

УДК 517.912:621.65.05

Владимир Аркадьевич Наумов

ФГБОУВО «Калининградский государственный технический университет», доктор технических наук, заведующий кафедрой водных ресурсов и водопользования, Россия, Калининград, e-mail: van-old@mail.ru

Анализ нестационарной математической модели простой гидравлической сети с центробежным насосом

Авторское резюме

Состояние вопроса. Простые гидравлические сети с центробежным насосом не только являются частью сложных сетей, но и широко применяются в автономных системах водоснабжения и канализации. Математическая модель простых сетей с учетом переменного уровня жидкости в резервуарах включает известное уравнение Бернулли для нестационарных течений. Опубликованные по данной проблеме работы не учитывают нестационарный характер течения из-за переменного уровня жидкости. Условия использования квазистационарной модели не обсуждаются. Не найдены критерии подобия задачи. В связи с этим целью исследования является анализ нестационарной математической модели объекта, включая определение критериев подобия задачи и их влияния на решение.

Материалы и методы. В качестве математической модели простой гидравлической сети использованы известные уравнения: баланса количества жидкости и Бернулли для нестационарных течений с плавно изменяющимися характеристиками. Напорная характеристика центробежного насоса аппроксимирована хорошо зарекомендовавшей себя в предыдущих исследованиях зависимостью в виде квадратного трехчлена. Система дифференциальных уравнений приведена к безразмерной форме. Для решения поставленной задачи использованы аналитические и численные методы.

Результаты. Проведен анализ математической модели перекачивания жидкости центробежным насосом в простой гидравлической сети с учетом переменного уровня жидкости. С использованием безразмерной формы системы уравнений определены три критерия подобия задачи, в том числе аналог числа Струхала Str . В квазистационарной постановке ($Str = 0$) найдено аналитическое решение задачи Коши. Решение задачи в полной постановке получено численным методом. Приведены результаты исследования влияния критериев подобия на решение. Установлено, что с увеличением значений Str падает безразмерный расход жидкости, при этом увеличивается предельный объем жидкости и время его достижения; увеличение значений двух других критериев приводит к росту и расхода, и предельного объема жидкости, следовательно, пользоваться аналитическим решением в квазистационарной постановке можно лишь при $Str < 0,1$.

Выводы. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании автономных систем водоснабжения и канализации. Перспективным представляется продолжение исследований для неавтономной области гидравлического сопротивления, а также при переменной вязкости жидкости.

Ключевые слова: простая гидравлическая сеть, центробежный насос, переменный уровень жидкости, нестационарное течение, математическая модель, задача Коши, критерии подобия

Vladimir Arkad'evich Naumov

Kaliningrad State Technical University, Doctor of Technical Science, Head of Water resources and water use Department, Russia, Kaliningrad, e-mail: van-old@mail.ru

Analysis of the non-stationary mathematical model of a simple hydraulic network with a centrifugal pump

Abstract

Background. Simple hydraulic networks with a centrifugal pump are not only part of complex networks, but are also widely used in Autonomous water supply and Sewerage systems. The mathematical model of simple networks taking into account the variable level of liquid in reservoirs includes the well-known Bernoulli equation for non-stationary flows. Published works on this problem do not take into account the non-stationary nature of the flow due to the variable liquid level. The conditions for using the quasi-stationary

model are not discussed. Similarity criteria for the issue were not found. The purpose of the study is to analyze the non-stationary mathematical model of the object, including the definition of criteria for similarity of the problem and their impact on the solution.

Materials and methods. The well-known equations of fluid quantity balance and Bernoulli for non-stationary flows with smoothly changing characteristics were used as a mathematical model of a simple hydraulic network. The pressure characteristic of a centrifugal pump is approximated by a well-established dependence in the form of a square three-member. The system of differential equations was reduced to a dimensionless form. Analytical and numerical methods were used to solve the problem.

Results. The analysis of the mathematical model of pumping liquid by a centrifugal pump in a hydraulic network with a variable level was carried out. The dimensionless form of the system of equations allowed us to determine three similarity criteria for the problem, including the analog of the Struhal number Str . The analytical solution to the Cauchy problem is found in the quasi-stationary formulation ($Str = 0$). The solution of the problem in the full statement is obtained by the numerical method. The results of the study of the influence of similarity criteria on the solution are presented. The dimensionless flow rate of the liquid decreases with increasing Str values. In this case, the maximum volume of liquid and the time to reach it increases. Increasing the values of the other two criteria leads to an increase in both the flow rate and the maximum volume of the liquid. The analytical solution in the quasi-rational formulation can be used only for $Str < 0,1$.

