МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК 66.096.5

Андрей Васильевич Митрофанов
ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45; ФГБОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет», научный сотрудник кафедры высшей и прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 32-72-26, e-mail: and2mit@mail.ru

Ольга Владимировна Сизова
ФГБОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет», кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий и цифровой экономики, Россия, Иваново, e-mail: siz-olga@yandex.ru

Наталия Сергеевна Шпейнова
ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», аспирант кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45, e-mail: shpejnova@mail.ru

Артем Александрович Жемчугов
ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», студент кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45; e-mail: gemhugovartem747@mail.ru

Софья Максимовна Михайлова
ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», студент кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45, e-mail: sofya.mikhaylova.1998@mail.ru

Исследование устойчивости разностной схемы метода счетных цепей Маркова для моделирования псевдоожижения

Авторское резюме

Состояние вопроса. Во многих процессах энерготехнологии применяются аппараты с псевдоожиженным слоем сыпучего материала. Псевдоожиженный слой является неоднородной гетерогенной системой, поэтому для его адекватного описания необходимы математические модели, предполагающие его пространственную дискретизацию. Одним из эффективных инструментов для математического описания структуры псевдоожиженного слоя является теория цепей Маркова. Вопросам ее применения к построению математических моделей различных технологических процессов в псевдоожиженном слое посвящено достаточно большое количество исследовательских работ. В то же время вопросам анализа устойчивости предложенных алгоритмов уделено значительно меньше внима-

Вестник ИГЭУ, 2021, вып. 4, с. 65–74.

ния. Последнее делает актуальной задачу анализа вычислительной устойчивости моделей формирования псевдоожиженного слоя, основанных на математическом аппарате теории цепей Маркова.
Материалы и методы. В качестве математической основы моделирования стесненного движения материала в псевдоожиженном слое используется теория цепей Маркова. Параметрическая идентификация модели выполнена с привлечением известных из литературы зависимостей, и переходные матрицы поставлены в соответствие с физическими параметрами массопотоков, что делает предлагаемую модель нелинейной. Сформулирован смешанный критерий устойчивости алгоритма, отражающий влияние пространственно-временных параметров дискретизации задачи на стабильность вычислительных процедур. Выполнено исследование устойчивости разностной схемы расчета процесса формирования псевдоожиженного слоя монодисперсного сыпучего материала.
Результаты. Рассмотрены вопросы влияния частоты временной дискретизации на устойчивость получаемого решения. Оценен вклад различных параметров модели в формировании ситуации потери вычислительной устойчивости. Показано, что частоты временной и пространственной дискретизации должны выбираться в результате смешанного критерия устойчивости.
Выводы. Результаты исследования подтверждают, что методология теории цепей Маркова является приемлемым инструментом для описания структуры таких систем частиц, как псевдоожиженный слой. Установлено, что наиболее значимый вклад в процесс потери вычислительной устойчивости вносит макродиффузионный параметр движения частиц. Последнее, с одной стороны, делает актуальными дальнейшие сравнительные исследования существующих моделей макродиффузии, а с другой стороны, делает возможным использование моделей на основе теории цепей Маркова с учетом предложенного критерия устойчивости.

Ключевые слова: вычислительная устойчивость, теория цепей Маркова, псевдоожиженный слой, вектор состояния, переходная матрица, скорость витания частицы, твердое топливо

Andrey Vasilyevich Mitrofanov
Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences (Post-Doctoral Degree), Professor of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45; Ivanovo State University of Chemistry and Technology, Research Scientist of High and Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, e-mail: and2mit@mail.ru

Olga Vladimirovna Sizova
Ivanovo State University of Chemistry and Technology, Candidate of Engineering (PhD), Associate Professor of Information Technologies and Digital Economics Department, Russia, Ivanovo, e-mail: siz-olga@yandex.ru

Natalia Sergeevna Shpeynova
Ivanovo State Power Engineering University, Postgraduate Student of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45, e-mail: shpejnova@mail.ru

Artem Alexandrovich Zhemchugov
Ivanovo State Power Engineering University, Student of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45, e-mail: gemhugovartem747@mail.ru

Sofya Maksimovna Mikhailova
Ivanovo State Power Engineering University, Student of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45, e-mail: sofya.mikhaylova.1998@mail.ru

A study of stability of difference scheme of Markov counting chain method for fluidization modeling

Abstract

Background. Devices with a fluidized bed of granular material are applied in many energy power technology processes. The fluidized bed is a heterogeneous system, so mathematical models assuming its spatial discretization are necessary for its proper description. Markov chain theory is one of the most effective tools for the mathematical description of the fluidized bed structure. Many research papers are devoted to the issues of the theory application when developing mathematical models of various technological processes in the fluidized bed. At the same time, much less attention is paid to the issue of stability analysis of the proposed algorithms. Thus, it is a highly topical issue to analyze the computational stability of models of fluidized bed based on the mathematical principles of the Markov chain theory.
Materials and methods. The Markov chain approach is used as a mathematical basis for modeling of the flow patterns in a fluidized bed. The parametric identification of the model is performed using the dependen-

cies known from the scientific papers, and the transition matrices are aligned with the physical parameters of the mass flows, which makes the proposed model nonlinear. The mixed criterion of the stability algorithm is formulated. It shows the influence of the spatiotemporal parameters of the problem sampling on the stability of computational procedures. The stability of the difference scheme to calculate formation of a fluidized bed of a monodisperse granular material is studied.

