УДК 539.3

Численное исследование параметрических колебаний трубопровода при пульсирующем потоке жидкости

Б.А. Худаяров
Ташкентский институт ирригации и мелиорации, г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: bakht-flpo@yandex.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Широкое использование новых композиционных материалов в объектах атомной энергетики, в авиастроении, нефтегазовой промышленности, в объектах химического производства, а также в других отраслях машиностроения требует дальнейшего совершенствования механических моделей деформируемых тел и разработки методов и методик их расчета с учетом вязкоупругих свойств материала тонкостенных конструкций. В этих условиях математическое моделирование динамических процессов трубопроводов с газо-жидкостью становится особенно актуальным.
Материалы и методы: Для описания процессов деформирования трубопроводов используется интегральная модель Больцмана-Вольтерра со слабосингулярными ядрами наследственности. С помощью метода Бубнова–Галеркина математическая модель задачи сведена к исследованию системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений, где независимой переменной является время. Решение интегро-дифференциальных уравнений находится численным методом, базирующемся на исключении особенности в ядре релаксации интегрального оператора.
Результаты: Построена математическая модель задачи о параметрических колебаниях вязкоупругих трубопроводов большого диаметра с протекающей пульсирующей жидкостью. Разработан вычислительный алгоритм, основанный на исключении особенностей интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами, с последующим использованием квадратурных формул для решения задач динамики вязкоупругих трубопроводов с протекающей пульсирующей жидкостью. Численно исследованы влияние сингулярности в ядрах наследственности и частота возбуждения на колебания конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами.
Выводы: Учет вязкоупругих свойств материала конструкций приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний на 20–40 %. Увеличение значения параметра возбуждения, определяемого технологией работы компрессорных станций, приводит к увеличению амплитуды и частоты колебаний трубопровода.

Ключевые слова: математическая модель, параметрические колебания, интегро-дифференциальные уравнения, трубопровод, вязкоупругость, нелинейные колебания, численный метод.

Numerical research into parametric vibrations of pipeline in case of pulsating liquid flows

B.A. Khudayarov
Tashkent Institute of Irrigation And Melioration, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: bakht-flpo@yandex.ru

Abstract

Background: The widespread use of new composite materials at nuclear power facilities, in aircraft, oil and gas industries, at chemical production facilities, as well as other branches of engineering requires further improvement of mechanical models of deformable bodies and the development of methods and techniques of their calculation taking account of the viscoelastic properties of thin-walled structures material. Under these conditions, mathematical modeling of dynamic processes of pipelines with gas-liquid becomes especially important.
Materials and Methods: The pipeline deformation processes are described by using the integrated model of the Boltzmann-Volterra with weakly-singular hereditary kernels. With the help of the Bubnov-Galerkin method the mathematical model of the problem is reduced to the study of a system of ordinary integro-differential equations, where the independent variable is time. The solution to the integral-differential equations (IDE) is found by a numerical method based on elimination of singularity in the relaxation kernel of the integral operator.
Results: A mathematical model has been built to describe the problem of parametric vibrations of large viscoelastic pipelines with pulsating fluid flows. A computational algorithm has been developed based on elimination of singularity of integral and integro-differential equations with singular kernels, and subsequent use of quadrature formulas to solve the problems of dynamics of viscoelastic pipelines with pulsating fluid flows. The author has also investigated the influence of singularity in hereditary kernels and the excitation frequency on vibrations of structures with viscoelastic properties.
Conclusions: The account of viscoelastic properties of material structures reduces the amplitude and the oscillation frequency by 20–40 %. Increasing the excitation value depending on compressor workstation technology raises the amplitude and frequency of pipeline oscillation.

Key words: mathematical model, parametric oscillations, integro-differential equations, pipeline, viscoelasticity, nonlinear vibrations, numerical method.

