракции

Номер фракции, i	Размер зерен, δ , мкм
1	0–63
2	63–100
3	100–160
4	160–200
5	200–315
6	315–400
7	400–500
8	500–630
9	630–800
10	800–1000

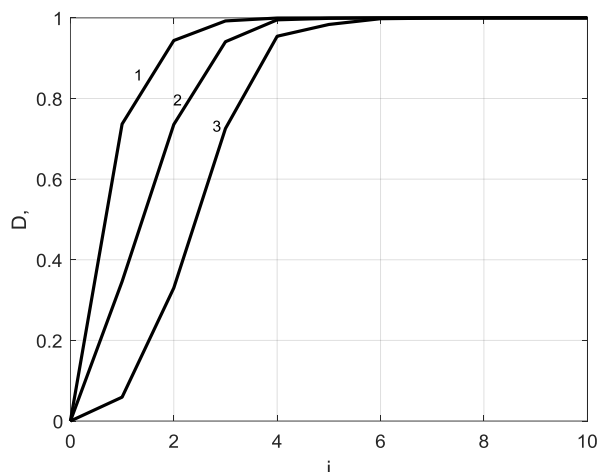


Рис. 2. Расчетные гранулометрические составы порошков готовых продуктов на выходе первого (3), второго (2) циклонов и на входе в фильтр (1) для ТСИ, представленной на рис. 1

Разработанная математическая модель ТСИ (8)–(9) позволяет перейти к постановке и решению обратных и оптимизационных задач, а также задач диагностики состояния оборудования. В контексте математического моделирования принципиальное значение имеет четкое разграничение прямых и обратных задач. Под прямыми задачами в общем случае [13] понимаются задачи, для которых заданы причины, а искомыми величинами являются следствия. Обратными будут задачи, в которых известны следствия, а неизвестными выступают причины. Обратная задача – это, как правило, задача проектирования или диагностики состояния системы, когда по заданным входным и выходным параметрам проектируется или диагностируется состояние системы, которая может такие преобразования параметров реализовать.

Результаты исследования. Для демонстрации возможностей предложенного подхода рассматриваются несколько примеров постановки и решения обратных задач измельчения материала в замкнутых циклах со сложной структурой связей между элементами на примере схемы рис. 1,б.

Задача 1. В рамках первого примера рассматривается задача максимальной наработки продукта на выходе первого циклона (см. рис. 1, C_3). В качестве управляющих параметров модели выбираются граничные размеры разделения в классификаторах и циклонах. Если для практического управления граничными размерами разделения в классификаторах существуют специальные устройства изменения угла установки направляющих лопаток, то граничные размеры разделения в циклонах могут изменяться конструктивно, например выбором диаметра цилиндрической части циклона [14]. Математическая формулировка многопараметрической оптимизационной задачи записывается в виде

$$F1 = \sum_i f'_{8i} \Rightarrow \max_{\delta_{g2}\delta_{g13}\delta_{g4}\delta_{g5}}, \quad (10)$$

где f'_{8i} – выход из первого циклона i -й фракции, подаваемой на вход элемента схемы 8 или в бункер первого циклона (суммирование выполняется по фракциям порошка).

Значение целевой функции F1 в данном случае показывает долю производительности продукта первого циклона от общей производительности по исходному продукту, подаваемому в установку. Четырехпараметрическая оптимизационная задача (10) решается методом стохастического программирования [15]. На рис. 3,а приведено решение этой задачи в виде зависимости целевой функции оптимизации от граничного размера разделения в первом циклоне. Согласно приведенным данным, для получения максимального значения целевой функции значение граничного размера циклона должно выбираться минимальным.

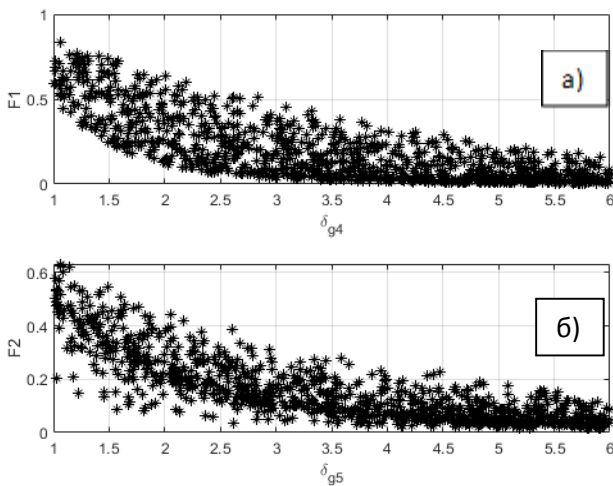


Рис. 3. Зависимость относительной производительности циклона от граничного размера разделения: а – первого циклона; б – второго циклона

Задача 2. В качестве второго примера постановки обратной задачи рассматривается максимальная наработка продукта второго циклона ТСИ, представленной на рис. 1:

$$F2 = \sum_i f'_{7i} \Rightarrow \max_{\delta_{g2}\delta_{g13}\delta_{g4}\delta_{g5}}. \quad (11)$$

В данном случае постановка задачи во многом совпадает с постановкой задачи в первом примере, но ищется максимальная производительность продукта в бункере второго циклона. Решение этой задачи представлено на рис. 3,б, где приведена зависимость целевой функции оптимизации от граничного размера разделения во втором циклоне. В данном случае результаты аналогичны результатам первого примера, но абсолютные значения целевой функции получаются меньше, так как часть продукта отбирается в первом циклоне. Такая постановка характерна для случая получения

порошка узкой фракции: первый циклон выделяет более крупные частицы, а второй отделяет искомого фракцию.