Results. The influence of the time sampling frequency on the stability of the resulting solution is considered. The effect of various parameters of the model on the loss of computational stability is estimated. It is proved that the time and spatial sampling frequencies should be chosen as a result of a mixed stability criterion.

Conclusions. The study proves that the methodology of the Markov chain theory is an acceptable tool to describe the structure of such particle systems as a fluidized bed. It is established that macro-diffusion parameter of particle motion is the most influential in the process of computational stability loss. Thus, on the one hand, it is relevant to conduct further comparative studies of existing models of macrodiffusion, and on the other hand, it is possible to use models based on the theory of Markov chains considering the proposed stability criterion.

Key words: computational stability, Markov chain theory, fluidized bed, state vector, transition matrix, particle settling velocity, solid fuel

DOI: 10.17588/2072-2672.2021.4.065-074

Введение. Проблема анализа структуры материальных объектов, которые в современном эксперименте и при моделировании рассматриваются как совокупность простейших представительных объемов, представляет собой одну из наиболее трудных проблем при построении моделей различных объектов [1–3].

Так, параметры полей скоростей и концентраций фаз кипящего слоя могут быть описаны с использованием различных теоретических подходов, предполагающих различную степень декомпозиции системы.

Часто описываемый объект представляется как единое целое с идеально распределенными свойствами по всему объему. Для гетерогенных сред, как правило являющихся пространственно неоднородными, такое допущение является грубым, что на практике частично компенсируется введением различных эмпирических и полуэмпирических поправочных коэффициентов. В результате получаемые прогнозы пригодны для описания конкретного конструктивного или режимного исполнения объекта, но не могут быть обобщены на класс даже однотипных объектов или процессов [1–3].

Другая крайняя позиция при описании гетерогенной среды подразумевает его рассмотрение как набора всех индивидуальных частиц, участвующих в процессе (например, метод дискретных элементов в сочетании с методами вычислительной гидродинамики [4]). Использование такого подхода позволяет получать высокую информативность, но при этом требует исчерпывающих сведений относительно материальных констант процесса или объекта. Последнее требование в инженерной практике практически недостижимо [2–4].

Таким образом, для механики гетерогенных сред достаточно острой является проблема выбора размера представительного объема описываемой системы. Логичным решением является построение моделей на основе промежуточного (мезоскопического) масштаба декомпозиции системы, который обеспечит приемлемое с практической и теоретической точек зрения сочетание затрат и информативности при моделировании [1–3]. Однако при переходе к численному моделированию указанная проблема дополняется таким необходимым с практической точки зрения свойством численных алгоритмов, как вычислительная устойчивость, точное определение которой зависит от контекста, определяемого видом задачи и методологией ее решения. Так, в численных методах линейной алгебры концепция устойчивости обычно разрабатывается с точки зрения анализа прямых ошибок, определяемых разницей между численным прогнозом и известным решением, и обратных ошибок, которые определяются как наименьшее отклонение аргумента, приводящее к расчетному прогнозу, совпадающему с известным значением. Соответственно, предлагаемые алгоритмы характеризуются наличием или отсутствием устойчивости в прямом направлении, обратном направлении или некоторого параметра смешанной устойчивости [5–6]. В то же время при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений вводятся и существенно иные понятия численной устойчивости [5–6].

Использование математического аппарата теории счетных цепей Маркова с дискретным временем нашло широкое применение при решении различных прикладных задач [7–14], однако вопросы вычислительной устойчивости предлагаемых алгоритмов практически не затрагиваются. В связи с этим представляется актуальным анализ сценарных вариантов потери устойчивости при моделировании технических систем даже на качественном уровне.

Материалы и методы. Разработка концепции устойчивости, как было отмечено, не может быть выполнена в отрыве от конкретной задачи и ее особенностей. Ниже вопросы устойчивости рассматриваются применительно к модели процесса перехода системы, составленной из монодисперсного сыпучего материала, из плотного состояния в псевдоожиженное. Расчетная схема процесса заимствована из работ [8–11] и представлена на рис. 1.