DOI: 10.17588/2072-2672.2016.5.054-059

Введение. Вибрация трубопроводов является фактором, оказывающим существенное влияние на надежность, долговечность, производительность и другие параметры при эксплуатации энергетических и технологических установок и присоединенных механических систем. Ее воздействие может вызвать целый ряд негативных последствий: разрушение самих трубопроводов; соединений трубопроводов с другими агрегатами; нарушение герметичности уплотнений и др. [1, 2]. Следует отметить, что аварии, связанные с разрушением трубопроводов энергетических и технологических установок, имеют тенденцию к росту и вызывают другие опасные последствия, например: пожары; аварийные разливы технологических, горючих, экологически опасных жидкостей [3, 4]. Таким образом, необходимо проведение специальных исследований для решения задачи снижения вибрации трубопроводных систем [5].

В связи с этим необходима разработка математической модели, численного алгоритма и компьютерной программы для решения задачи о нелинейных параметрических колебаниях вязкоупругих тонкостенных трубопроводов большого диаметра на базе теории оболочек [6, 7].

Постановка задачи и методы решения. Рассмотрим поведение трубопро-вода типа цилиндрической оболочки, внутри которой протекает пульсирующая жидкость. Скорость жидкости $U(t)$ изменяется по закону

$U(t) = U_0(1+\mu_1 cos\gamma_1 t)$.

Уравнения движения вязкоупругой оболочки в перемещениях запишутся в следующем виде:

$$(1-R^*)\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\theta}+L_1(w)\right\}-$$
$$-\rho\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0;$$
$$\left(1-R^*\right)\left\{\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta}+L_2\left(w\right)\right\}-$$
$$-\rho\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0;$$
$$-D(1-R^*)\nabla^4 w+L_3^*(u,v,w)+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q, \qquad (1)$$

где D – цилиндрическая жесткость трубы; μ – коэффициент Пуассона материала трубы; E – модуль упругости материала трубы; ρ – его плотность; R − радиус кривизны срединной поверхности; h – толщина стенки трубы; μ_1 – параметр возбуждения; γ_1 – частота возбуждения; R^* – интегральный оператор вида $R^*\varphi(t)=\int_0^t R(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$, $R(t-\tau)$ – ядро релаксации; операторы $L_1(w)$, $L_2(w)$, $L_3^*\left(u,v,w\right)$ будут такими:

$$L_1(w)=-\frac{\mu}{R}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2R^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta}+\frac{1-\mu}{2R^2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2};$$
$$L_2\left(w\right)=-\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta}+\frac{1-\mu}{2R}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$
$$L_3^*\left(u,v,w\right)=\left(1-R^*\right)\frac{Eh}{1-\mu^2}\left\{-\frac{\mu}{R}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{w}{R^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\mu}{2R}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{R^3}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2\right\}-\frac{Eh}{1-\mu^2}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\left(1-R^*\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mu}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{\mu w}{R}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1-\mu}{2R}\frac{\partial w}{\partial\theta}\left(1-R^*\right)\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}-$$
$$-\frac{Eh}{1-\mu^2}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta}\left(1-R^*\right)\left[\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{w}{R}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(1-\mu\right)}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\left(1-R^*\right)\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\};$$

q – давление жидкости на стенку трубопровода:

$$q=-\varphi_{\alpha m}^*\rho\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+U_0^2\left(1+\mu_1 cos\gamma_1 t\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

где $-\varphi_{\alpha m}^*\rho$ – присоединенная масса жидкости; m – число волн, образующихся по окружности; α – волновое число или постоянная распространения фазы.

Решение систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) в частных производных (1) при различных граничных условиях и при наличии сингулярных ядер наследственности представляет собой значительные математические трудности. Поэтому естественным способом решения этих систем является дискретизация по пространственным переменным и получение системы разрешающих нелинейных ИДУ относительно функций времени.