Conclusions. The results obtained can be used in the design of Autonomous Water supply and Sewerage systems. Further research for the non-self-similar area of hydraulic resistance and for variable fluid viscosity is promising.

Key words: simple hydraulic network, centrifugal pump, variable liquid level, non-stationary flow, mathematical model, Cauchy problem, similarity criteria

DOI: 10.17588/2072-2672.2020.4.064-070

Состояние вопроса. Гидравлические сети широко применяются в различных отраслях. Их математическое моделирование в целях повешения эффективности использования является одним из приоритетных направлений исследований [1–4]. Важное направление – моделирование нестационарных процессов в гидравлических сетях. Как известно, нестационарные процессы в гидравлических сетях разделяют на быстро протекающие (в частности, гидравлический удар) и медленно протекающие. В последнем случае характеристики течения (скорости, давление) меняются плавно по времени. Такие задачи распространены в инженерных приложениях, решаются с помощью нестационарного уравнения Бернулли. Причем большая часть публикаций относится к моделированию больших и сложных гидравлических систем (например, [5–8]).

Значительно меньше публикаций посвящено анализу нестационарной работы простой гидравлической сети с центробежным насосом (ПГСЦН), показанной на рис. 1. Хотя такая схема не только является составляющей сложных сетей, но и непосредственно применяется, например, в автономных системах водоснабжения.

В [9] сформулирована система уравнений, описывающая нестационарный процесс перекачивания жидкости в ПГСЦН с

предварительно наполненным трубопроводом. Однако при решении задачи изменение статического напора $H(t)$ не учитывается. Исследуется нестационарный процесс, обусловленный только вариацией частоты вращения рабочего колеса ЦН.

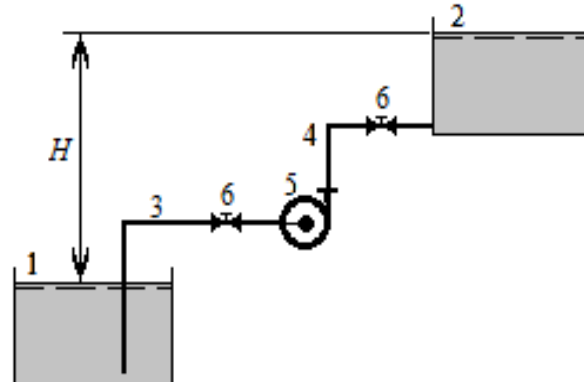


Рис. 1. Схема гидравлической сети: 1 – исходная емкость; 2 – приемная емкость; 3 – всасывающий трубопровод; 4 – нагнетательный трубопровод; 5 – ЦН; 6 – вентиль

В [10] изначально задача решается в квазистационарной постановке: в уравнении Бернулли не учитывается слагаемое, обусловленное нестационарным характером течения. Погрешность такого упрощения модели не обсуждается. В [10] допущена ошибка: в отличие от схемы рис. 1, рассчитывается схема, в которой нагнетательный трубопровод 4 имеет выход в при-

емный резервуар выше уровня жидкости; статический напор считается не до указанного выхода, а до верхнего уровня жидкости, как на схеме рис. 1. Кроме того, при такой схеме необходимо учитывать скоростной напор на выходе нагнетательного трубопровода.

Целью настоящего исследования является анализ нестационарной математической модели ПГСЦН при переменном уровне жидкости в резервуарах, включая определение критериев подобия задачи и их влияния на ее решение.

Материалы и методы. Рассмотрим ПГСЦН, показанную на рис. 1. Полагаем, что условия отсутствия кавитации выполнены. Режим течения жидкости – турбулентный, область гидравлического сопротивления – квадратичная. Давление на поверхности жидкости обоих резервуаров – атмосферное.

Дифференциальное уравнение для объема перекачиваемой жидкости V с начальным условием имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = Q, \quad V(0) = 0, \quad Q = W S_0, \quad (1)$$

где Q , W – объемный расход и скорость жидкости в трубопроводе соответственно; t – время; S_0 – площадь поперечного сечения трубопровода.