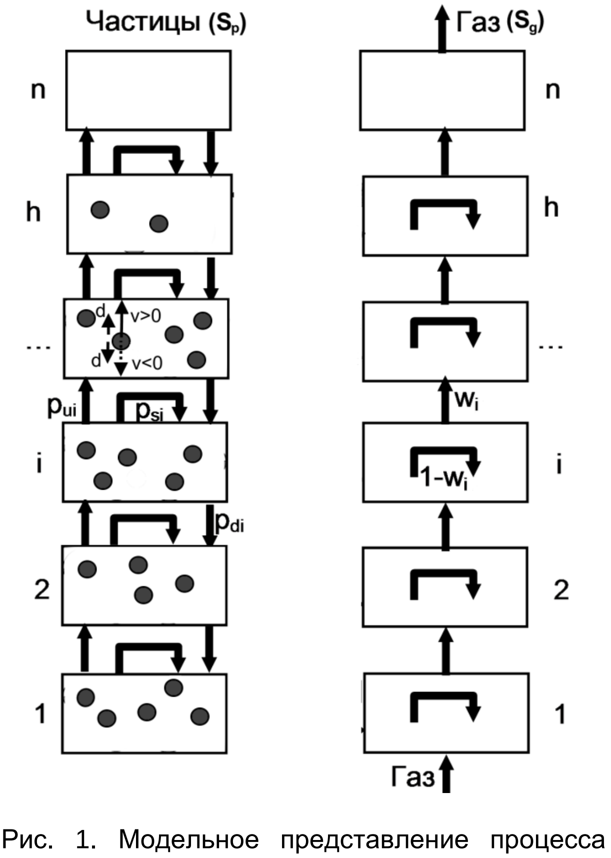

Рис. 1. Модельное представление процесса псевдоожижения в аппарате периодического принципа действия

Рабочее пространство аппарата (рис. 1) представляется набором из нескольких цепей, состоящих из счетного числа n ячеек, между которыми вводятся вероятностные переходы соответствующих экстенсивных свойств. Каждая ячейка охарактеризована конечным размером Δx. Состояние системы характеризуется наборами параметров, организованных в векторы состояния **S**. Эволюция состояния системы фиксируется в дискретные моменты времени $t_k = (k - 1)\,\Delta t$, где Δt – промежуток времени между соседними состояниями системы (шаг по времени); k – номер временного шага.

Вероятности всех возможных перемещений компонентов системы вдоль цепи ячеек организуются в стохастический вектор, который, таким образом, содержит вероятности для полной группы событий. Стохастический вектор, содержащий вероятности, относящиеся к i-й ячейке цепи, записывается в i-й столбец переходной матрицы, которая, таким образом, содержит вероятности всех событий, определяющих состояние системы через промежуток времени Δt, и является основным оператором модели [8–11].

С учетом этого продольное перемещение твердой и несущей фаз описывается рекуррентными матричными равенствами [10–11]:

$$\mathbf{S}_p^{k+1} = \mathbf{P}_p^{k}\,\mathbf{S}_p^{k}; \qquad (1)$$

$$\mathbf{S}_g^{k+1} = \mathbf{P}_g^{k}\,\mathbf{S}_g^{k} + \mathbf{S}_{gf}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{S}_p$ и $\mathbf{S}_g$ – векторы-столбцы содержания частиц и ожижающей среды; $\mathbf{P}_p^k$ и $\mathbf{P}_g^k$ – переходные матрицы для частиц и ожижающей среды; $\mathbf{S}_{gf}$ – вектор поступления ожижающей среды (при подаче агента снизу под газораспределительную решетку он имеет единственный ненулевой элемент в первой ячейке, равный объему ожижающей среды, поступающему в нее за один временной переход).

В модели [10–11] для описания движения ожижающей фазы предусматриваются только вероятности продвижения вперед (принято допущение об идеальном вытеснении), поэтому переходная матрица формируется традиционным для подобных моделей [9–11] образом и здесь не описывается.

Концепция описания движения частиц твердой фазы в модели основана на рассмотрении вероятностных характеристик процесса, и, в конечном счете, должны быть оценены доли частиц, которые за время наблюдения Δt покидают или не покидают ячейку. В рассмотрение введены вероятности (расчетные построения иллюстрирует рис. 1) переходов в соседнюю ячейку вниз (p_d), вверх (p_u) и остаться в наблюдаемой ячейке (p_s).

Для i-й ячейки указанные вероятности перемещений, составляющие переходную матрицу, связаны с характеристиками процесса следующими зависимостями [9–11]:

$$p_{si} = 1 - p_{ui} - p_{di}; \quad (3)$$

$$p_{di} = d_i \text{ при } (w_i - V_{si}) > 0; \quad (4)$$

$$p_{di} = v_i + d_i \text{ при } (w_i - V_{si}) < 0; \quad (5)$$

$$p_{ui} = v_i + d_i \text{ при } (w_i - V_{si}) > 0; \quad (6)$$

$$p_{ui} = d_i \text{ при } (w_i - V_{si}) < 0, \quad (7)$$

где d – симметричная составляющая вероятности переноса из ячейки (диффузионная вероятность), вводимая для учета влияния случайных факторов, обусловленных столкновениями частиц, и связанная с коэффициентом макродиффузии D через соотношение [9–11]

$$d = D\Delta t/\Delta x^2; \quad (8)$$

v – несимметричная составляющая вероятности переноса частиц из ячейки (конвективная вероятность), связанная с параметрами процесса соотношением

$$v = |w_i - V_{si}|\cdot\Delta t/\Delta x, \quad (9)$$

где V_s – скорость витания одиночной частицы, которая равна скорости ожижающего агента, при которой одиночная частица пребывает в состоянии равновесия.