Будем искать приближенное решение системы (1) в следующем виде:

$$u\left(x,\theta,t\right)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}u_{nm}\left(t\right)\cos\frac{n\pi x}{L}\sin m\theta;$$
$$v\left(x,\theta,t\right)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}v_{nm}\left(t\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\cos m\theta;$$
$$w\left(x,\theta,t\right)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}w_{nm}\left(t\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin m\theta,$$

где $u_{nm}(t)$, $v_{nm}(t)$, $w_{nm}(t)$ – неизвестные функции времени.

Подставляя (2) в систему **(1)** и применяя метод Бубнова–Галеркина, получим систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\ddot{u}_{kl}+\left(1-R^*\right)\Bigg\{\left(k^2\pi^2\delta^2\gamma^2+\frac{1-\mu}{2}l^2\delta^2\right)u_{kl}-$$

$$-\frac{1-\mu}{2}kl\pi\gamma\delta^2 v_{kl}+\mu\delta^2\gamma^2k\pi w_{kl}+$$

$$+\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}\left(\frac{ni^2\pi^2}{2}\gamma^3\delta+\frac{1-\mu}{2}\frac{nr^2}{2}\gamma\delta\right)\bar{\Delta}_{1klnmir}w_{nm}w_{ir}-$$

$$-\frac{1+\mu}{2}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}\frac{imr}{2}\gamma\delta\bar{\Delta}_{2klnmir}w_{nm}w_{ir}\Bigg\}=0,$$

$$\ddot{v}_{kl}+\left(1-R^*\right)\Bigg\{\left[\frac{1-\mu}{2}k^2\pi^2\delta^2\gamma^2+l^2\delta^2\right]v_{kl}-$$

$$-\frac{1+\mu}{2}kl\pi\gamma\delta^2u_{kl}-l\delta^2w_{kl}-\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}\frac{mr^2}{2\pi}\delta\bar{\Delta}_{3klnmir}w_{nm}w_{ir}+$$

$$+\frac{1+\mu}{2}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}\frac{inr\pi}{2}\gamma^2\delta\bar{\Delta}_{4klnmir}w_{nm}w_{ir}-$$

$$-\frac{1-\mu}{2}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}\frac{i^2m\pi}{2}\gamma^2\delta\bar{\Delta}_{3klnmir}w_{nm}w_{ir}\Bigg\}=0,$$

$$\left(1+\varphi_{\alpha l}^*\right)\ddot{w}_{kl}+\left(1-R^*\right)\Bigg\{\left(\frac{1}{12}\left[k^2\pi^2\gamma^2+l^2\right]^2+\delta^2\right)w_{kl}+$$

$$+\pi\mu\gamma\delta^2ku_{kl}-l\delta^2v_{kl}-\frac{\delta}{4\pi}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}mr\bar{\Delta}_{5klnmir}w_{nm}w_{ir}-$$

$$-\frac{\pi\mu\gamma^2\delta}{4}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}ni\bar{\Delta}_{6klnmir}w_{nm}w_{ir}\Bigg\}+\frac{1-\mu}{4}\times$$

$$\times\gamma\delta\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}w_{nm}n\left(1-R^*\right)\left[\gamma\pi irv_{ir}-r^2u_{ir}\right]\bar{\Delta}_{6klnmir}+$$

$$+\frac{\delta}{2}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}mw_{nm}\left(1-R^*\right)\left[ir\mu\gamma u_{ir}-\frac{r^2}{\pi}v_{ir}+\frac{r}{\pi}w_{ir}\right]\bar{\Delta}_{5klnmir}+$$

$$+\frac{1-\mu}{4}\delta\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}mw_{nm}\left(1-R^*\right)\left[ir\gamma u_{ir}-\gamma^2i^2\pi v_{ir}\right]\bar{\Delta}_{5klnmir}-$$