Положим, что на всем протяжении потока движение жидкости является плавно изменяющимся, тогда нестационарное уравнение Бернулли также представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка [11]:

$$\frac{L}{g} \frac{dW}{dt} = H_p - H - \zeta \frac{W^2}{2g}, \quad W(0) = 0, \quad (2)$$

где L – общая длина трубопровода; g – ускорение свободного падения; H_p – мгновенное значение напора насоса; H – текущая разность уровней; ζ – коэффициент гидравлического сопротивления сети.

Для зависимости напора насоса от подачи используем хорошо зарекомендовавшее себя выражение:

$$H_p \equiv f(Q) = a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2, \quad (3)$$

где a_0 , a_1 , a_2 – размерные эмпирические коэффициенты, определяемые для заданной модели ЦН по напорной характеристике, причем $a_0 > 0$, $a_2 < 0$ [4, 12].

Как в [11], полагаем, что гидравлическое сопротивление сети при нестационарном течении можно приближенно считать таким же, как и при стационарном. Коэффициент гидравлического сопротивления сети в квадратичной области считается постоянным и может быть определен по известной формуле

$$\zeta = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} \right)^{0,25} \frac{L}{d} + \sum_i \zeta_{Mi}, \quad (4)$$

где d – диаметр трубопровода; Δ – эквивалентная шероховатость; ζ_{Mi} – коэффициенты потерь в местных гидравлических сопротивлениях.

Далее, чтобы не загромождать изложение, полагаем площадь сечения 1-й и 2-й емкости постоянной: $S_1 = \text{const}$, $S_2 = \text{const}$. Текущий перепад уровней зависит от объема перекачанной жидкости:

$$H(t) = H_0 + \frac{V}{S_z}, \quad S_z = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2}, \quad (5)$$

где H_0 – перепад уровней (статический напор) в начальный момент времени.

Подставляя (3) и (5) в (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{L}{S_0 g} \frac{dQ}{dt} &= (a_0 - H_0) + a_1 Q - \\ &- (b - a_2) Q^2 - \frac{V}{S_z}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$b = \zeta / (2g S_0^2).$$

Если диаметры всасывающего и нагнетательного трубопровода не равны ($d_1 \neq d_2$), то в качестве S_0 можно выбрать площадь поперечного сечения нагнетательного трубопровода, а отношения d_1/d_2 и L_1/L_2 учесть при расчете коэффициентов, в частности ζ .

Чтобы привести систему дифференциальных уравнений к безразмерной форме, в качестве характерного значения выберем установившийся расход жидкости при неизменных начальных условиях. Для этого правую часть (6) приравняем к нулю, положив $V = 0$. Найдем положительное решение квадратного уравнения

$$a_3 Q^2 - a_1 Q - (a_0 - H_0) = 0; \quad a_3 = b - a_2, \quad (7)$$

$$Q_0 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4 \cdot (a_0 - H_0)(b - a_2)}}{2 \cdot a_3}. \quad (8)$$

В [3] используется аппроксимация, подобная (3), но с коэффициентом a_1 , равным нулю. Тогда формула (8) упростится:

$$Q_0 = \sqrt{\frac{a_0 - H_0}{a_3}}. \quad (9)$$

Введем безразмерные переменные:

$$q = \frac{Q}{Q_0}, \quad \tau = \frac{t}{Q_0 S_z a_3}, \quad v = \frac{V}{Q_0^2 S_z a_3}. \quad (10)$$

Подставив размерные переменные, выраженные из (10), в (1), (2), запишем постановку задачи Коши в безразмерной форме:

$$Str \frac{dq}{d\tau} = \theta + 2\beta q - q^2 - v, \quad q(0) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = q, \quad v(0) = 0, \quad \beta = \frac{0,5 \cdot a_1}{Q_0 a_3}, \quad (12)$$

$$Str = \frac{L}{Q_0^2 S_0 S_z a_3^2 g}, \quad \theta = \frac{a_0 - H_0}{Q_0^2 a_3}. \quad (13)$$

Видно, что задача имеет три критерия подобия: β , θ , Str . Str представляет собой аналог числа Струхала.