Очевидно, соотношения (3)–(9) содержат материальные константы процесса движения фаз. С одной стороны, эти коэффициенты определяют прогностическую эффективность модели, с другой – их использование ставит в соответствие значениям элементов переходных матриц вещественные параметры процесса, которые в общем случае могут изменяться во времени, что делает предлагаемые модели нелинейными.

Указанная нелинейность оказывает влияние на результаты рекуррентных вычислительных процедур (1)–(2), и, соответственно, оценка устойчивости должна выполняться после параметрической идентификации модели. Идентификация параметров для подобных моделей является сложной и неоднозначной процедурой, так как для оценки одного и того же параметра могут использоваться различные эмпирические и полуэмпирические зависимости.

В предлагаемом исследовании используется традиционный (конвективно-диффузионный) подход к формированию структуры переходной матрицы $\mathbf{P}_p$. Матрица $\mathbf{P}_p$ является трехдиагональной, а каждый ее столбец содержит полный набор вероятностей перехода частиц из соответствующей ячейки [8–12]. Параметрическая идентификация предполагает постановку значений указанных вероятностей в соответствие физическим характеристикам псевдоожижения.

Конвективные вероятности связаны со скоростью скольжения частицы относительно потока ($w_i - V_{si}$). Таким образом, скорость витания V_s является одной из основных материальных констант, подлежащей идентификации.

В свою очередь, скорость V_s связана с весом P частицы соотношением [9–11]

$$P = C_d\, f_p\, \rho_g \frac{V_{si}^2}{2}, \quad (10)$$

где C_d – коэффициент сопротивления частицы; f_p – площадь наибольшего поперечного сечения частицы, перпендикулярного вектору скорости; ρ_g – плотность воздуха.

Коэффициент сопротивления одиночной частицы зависит от режима движения несущей среды, т. е. в конечном счете является функцией скорости движения воздуха в ячейке w_i, значение которой вычисляется с учетом решения задачи о стесненном обтекании частицы. В настоящем исследовании приняты те же допущения, что и в [11]. Таким образом, локальная скорость воздуха определяется по соотношению

$$w = \frac{W_0}{1 - \pi\left(\frac{C}{8\cdot C_{\max}}\right)^{2/3}}, \quad (11)$$

где C и $C_{\max}$ – текущее и начальное значения объемной концентрация частиц в ячейке (индекс не приводится). При этом коэффициент сопротивления частиц рассчитывается по эмпирическому соотношению [15]

$$C_d = \left(2,25 \cdot \mathrm{Re}^{-0,31} + 0,36 \cdot \mathrm{Re}^{0,06}\right)^{0,45}, \quad (12)$$

где Re – число Рейнольдса по диаметру частицы и относительной скорости ее обтекания.

Симметричные компоненты вероятностей переноса d связаны с коэффициентом макродиффузии частиц слоя (соотношение (8)), который является эмпирическим параметром и может быть рассчитан как [16]

$$D = 0,051 \cdot (w/w_{in})\,(w - w_{in})^{1,471}, \quad (13)$$

где w_{in} – скорость начала псевдоожижения.

Зависимости (10)–(13) позволяют определить необходимые материальные константы, характеризующие процесс, и, используя соотношения (8)–(9), выполнить параметрическую идентификацию модели. Полученная таким образом физико-математическая модель процесса обладает, как показано в [11], достаточной прогностической эффективностью, поэтому анализ ее вычислительной устойчивости является актуальным и может быть выполнен исходя из формального требования о равенстве единице суммы вероятностей полной группы событий. С учетом того, что вероятность остаться в наблюдаемой ячейке (p_s) вычисляется по соотношению (3), указанное формальное требование к устойчивости вычислительных процедур можно записать как

$$v \cdot \Delta t/\Delta x + 2 \cdot D\Delta t/\Delta x^2 < 1, \quad (14)$$

или

$$v + 2 \cdot D/\Delta x < \Delta t/\Delta x. \quad (15)$$

Несмотря на эквивалентность утверждений (14)–(15), с точки зрения визуального представления результатов численных экспериментов удобнее сравнивать полученные значения суммарной вероятности с единицей (пользоваться формулой (14)).

Результаты. На рис. 2 представлен пример расчета аксиального распределения частиц в аппарате. Результаты численного эксперимента получены для аппарата, описанного в [11], и следующих входных параметров: частицы – одинаковые сферы d_p = 6 мм; плотность материала 1250 кг/м^3; число частиц в навеске 300 шт.; расходная скорость воздуха W_0 (для пустого аппарата) 16,5 м/с. Для приведенных на рис. 2–5 распределений приняты значения Δt = 0,0011 с и $\Delta x = d_p$.