$$-\frac{\delta}{2}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}nw_{nm}\left(1-R^*\right)\left[ir\mu\gamma^2\pi v_{ir}-i^2\gamma^3\pi^2u_{ir}-\mu\pi i\gamma^2w_{ir}\right]\times$$

$$\times\bar{\Delta}_{6klnmir}-\frac{1-\mu}{4}\delta\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}nmw_{nm}\left(1-R^*\right)\left[r\gamma u_{ir}-i\gamma^2\pi v_{ir}\right]-$$

$$-\bar{\Delta}_{7klnmir}-\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}m^2w_{nm}\left(1-R^*\right)\left[i\mu\gamma u_{ir}-\frac{r}{\pi}v_{ir}+\frac{1}{\pi}w_{ir}\right]\times$$

$$\times\frac{\delta}{2}\bar{\Delta}_{8klnmir}-\frac{1-\mu}{4}\delta\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}nmw_{nm}\left(1-R^*\right)\times$$

$$\times\left[r\gamma u_{ir}-i\gamma^2\pi v_{ir}\right]\bar{\Delta}_{7klnmir}-\frac{\delta}{2}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}n^2w_{nm}\left(1-R^*\right)\times$$

$$\times\left[i\gamma^3\pi^2u_{ir}-\mu r\gamma^2\pi v_{ir}+\mu\gamma^2\pi w_{ir}\right]\vec{\Delta}_{8klnmir}-$$

$$-\delta^2M^{*2}(1+\mu_1cos\gamma_1t)\gamma^2M_E^2k^2\pi^2w_{kl}=0, \tag{3}$$

$u_{nm}(0)=u_{0nm}$, $\dot{u}_{nm}(0)=\dot{u}_{0nm}$, $v_{nm}(0)=v_{0nm}$, $\dot{v}_{nm}(0)=\dot{v}_{0nm}$, $w_{nm}(0)=w_{0nm}$, $\dot{w}_{nm}(0)=\dot{w}_{0nm}$,

где $\delta=\dfrac{R}{h}$, $\gamma=\dfrac{R}{L}$, $M^*=\dfrac{U}{V_\infty}$, $M_E=\sqrt{\dfrac{E}{\rho V_\infty^2}}$; V_∞ – скорость звука; $\bar{\Delta}_{1k\ln mir}$, $\bar{\Delta}_{2k\ln mir}$, $\bar{\Delta}_{3k\ln mir}$, $\bar{\Delta}_{4k\ln mir}$, $\bar{\Delta}_{5k\ln mir}$, $\bar{\Delta}_{6k\ln mir}$, $\bar{\Delta}_{7k\ln mir}$, $\bar{\Delta}_{8k\ln mir}$ – безразмерные коэффициенты.

Численные результаты. Решение ИДУ (3) находится численным методом, основанным на использовании квадратурных формул [8–11]. На основе этого метода описан алгоритм численного решения системы (3). Интегрируя систему (3) два раза по t, можно записать ее в интегральной форме, с помощью рационального преобразования исключим сингулярные особенности интегрального оператора R^*. Затем, полагая $t = t_i$, $t_i = i\cdot\Delta t$, i = 1, 2, … (Δt – шаг интегрирования) и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеций для вычисления $u_{ikl} = u_{kl}(t_i)$, $v_{ikl} = v_{kl}(t_i)$ и $w_{ikl} = w_{kl}(t_i)$, получим следующие рекуррентные формулы для ядра Колтунова–Ржаницына

$$\left(R(t)=A\cdot\exp(-\beta t)\cdot t^{\alpha-1},\ \ 0<\alpha<1\right):$$

$$u_{pkl}=u_{okl}+\dot{u}_{okl}t_p-\sum_{j=0}^{p-1}A_j\left(t_p-t_j\right)\times$$

$$\times\Bigg\{\varphi_{kl}\left(u_{jkl}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_se^{-\beta t_s}u_{j-s,kl}\right)-$$