Результаты. Если число Струхала мало, (11) превращается в квадратное уравнение:

$$\theta + 2\beta q - q^2 - v = 0. \quad (14)$$

Находим из (14) положительное q

$$q(v) = \beta + \sqrt{\beta^2 + \theta - v} \quad (15)$$

и подставляем в (12). Получаем задачу Коши:

$$\frac{dv}{d\tau} = \beta + \sqrt{\beta^2 + \theta - v}, \quad v(0) = 0, \quad (16)$$

которая имеет аналитическое решение:

$$\beta \cdot \ln \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + \theta - v}}{\beta + \sqrt{\beta^2 + \theta}} + \sqrt{\beta^2 + \theta} - \sqrt{\beta^2 + \theta - v} = \frac{\tau}{2}. \quad (17)$$

При $\beta = 0$ решение (16) представляет собой явные зависимости от времени:

$$v(\tau) = \tau \cdot \sqrt{\theta} - 0,25\tau^2, \quad q(\tau) = \sqrt{\theta} - 0,5\tau, \quad (18)$$

которые показаны на рис. 3–5 штриховыми линиями.

На рис. 2, 3 показана связь безразмерных величин времени и объема пере-

качанной жидкости v при различных значениях критериев подобия θ и β .

В соответствии с (17), величина перекачиваемого объема жидкости ограничена:

$$v \leq \beta^2 + \theta = v_p. \quad (19)$$

Неравенство (19) обусловлено заданной конечной величиной напора ЦН. Но оно справедливо только при $Str \rightarrow 0$. По (19), предельный объем v_p , который может перекачать насосная установка при заданных условиях, растет с увеличением как β , так и θ . Это видно и на рис. 2, 3.

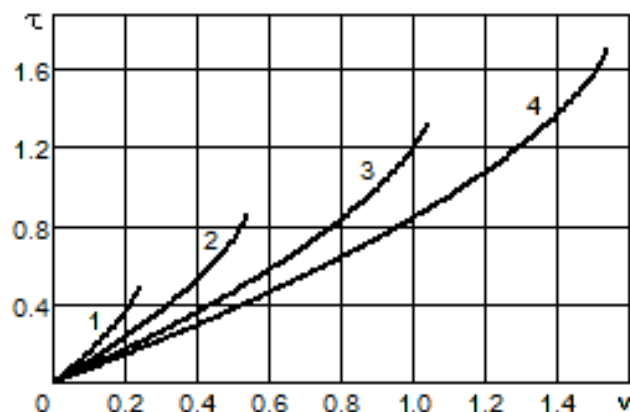


Рис. 2. Связь безразмерного объема и времени по (17) при $\beta = 0,2$: 1 – $\theta = 0,2$; 2 – $\theta = 0,5$; 3 – $\theta = 1,0$; 4 – $\theta = 1,5$

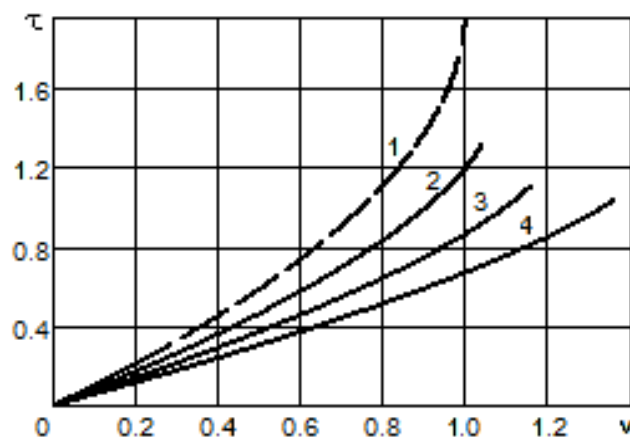


Рис. 3. Связь безразмерного объема и времени по (17) при $\theta = 1,0$: 1 – $\beta = 0$; 2 – $\beta = 0,2$; 3 – $\beta = 0,4$; 4 – $\beta = 0,6$

Результаты решения численным методом нестационарной задачи (11)–(13) при различных значениях критериев подобия представлены на рис. 4–9.