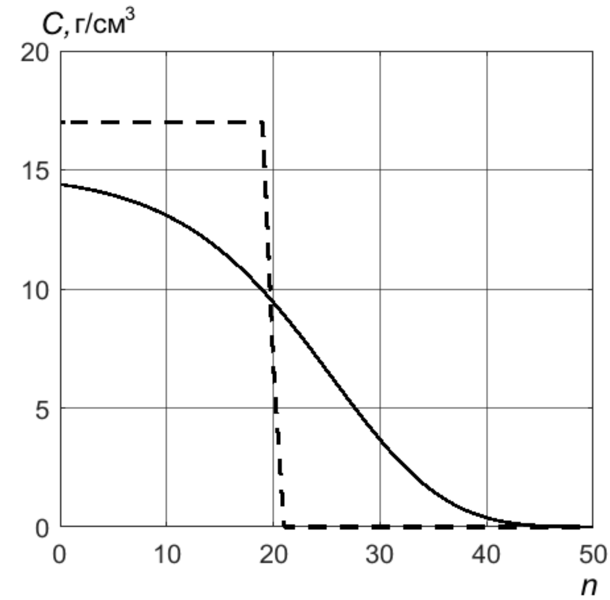

Рис. 2. Расчетные распределения объемной концентрации твердой фазы по высоте аппарата: пунктирная линия – плотный слой; сплошная линия – псевдоожиженный слой

Необходимо отметить, что в работах, посвященных применению математического аппарата теории цепей Маркова к описанию процессов в кипящем слое [8–13], переходный гидродинамический процесс (перевод слоя из плотного состояния в псевдоожиженное) не исследовался, однако, на наш взгляд, именно этот переход мог бы оказаться проблемным в отношении вычислительной устойчивости.

Тем не менее результаты вычислительных экспериментов, приведенных на рис. 3–5, показывают, что эти опасения не вполне оправданы.

Действительно, на очень коротком начальном этапе суммарная вероятность R удаления материала из ячеек ($R = v \cdot \Delta t/\Delta x + 2D \cdot \Delta x^2/\Delta t$), определяемая левой частью неравенства (14), становится значительно выше, чем в установившемся режиме (рис. 3). Однако указанные значения R все еще меньше единицы. Кроме того, полученные в том же вычислительном эксперименте распределения частиц по высоте аппарата (рис. 2) являются качественно непротиворечивыми и свидетельствуют об устойчивости вычислительных процедур.

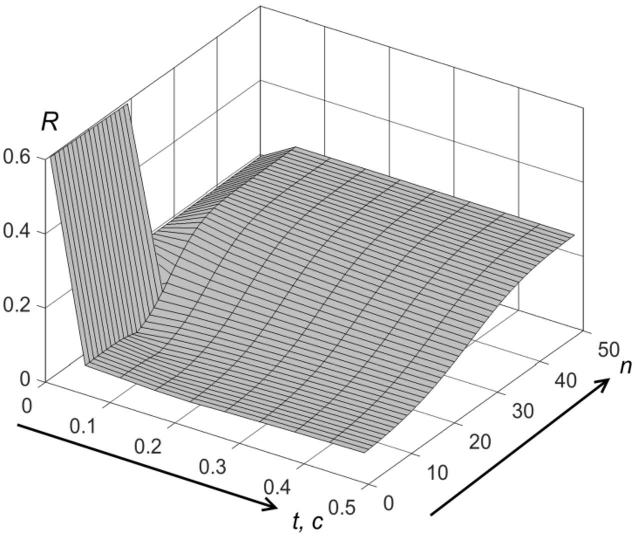

Рис. 3. Расчетное пространственно-временное распределение значений вероятностей переноса частиц из ячеек цепи в переходном процессе

Можно отметить, что наибольший вклад в итоговое суммарное значение R вносят вероятности диффузионного переноса (рис. 4). В то же время значения вероятности конвективного переноса меньше соответствующих диффузионных вероятностей практически на порядок (рис. 5).

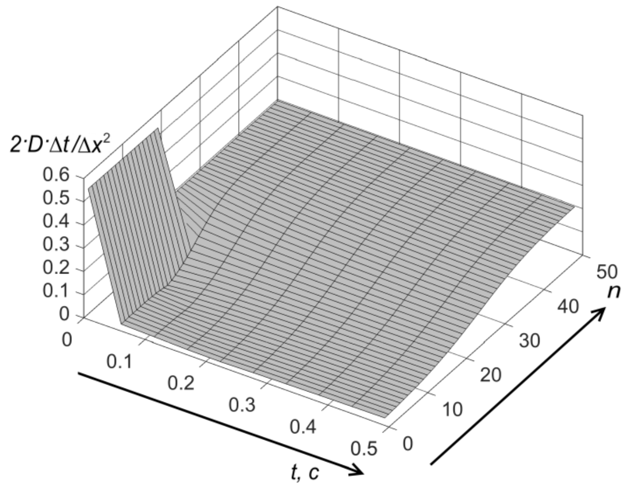

Рис. 4. Расчетное пространственно-временное распределение значений вероятностей диффузионного переноса частиц из ячеек цепи в переходном процессе

Следующий численный эксперимент проведен при Δt = 0,0012 и $\Delta x = d_p$. На рис. 6 приведено расчетное распределение объемной концентрации твердой фазы по высоте аппарата, которое, очевидно, обнаруживает качественную противоречивость (наличие отрицательных концентраций и т.п.), которая указывает на потерю вычислительной устойчивости.