$$-\psi_{kl}\left(v_{kl}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_se^{-\beta t_s}v_{j-s,kl}\right)+$$

$$+\omega_k\left(w_{jkl}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_se^{-\beta t_s}w_{j-s,kl}\right)+$$

$$+\frac{\delta\gamma}{4}\sum_{n,i=1}\sum_{m,r=1}D_{klnmir}\left(w_{jnm}w_{jir}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_se^{-\beta t_s}w_{j-s,nm}w_{j-s,ir}\right)\Bigg\};$$

$$v_{pkl}=v_{okl}+\dot{v}_{okl}t_p-\sum_{j=0}^{p-1}A_j\left(t_p-t_j\right)\times$$

$$\times\Bigg\{\aleph_{kl}\left(v_{jkl}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_se^{-\beta t_s}v_{j-s,kl}\right)-\psi_{kl}\left(u_{jkl}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_se^{-\beta t_s}v_{j-s,kl}\right)-$$

$$-d_e\left(w_{jkl}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_se^{-\beta t_s}w_{j-s,kl}\right)+$$

$$+\frac{\delta}{4}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}F_{klnmir}\left(w_{jnm}w_{jir}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_se^{-\beta t_s}w_{j-s,nm}w_{j-s,ir}\right)\Bigg\};$$

$$
\begin{aligned}
& w_{pkl} = w_{okl} + \dot{w}_{okl}\, t_p - \frac{1}{1+\varphi^*_{\alpha l}} \sum_{j=0}^{p-1} A_j \left(t_p - t_j\right) \times \\
& \times \Bigg\{ \Theta_{kl} \left(w_{jke} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s e^{-\beta t_s} w_{j-s,kl} \right) + \\
& + \frac{\omega_k}{\gamma} \left(u_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s e^{-\beta t_s} u_{j-s,kl} \right) - \\
& - d_e \left(v_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s e^{-\beta t_s} v_{j-s,kl} \right) - \\
& - \frac{\delta}{4} \sum_{n,i=1}^{N} \sum_{m,r=1}^{M} G_{klnmir} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s e^{-\beta t_s} w_{j-s,nm} w_{j-s,ir} \right) + \\
& + \frac{\delta}{4} \sum_{n,i=1}^{N} \sum_{m,r=1}^{M} w_{jnm} \Bigg\langle H_{klnmir} \left(u_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s e^{-\beta t_s} u_{j-s,ir} \right) + \\
& + Z_{klnmir} \left(v_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s e^{-\beta t_s} v_{j-s,ir} \right) + \\
& + C_{klnmir} \left(w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s e^{-\beta t_s} w_{j-s,ir} \right) \Bigg\rangle - \\
& - \eta_{kl} \left(1 + \mu_1 \cos\left(\gamma_1 t_p\right)\right)^2 w_{jkl} \Bigg\}, \\
& p = 1,2,3,\ldots; \quad k = 1,2,\ldots,N; \quad l = 1,2,\ldots,M,
\end{aligned} \qquad (4)
$$

где A_j, B_s – числовые коэффициенты, не зависящие от выбора подынтегральных функций и принимающие различные значения в зависимости от использования квадратурных формул; φ_{kl}, ψ_{kl}, $\aleph_{kl}$, Θ_{kl}, η_{kl}, ω_k, d_e, D_{klnmir}, G_{klnmir}, C_{klnmir}, F_{klnmir}, H_{klnmir}, Z_{klnmir} – безразмерные коэффициенты.

На основе разработанного алгоритма создан пакет прикладных компьютерных программ. Результаты вычислений отражаются графиками, приведенными на рис. 1, 2.

На рис. 1 сопоставлены кривые изменения во времени перемещений w срединной точки упругого (A = 0 – кривая а) и вязкоупругого трубопроводов типа цилиндрических оболочек (A = 0,05; 0.1 – кривые b, c). Учет вязкоупругих свойств материала трубопровода приводит к затуханию колебательного процесса, при этом, хотя решения упругой и вязкоупругой задач в начальный период времени мало отличаются друг от друга, с течением времени вязкоупругие свойства оказывают существенное влияние на решение. Аналогичная картина наблюдаются и при исследовании изменений функций u и v.