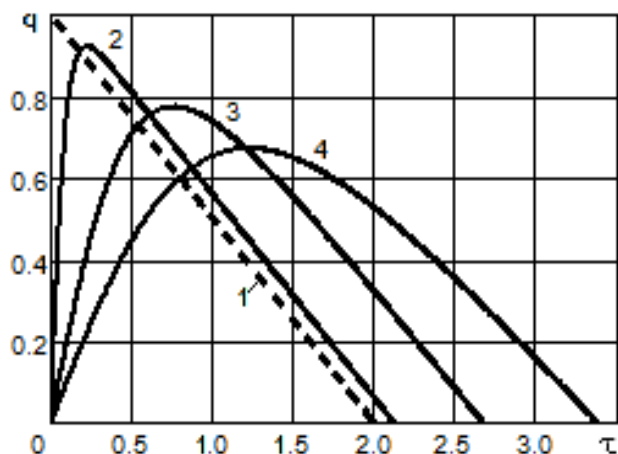


Рис. 4. Изменение безразмерного расхода при $\beta = 0$; $\theta = 1$ и различных значениях числа Струхала: 1 – $Str = 0$; 2 – $Str = 0,1$; 3 – $Str = 0,5$; 4 – $Str = 1,0$

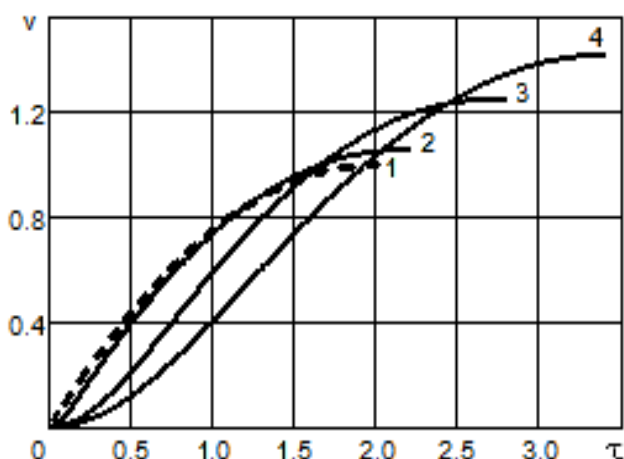


Рис. 5. Изменение безразмерного объема (условия и обозначения, как на рис. 4)

Анализ полученных зависимостей (рис. 4, 5) показывает, что чем больше значение Str , тем значительнее отличие решения задачи в полной постановке от квазистационарного решения, найденного аналитически (штриховые линии). Это отличие становится несущественным лишь при $Str < 0,1$. Возрастание значений Str влечет снижение безразмерного расхода, но при этом увеличивается как объем жидкости, который может быть перекачан насосной установкой, так и время его достижения.

Анализ зависимостей (рис. 6–9) показывает, что увеличение β и θ приводит к росту расхода и предельного объема перекачиваемой жидкости v_p . Время достижения v_p заметно увеличивается с ростом значений Str . Величины β и θ в меньшей

степени влияют на изменение указанного времени.

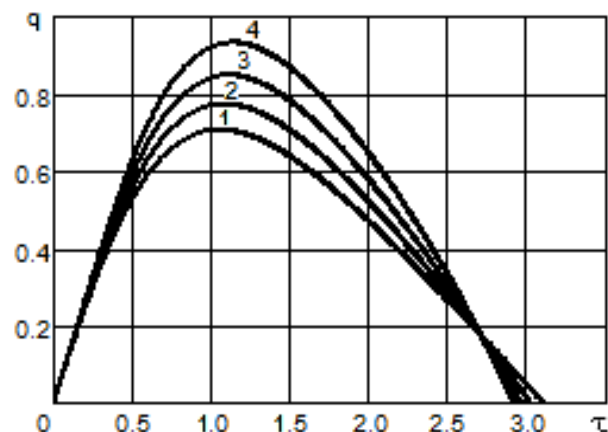


Рис. 6. Изменение безразмерного расхода при $Str = 0,8$; $\theta = 1$ и различных значениях β : 1 – $\beta = 0$; 2 – $\beta = 0,1$; 3 – $\beta = 0,2$; 4 – $\beta = 0,3$