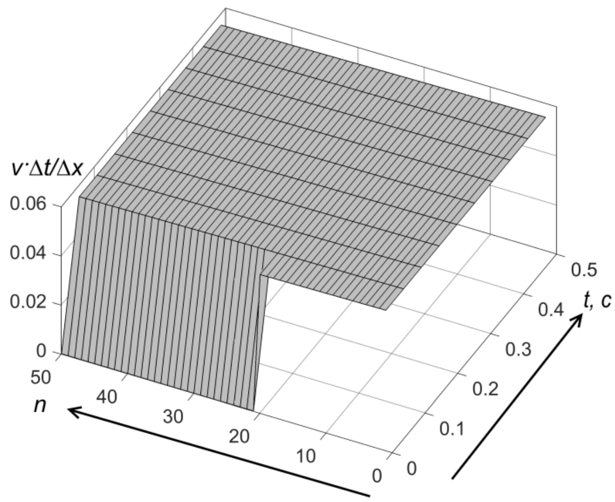

Рис. 5. Расчетное пространственно-временное распределение значений вероятностей конвективного переноса частиц из ячеек цепи в переходном процессе

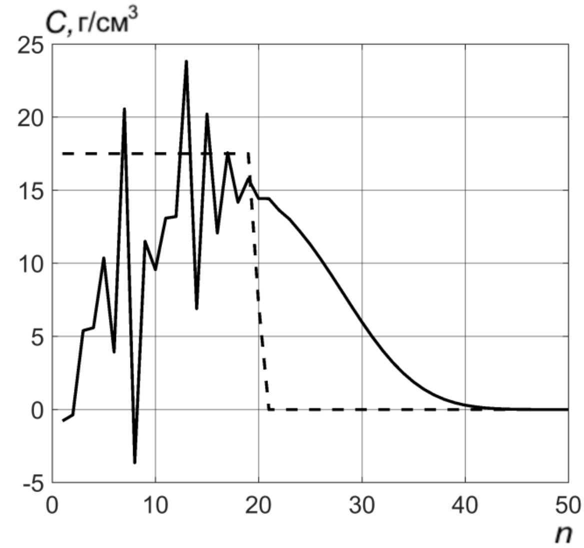

Рис. 6. Расчетные распределения объемной концентрации твердой фазы по высоте аппарата для случая потери вычислительной устойчивости: пунктирная линия – плотный слой; сплошная линия – псевдоожиженный слой

На рис. 7–9 приведены результаты вычислительных экспериментов, отражающие пространственно-временную эволюцию суммарной вероятности переноса частиц слоя (рис. 7), а также отдельно вероятностей конвективного (рис. 8) и диффузионного (рис. 9) переноса.

Во-первых, очевидно, что потеря устойчивости расчетной процедуры в целом связана с возникновением недопустимых значений вероятностей диффузионного переноса из ячеек.

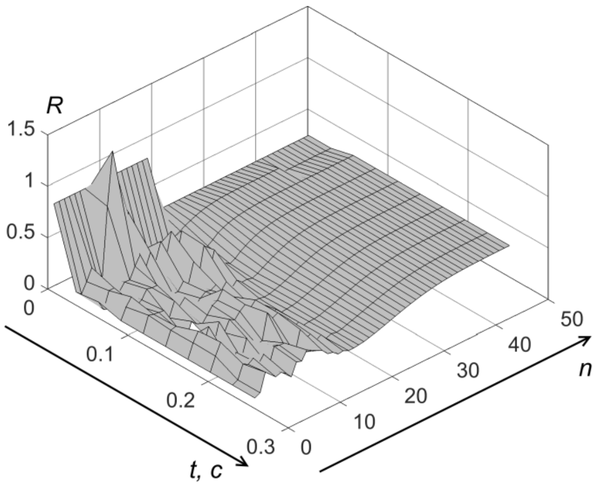

Рис. 7. Расчетное пространственно-временное распределение вероятностей переноса частиц из ячеек цепи в переходном процессе для случая потери вычислительной устойчивости

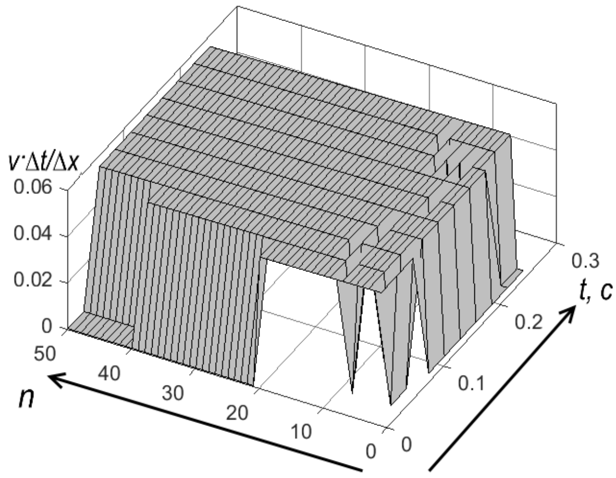

Рис. 8. Расчетное пространственно-временное распределение вероятностей конвективного переноса частиц из ячеек цепи в переходном процессе для случая потери вычислительной устойчивости