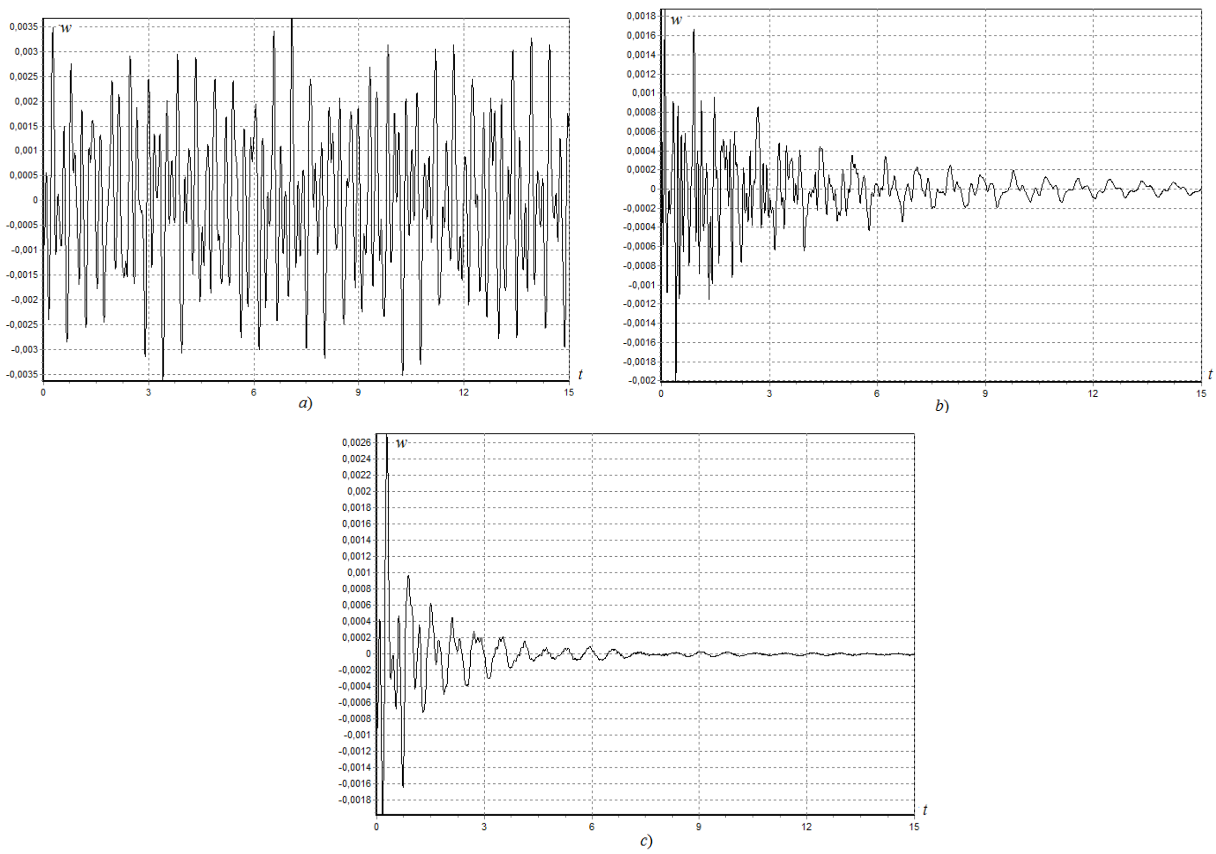