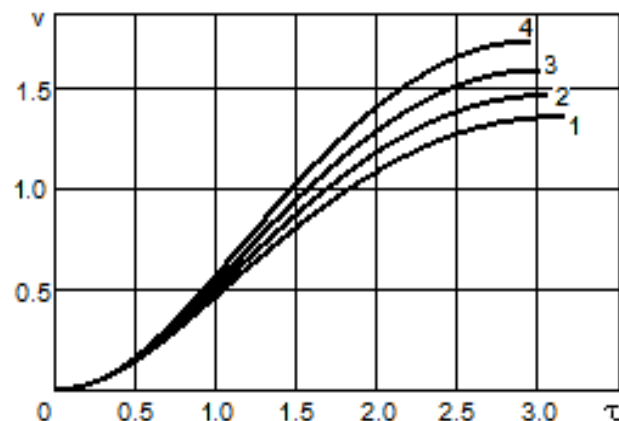


Рис. 7. Изменение безразмерного объема (условия и обозначения, как на рис. 6)

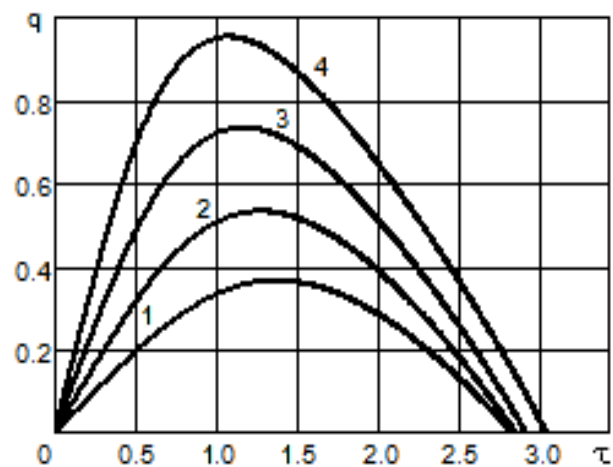


Рис. 8. Изменение безразмерного расхода при $Str = 0,8$; $\beta = 0,2$ и различных значениях θ : 1 – $\theta = 0,3$; 2 – $\theta = 0,6$; 3 – $\theta = 0,8$; 4 – $\theta = 1,2$

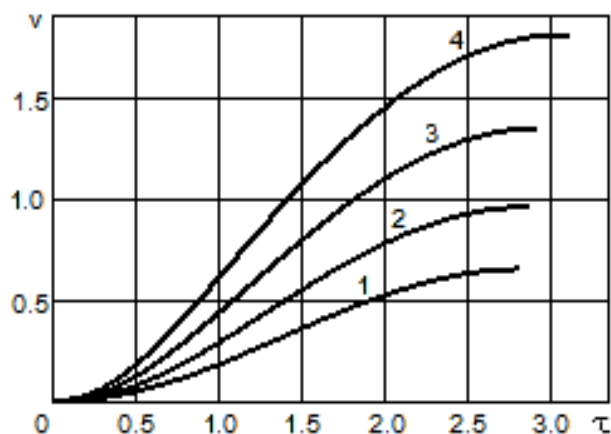


Рис. 9. Изменение безразмерного объема (условия и обозначения, как на рис. 8)

Выводы. Проведенный анализ математической модели перекачивания жидкости центробежным насосом в простой гидравлической сети с учетом переменного уровня позволил сделать следующие выводы. Нестационарная задача Коши имеет три критерия подобия. С увеличением числа Струхала Str падает безразмерный расход жидкости, при этом увеличиваются предельный объем жидкости, который может быть перекачан насосной установкой, и время его достижения. Увеличение значений двух других критериев приводит к росту и расхода, и предельного объема жидкости.

В квазистационарной постановке ($Str = 0$) задача имеет аналитическое решение. Но пользоваться таким упрощением модели можно лишь при $Str < 0,1$.

Заметим, что рассмотренная модель справедлива, если в момент начала работы насоса трубопровод наполнен неподвижной жидкостью. Иначе модель значительно усложнится.

Перспективным представляется продолжение исследований для неавтомодельной области гидравлического сопротивления и для переменной вязкости жидкости.

Список литературы

1. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. – М.: Наука, 1985. – 278 с.
2. Логинов К.В., Мызников А.М., Файзуллин Р.Т. Расчет, оптимизация и управление режимами работы больших гидравлических сетей // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18, № 9. – С. 92–106.
3. Моделирование режимов эксплуатации насосных станций, оборудованных

центробежными насосами с разными характеристиками / Н.Н. Елин, В.Е. Мизонов, А.В. Цыплов, М.В. Исаев // Вестник ИГЭУ. – 2014. – Вып. 4. – С. 41–45.