Задача 3. В качестве третьей и наиболее интересной постановки задачи рассматривается задача максимальной наработки продуктов одновременно в первом и втором циклонах. Такая постановка актуальна в том случае, когда первый и второй циклоны обеспечивают получение товарных порошков с разными гранулометрическими составами. Соответственно, эти порошки могут обладать разной ценностью или требоваться в разном количестве, что также следует учитывать при постановке задачи. В данном случае при двух целевых функциях оптимизации задача относится к многокритериальным и многопараметрическим:

$$\begin{cases} F1 = \sum_i f'_{8i} \Rightarrow \max_{\delta_{g2}\delta_{g13}\delta_{g4}\delta_{g5}}, \\ F2 = \sum_i f'_{7i} \Rightarrow \max_{\delta_{g2}\delta_{g13}\delta_{g4}\delta_{g5}}. \end{cases} \quad (12)$$

Для решения многокритериальных задач представленные критерии (12) можно свернуть в один мультипликативный или аддитивный критерий, заменяя два критерия на их произведение или сумму. Решение многокритериальной задачи можно также представить в виде множества Парето [16]. Множество Парето представляет собой совокупность решений, которые не могут быть улучшены сразу по двум выбранным критериям. Решение рассматриваемой задачи в виде множества Парето представлено на рис. 4, где это множество показано огибающей областью решений сплошной линией, каждая точка которой принадлежит указанному множеству. Каждой точке на графике соответствует известный набор характеристик классификаторов и циклонов, которые обеспечивают данное решение многокритериальной и многопараметрической задачи.

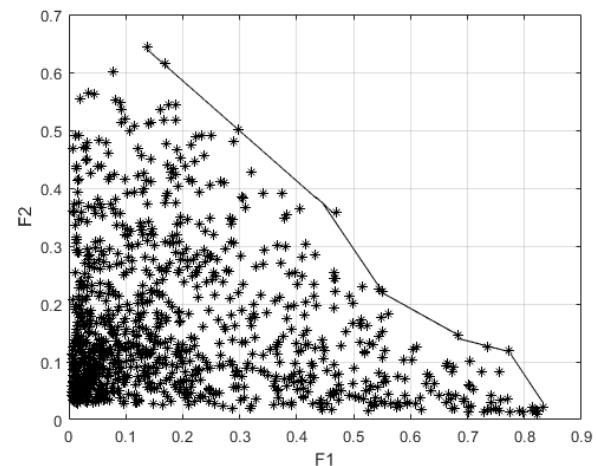


Рис. 4. Решение многокритериальной задачи (12) в виде множества Парето. Зависимость наработки второго целевого продукта от наработки первого целевого продукта

Разработанная модель описывает процесс измельчения для мельницы, работающей в замкнутом цикле, и позволяет ставить и решать задачи диагностики и проектирования систем измельчения со струйными мельницами. Дальнейшее развитие исследований технологии струйного измельчения предполагает включение нескольких мельниц и классификаторов в замкнутый цикл измельчения в целях получения заданного количества продуктов с требуемыми характеристиками.

Выводы. В результате проведенных расчетов и экспериментальных исследований процесса измельчения порошков в ТСИ со струйной мельницей получено его адекватное описание, что позволяет перейти к моделированию замкнутых циклов процесса измельчения и успешному решению обратных задач диагностики и проектирования данных установок.