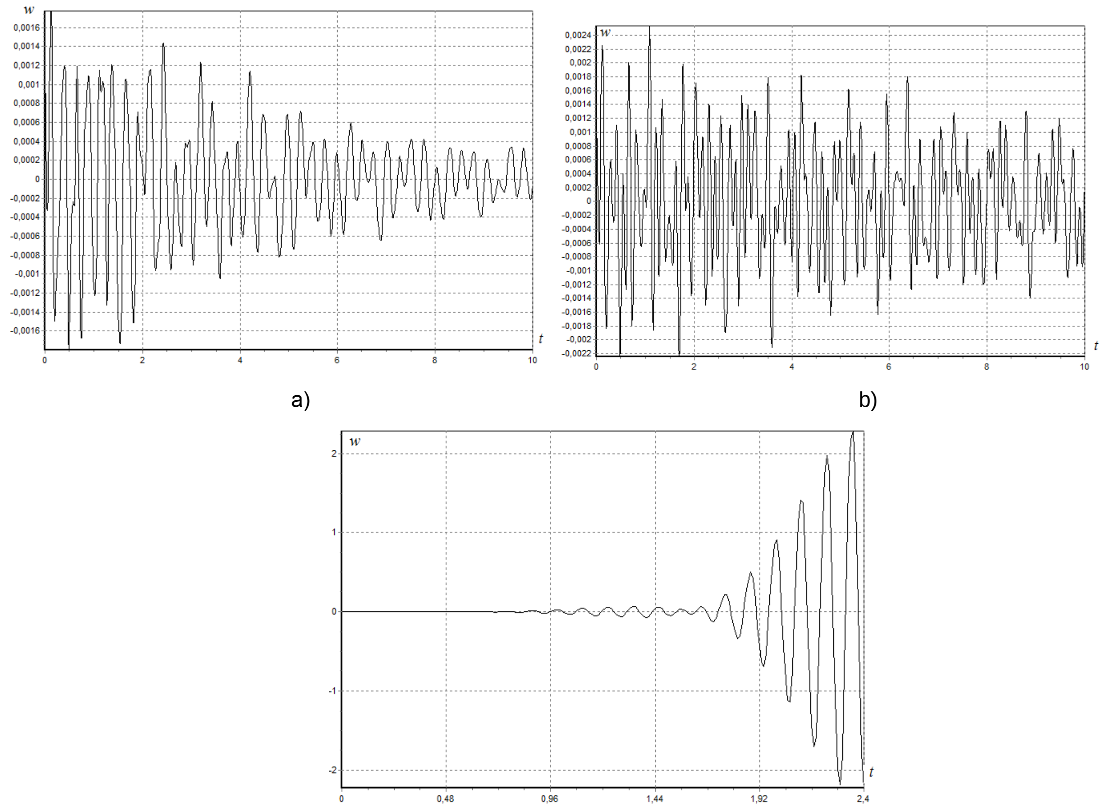