Во-вторых, недопустимые значения вероятностей происходят во «внутренних» ячейках слоя (т.е. не в первой и не в последней ячейках). Физически такая картина может быть интерпретирована только следующим образом: диффузионный перенос, который априорно является симметричным, обеспечивает заброс частиц из ячейки и вверх и вниз, несмотря на то, что в целом слой расширяется и скорость частиц положительна. В результате в некоторые «внутренние» ячейки обеспечивается поступление материала сверху (благодаря диффузионным вероятностям) и снизу (из-за конвективного переноса) в количестве, превышающем физическую вместимость ячейки. Последнее означает утрату задачей физического смысла, а в вычислительном отношении ведет к потере устойчивости алгоритма расчета.

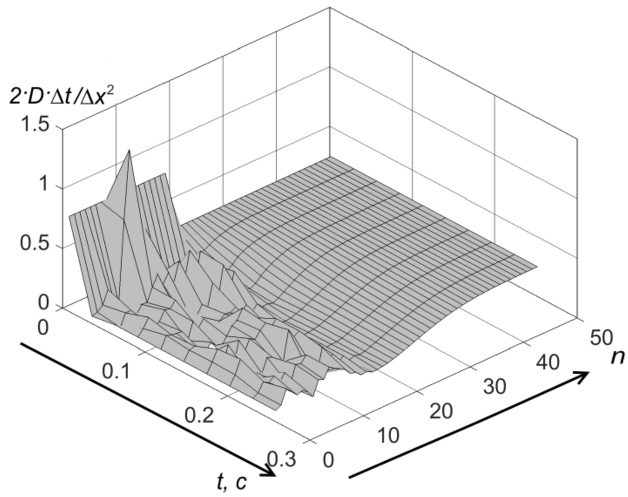

Рис. 9. Расчетное пространственно-временное распределение значений вероятностей диффузионного переноса частиц из ячеек цепи в переходном процессе для случая потери вычислительной устойчивости

Выводы. В результате выполненного исследования устойчивости разностной схемы алгоритма расчета процесса формирования псевдоожиженного слоя монодисперсного сыпучего материала сформулирован критерий устойчивости алгоритма, отражающий влияние пространственно-временных параметров дискретизации задачи на стабильность вычислительных процедур. Рассмотренные случаи влияния частоты временной дискретизации на устойчивость получаемого решения показали, что наиболее значимый вклад в процесс потери устойчивости вносит макродиффузионный параметр движения частиц.

Список литературы

1. **Vinogradov O.** On a Representative Volume in the Micromechanics of Particulate Composites // Mechanics of Composite Materials. – 2001. – Vol. 37. – P. 245–250.

2. **From** Multiscale Modeling to Meso-Science / J. Li, W. Ge, W. Wang, et. al. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. – 484 p.

3. **Dai Q., Chen C., Qi H.** Influence of meso-scale structures on drag in gas–solid fluidized beds // Powder Technology. – 2016. – Vol. 288. – P. 87–95.

4. **Multiscale** modeling of gas-fluidized beds / M.A. van der Hoef, M. Ye, M. van Sint Annaland, et al. // Advances in chemical engineering. – 2006. – Vol. 31. – P. 65–149.

5. **Самарский А.А.** Введение в численные методы. – СПб.: Лань, 2005. – 288 с.

6. **Higham N.J.** Accuracy and stability of numerical algorithms. – 2nd ed. – PA.: SIAM, 2002. – 680 p.

7. **Огурцов В.А., Федосов С.В., Мизонов В.Е.** Моделирование кинетики виброгрохочения на основе теории цепей Маркова // Строительные материалы. – 2008. – № 5. – С. 33–35.

8. **Митрофанов А.В.** Математическая модель эволюции состояния слоя дисперсного топлива при нагреве и сушке в плотном и псевдоожиженном слое // Вестник ИГЭУ. – 2015. – Вып. 2. – С. 67–70.

9. **Theoretical** Study of Particulate Flows Formation in Circulating Fluidized Bed / V. Mizonov, A. Mitrofanov, A. Camelo, L. Ovchinnikov // Recent Innovations in Chemical Engineering. – 2018. – No. 11(1). – P. 20–28.

10. **Митрофанов А.В., Мизонов В.Е., Tannous K.** Математическая модель эволюции состояния псевдоожиженного слоя при влагопереносе // Известия высших учебных заведений. Сер.: Химия и химическая технология. – 2015. – Т. 58, вып. 4. – С. 75–78.

11. **Разработка** вероятностно-статистической модели расширения и аксиальной структуры псевдоожиженного слоя частиц антрацита / А.В. Митрофанов, В.Е. Мизонов, А.Н. Беляков, Н.С. Шпейнова // Вестник ИГЭУ. – 2020. – Вып. 6. – С. 68–76.