Список литературы

1. Mizonov V., Zhukov V., Bernotat S. Simulation of Grinding: New approaches. – Ivanovo, 1997. – 108 p.
2. Сиденко П.М. Измельчение в химической промышленности. – М.: Химия, 1977. – 368 с.
3. A simulation model for an air-swept ball mill grinding coal / L.G. Austin, P.T. Luckie, K. Shoji, et al. // Powder Technology. – 1984. – Vol. 38, Issue 3. – P. 255–266.
4. Андреев С.Е., Петров В.А., Зверевич В.А. Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых. – М.: Недра, 1980. – 416 с.
5. Ревнивцев В.И. Селективное разрушение минералов. – М.: Недра, 1988. – 286 с.
6. Андреев С.Е., Товаров В.В., Петров В.А. Закономерности измельчения и исчисления характеристик гранулометрического состава. – М.: Metallurgizdat, 1959. – 437 с.
7. Расчетно-экспериментальное исследование процесса измельчения материала в струйной мельнице / В.Е. Мизонов, В.П. Жуков, Н. Отвинновски и др. // Изв. вузов. Химия и химическая технология. – 2002. – Т. 45, № 4. – С. 157–159.
8. Расчетно-экспериментальное исследование и идентификация матричной модели струйного измельчения сыпучих материалов / В.П. Жуков, Д.С. Бараковских, А.Н. Беляков и др. // Вестник ИГЭУ. – 2024. – Вып. 5. – С. 75–81.
9. Мизонов В.Е. О структуре селективной функции при различных законах измельчения // Цветные металлы. – 1983. – № 11. – С. 73–74.
10. Шувалов С.И., Новосельцева С.С., Жуков В.П. Обоснование выбора зависимости, используемой для аппроксимации кривой разделения Тромпа // Вестник ИГЭУ. – 2018. – Вып. 6. – С. 15–23.
11. Жуков В.П., Беляков А.Н., Барочкин А.Е. Матричное моделирование технологических систем. – Иваново, 2020. – 88 с.
12. Власов В.Г. Конспект лекций по высшей математике. – М.: АЙРИС, 1996. – 288 с.
13. Самарский А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.
14. Залогин Н.Г., Шухер С.М. Очистка дымовых газов. – М.: Изд-во ГЭИ, 1954. – 224 с.
15. Ермолаев Ю.М. Методы стохастического программирования. – М.: Наука, 1976. – 240 с.
16. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

References

1. Mizonov, V., Zhukov, V., Bernotat, S. Simulation of Grinding: New approaches. Ivanovo, 1997. 108 p.
2. Sidenko, P.M. *Izmel'chenie v khimicheskoy promyshlennosti* [Grinding in the chemical industry]. Moscow: Khimiya, 1977. 368 p.
3. Austin, L.G., Luckie, P.T., Shoji, K., Rogers, R.S.C., Brame, K. A simulation model for an air-swept ball mill grinding coal. *Powder Technology*, 1984, vol. 3, issue 3, pp. 255–266.
4. Andreev, S.E., Petrov, V.A., Zverevich, V.A. *Droblenie, izmel'chenie i grokhochenie poleznykh iskopayemykh* [Crushing, grinding and screening of minerals]. Moscow: Nedra, 1980. 416 p.
5. Revnivitsev, V.I. *Selektivnoe razrushenie mineralov* [Selective destruction of minerals]. Moscow: Nedra, 1988. 286 p.
6. Andreev, S.E., Tovarov, V.V., Petrov, V.A. *Zakonomernosti izmel'cheniya i ischisleniya kharakteristik granulometricheskogo sostava* [Regularities of grinding and calculation of characteristics of granulometric composition]. Moscow: Metallurgizdat, 1959. 437 p.
7. Mizonov, V.E., Zhukov, V.P., Otwinnowski, H. Raschetno-eksperimental'noe issledovanie protsessa izmel'cheniya materiala v struynoy mel'nitse [Calculation and experimental study of the process of grinding material in a jet mill]. *Izvestiya vuzov. Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya*, 2002, vol. 45, no. 4, pp. 157–159.
8. Zhukov, V.P., Barakovskikh, D.S., Belyakov, A.N., Aksakovskiy, I.D., Tyutyukin, I.Yu. Raschetno-eksperimental'noe issledovanie i identifikatsiya matrichnoy modeli struynogo izmel'cheniya sypuchikh materialov [Calculation and experimental study and identification of the matrix model of jet grinding of bulk materials]. *Vestnik IGEU*, 2024, issue 5, pp. 75–81.
9. Mizonov, V.E. O strukture selektivnoy funktsii pri razlichnykh zakonakh izmel'cheniya [On the structure of the selective function under various laws of grinding]. *Tsvetnye metally*, 1983, no. 11, pp. 73–74.
10. Shuvalov, S.I., Novosel'tseva, S.S., Zhukov, V.P. Obosnovanie vybora zavisimosti, ispol'zuemoy dlya approksimatsii krivoy razdeleniya Trompa [Justification of the choice of the dependence used to approximate the Tromp separation curve]. *Vestnik IGEU*, 2018, issue 6, pp. 15–23.
11. Zhukov, V.P., Belyakov, A.N., Barochkin, A.E. *Matematicheskoe modelirovanie tekhnologicheskikh sistem* [Mathematical modeling of technological systems]. Ivanovo, 2020. 88 p.
12. Vlasov, V.G. *Konspekt lektsiy po vysshey matematike* [Lecture notes on higher mathematics.]. Moscow: AYRIS, 1996. 288 p.
13. Samarskiy, A.A. *Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* [Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics]. Moscow: Izdatel'stvo LKI, 2009. 480 p.
14. Zalogin, N.G., Shukher, S.M. *Ochistka dymovykh gazov* [Flue gas cleaning.]. Moscow: Izdatel'stvo GEI, 1954. 224 p.
15. Ermolaev, Yu.M. *Metody stokhasticheskogo programmirovaniya* [Methods of stochastic programming]. Moscow: Nauka, 1976. 240 p.
16. Moiseev, N.N. *Matematicheskie zadachi sistemnogo analiza* [Mathematical problems of systems analysis]. Moscow: Nauka, 1981. 488 p.