4. Великанов Н.Л., Наумов В.А., Корягин С.И. Характеристики параллельно соединенных канализационных насосов высокой производительности // Техничко-технологические проблемы сервиса. – 2019. – № 4(50). – С. 13–16.

5. Балышев О.А., Балышев С.О. Нелинейные динамические гидравлические цепи // Доклады РАН. – 2004. – Т. 397, № 5. – С. 606–609.

6. Giustolisi O., Berardi L., Laucelli D. Generalizing WDN Simulation Models to Variable Tank Levels // Journal of Hydroinformatics. – 2012. – No. 14. – P. 562–573.

7. Todini E., Rossman L.A. Unified Framework for Deriving Simultaneous Equation Algorithms for Water Distribution Networks // Journal of Hydraulic Engineering. – 2013. – Vol. 139, No. 5. – P. 511–526.

8. Применение метода контрольного объема для моделирования нестационарных процессов в трубопроводных системах / В.Ю. Волков, Л.А. Голибродо, И.Г. Зорина и др. // Математическое моделирование и численные методы. – 2016. – № 4(12). – С. 34–46.

9. Христо П.Е. Оптимизация энергопотребления центробежной машины в нестационарных режимах в ограниченной области изменения переменных // Энергосбережение, энергетика, энергоаудит. – 2014. – № 12. – С. 2–16.

10. Протопопов А.А., Виговский В.И. Анализ работы центробежного насоса в составе системы с изменяющимися параметрами // Политехнический молодежный журнал. – 2017. – № 11. – 6 с. – URL: <http://ptsj.ru/articles/198/198.pdf>.

11. Чугаев Р.Р. Гидравлика (техническая механика жидкости): учебник. – М.: Энергоиздат, 1982. – 672 с.

12. Великанов Н.Л., Наумов В.А., Примак Л.В. Обобщенные характеристики канализационных насосов высокой производительности // Механизация строительства. – 2017. – Т. 78, № 10. – С. 32–36.

References

1. Merenkov, A.P., Khasilev, V.Ya. *Teoriya gidravlicheskih tsepей* [Theory of hydraulic circuits]. Moscow: Nauka, 1985. 278 p.
2. Loginov, K.V., Myznikov, A.M., Fayzullin, R.T. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2006, vol. 18, no. 9, pp. 92–106.
3. Elin, N.N. Mizonov, V.E., Tsyplov, A.V., Isaev, M.V. *Vestnik IGEU*, 2014, issue 4, pp. 41–45.
4. Velikanov, N.L., Naumov, V.A., Koryagin, S.I. *Tekhniko-tekhnologicheskie problemy servisa*, 2019, no. 4(50), pp. 13–16.

5. Balyshev, O.A., Balyshev, S.O. *Doklady RAN*, 2004, vol. 397, no. 5, pp. 606–609.
6. Giustolisi, O., Berardi, L., Laucelli, D. *Journal of Hydroinformatics*, 2012, no. 14, pp. 562–573.
7. Todini, E., Rossman, L.A. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2013, vol. 139, no. 5, pp. 511–526.
8. Volkov, V.Yu., Golibrodo, L.A., Zorina, I.G., Kudryavtsev, O.V., Krutikov, A.A., Skibin, A.P. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody*, 2016, no. 4(12), pp. 34–46.
9. Khristo, P.E. *Energoberezhenie, energetika, energoaudit*, 2014, no. 12, pp. 2–16.
10. Protopopov, A.A., Vigovskiy, V.I. *Politekhnicheskij molodezhnyy zhurnal*, 2017, no. 11, 6 p. Available at: <http://ptsj.ru/articles/198/198.pdf>.
11. Chugaev, R.R. *Gidravlika (tekhnicheskaya mekhanika zhidkosti)* [Hydraulics (technical fluid mechanics)]. Moscow: Energoizdat, 1982. 672 p.
12. Velikanov, N.L., Naumov, V.A., Primak, L.V. *Mekhanizatsiya stroitel'stva*, 2017, vol. 78, no. 10, pp. 32–36.