12. **Dehling H.G., Hoffmann A.C., Stuut H.W.** Stochastic models for transport in a fluidized bed // SIAM J. Appl. Math. – 1999. – Vol. 60. – P. 337–358.

13. **A Markov** chain model to describe fluidization of particles with time-varying properties / A.V. Mitrofanov, V.E. Mizonov, K. Tannous, L.N. Ovchinnikov // Particulate Science and Technology. – 2018. – Vol. 36, No. 2. – P. 244–253.

14. **Berthiaux H., Mizonov V., Zhukov V.** Application of the theory of Markov chains to model different processes in particle technology // Powder Technol. – 2005. – No. 157. – P. 128–137.

15. **Khan A.R., Richardson J.F.** The Resistance to Motion of a Solid Sphere in a Fluid // Chem. Eng. Commun. – 1987. – Vol. 62. – P. 135–150.

16. **Esin A., Altun M.** Correlation of axial mixing of solids in fluidized beds by a dispersion coefficient // Powder technology. – 1984. – Vol. 39. – P. 241–244.

References

1. Vinogradov, O. On a Representative Volume in the Micromechanics of Particulate Composites. *Mechanics of Composite Materials*, 2001, vol. 37, pp. 245–250.

2. Li, J., Ge, W., Wang, W., Yang, N., Liu, X., Wang, L., He, X., Wang, X., Wang, J., Kwauk, M. From Multiscale Modeling to Meso-Science. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. 484 p.

3. Dai, Q., Chen, C., Qi, H. Influence of meso-scale structures on drag in gas–solid fluidized beds. *Powder Technology*, 2016, vol. 288, pp. 87–95.

4. Van der Hoef, M.A., Ye, M., van Sint Annaland, M., Andrews, A.T., Sundaresan, S., Kuipers, H.A.M. Multiscale modeling of gas-fluidized beds. *Advances in chemical engineering*, 2006, vol. 31, pp. 65–149.

5. Samarskiy, A.A. *Vvedenie v chislennye metody* [Introduction to numerical methods]. Saint-Petersburg: Lan', 2005. 288 p.

6. Higham, N.J. Accuracy and stability of numerical algorithms. PA.: SIAM, 2002. 680 p.

7. Ogurtsov, V.A., Fedosov, S.V., Mizonov, V.E. Modelirovanie kinetiki vibrogrokhocheniya na osnove teorii tsepey Markova [Modelling of vibration screening kinetics based on Markov chain theory]. *Stroitel'nye materialy*, 2008, no. 5, pp. 33–35.

8. Mitrofanov, A.V. Matematicheskaya model' evolyutsii sostoyaniya sloya dispersnogo topliva pri nagreve i sushke v plotnom i psevdoozhizhennom sloe [Mathematical model of state evolution of dispersed fuel bed under heating and drying in a dense fluidized bed]. *Vestnik IGEU*, 2015, issue 2, pp. 67–70.

9. Mizonov, V., Mitrofanov, A., Camelo, A., Ovchinnikov, L. Theoretical Study of Particulate Flows Formation in Circulating Fluidized Bed. *Recent Innovations in Chemical Engineering,* 2018, no. 11 (1), pp. 20–28.

10. Mitrofanov, A.V., Mizonov, V.E., Tannous, K. Matematicheskaya model' evolyutsii sostoyaniya psevdoozhizhennogo sloya pri vlagoperenose [Mathematical model of state evolution of fluidized bed during moisture transfer]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Seriya Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya*, 2015, vol. 58, issue 4, pp. 75–78.

11. Mitrofanov, A.V., Mizonov, V.E., Belyakov, A.N., Shpeynova, N.S. Razrabotka veroyatnostno-statisticheskoy modeli rasshireniya i aksial'noy struktury psevdoozhizhennogo sloya chastits antratsita [Development of the stochastic model of particulate coal fluidized bed expansion and axial structure]. *Vestnik IGEU*, 2020, issue 6, pp. 68–76.

12. Dehling, H.G., Hoffmann, A.C., Stuut, H.W. Stochastic models for transport in a

fluidized bed. *SIAM J. Appl. Math*., 1999, vol. 60, pp. 337–358.

13. Mitrofanov, A.V., Mizonov, V.E., Tannous, K., Ovchinnikov, L.N. A Markov chain model to describe fluidization of particles with time-varying properties. *Particulate Science and Technology*, 2018, vol. 36, no. 2, pp. 244–253.

14. Berthiaux, H., Mizonov, V., Zhukov, V. Application of the theory of Markov chains to model different processes in particle technology. *Powder Technol*, 2005, no. 157, pp. 128–137.

15. Khan, A.R., Richardson, J.F. The Resistance to Motion of a Solid Sphere in a Fluid. *Chem. Eng. Commun*, 1987, vol. 62, pp. 135–150.

16. Esin, A., Altun, M. Correlation of axial mixing of solids in fluidized beds by a dispersion coefficient. *Powder technology*, 1984, vol. 39, pp. 241–244.