Рис. 1. Зависимости прогиба от времени при A = 0 (a); A = 0,05 (b); A = 0,1 (c); α = 0,25; β = 0,005; γ = 0,2; δ = 12; N = 5; M = 2



a) b)

c)

Рис. 2. Зависимость прогиба от времени при γ_1 = 75 Гц (a), γ_1 = 150 Гц (b), γ_1 = 250 Гц (c); A = 0,01; α = 0,25; β = 0,005; δ = 10; N = 5; M = 2

Влияние параметра γ_1 на колебательный процесс показано на рис. 2. Анализ полученной зависимости показывает, что увеличение значения параметра возбуждения приводит к увеличению амплитуды и частоты колебаний.

Выводы. Необходимо отметить, что алгоритм предлагаемого метода позволяет детально исследовать влияние геометрических нелинейностей и вязкоупругих свойств материала конструкций на колебательные процессы вязкоупругих трубопроводов, в частности, при исследовании свободных и параметрических колебаний трубопроводов на базе теории идеально-упругих оболочек.

Список литературы

1. **Шорин В.П.** Устранение колебаний в авиационных трубопроводах. – М.: Машиностроение, 1980. – 156 с.

2. **Прокофьев А.Б., Шахматов Е.В.** Моделирование виброакустических процессов в трубопроводных системах. – Самара: Изд-во САГУ, 2008. – 168 с.

3. **Вибрация** трубопроводных систем энергетических установок как фактор экологического риска и подходы к ее снижению / А.В. Васильев, О.В. Кипуров, Е.В. Васильев и др. // ELIT 2011: сб. тр. III Междунар. экологического конгресса. – Тольятти: ТГУ, 2011. – Т. 6. Ч. 1. – С. 99–104.

4. **Белов И.А.** О влиянии скорости жидкости на динамику прямого трубопровода // Вестник ИГЭУ. – 2007. – Вып. 2. – С. 1–3.

5. **Миронова Т.Б., Прокофьев А.Б., Шорин В.П.** Методики конечно-элементного моделирования виброакустических характеристик трубопроводов с пульсирующим потоком жидкости // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. – 2012. – № 1(32). – С. 135–140.

6. **Вольмир А.С.** Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

7. **Григолюк Э.И., Мамай В.И.** Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 272 с.

8. **Бадалов Ф.Б.** Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. – Ташкент: Мехнат, 1987. – 269 с.

9. **Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М.** О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51, № 5. – С. 867–871.

10. **Худаяров Б.А., Бандурин Н.Г.** Нелинейный флаттер вязкоупругих ортотропных цилиндрических панелей // Математическое моделирование. РАН. – 2005. – Т. 17, № 10. – С. 79–86.

11. **Бадалов Ф.Б., Худаяров Б.А., Абдукаримов А.** Исследование влияния ядра наследственности на решение линейных и нелинейных динамических задач наследственно-деформируемых систем // Проблемы машиностроения и надежности

машин. Российская академия наук. – 2007. – № 4. – С. 107–110.

References

1. Shorin, V.P. *Ustranenie kolebaniy v aviatsionnykh truboprovodakh* [Eliminating vibrations in air ducts]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 156 p.

2. Prokofyev, A.B., Shakhmatov, E.V. *Modelirovanie vibroakusticheskikh protsessov v truboprovodnykh sistemakh* [Vibro-acoustic simulation processes in pipeline systems]. Samara, Izdatel'stvo SAGU, 2008. 168 p.

3. Vasil'ev, A.V., Kipurov, O.V., Vasil'ev, E.V. Vibratsiya truboprovodnykh sistem energeticheskikh ustanovok kak faktor ekologicheskogo riska i podkhody k ee snizheniyu [Vibration pipeline systems of power plants as a factor of environmental risk and approaches to its reduction]. *ELIT 2011: sbornik trudov III Mezhdunarodnogo ekologicheskogo kongressa* [ELIT 2011: collected works of the IIId International Ecological Congress]. Tol'yatti, TGU, 2011, vol. 6, part 1, pp. 99–104.

4. Belov, I.A. O vliyanii skorosti zhidkosti na dinamiku pryamogo truboprovoda [Effect of fluid velocity on the direct pipeline dynamics]. *Vestnik IGEU*, 2007, issue 2, pp. 1–3.

5. Mironova, T.B., Prokofyev, A.B., Shorin, V.P. Metodiki konechno-elementnogo modelirovaniya vibroakusticheskikh kharakteristik truboprovodov s pul'siruyushchim potokom zhidkosti [Methods of finite-element modeling of vibro-acoustic characteristics of pipelines with pulsating liquid]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta*, 2012, no. 1(32), pp. 135–140.

6. Vol'mir, A.S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza. Zadachi gidrouprugosti* [Casing in liquid and gas flow. Hydroelasticity problems]. Moscow, Nauka, 1979. 320 p.

7. Grigolyuk, E.I., Mamay, V.I. *Nelineynoe deformirovanie tonkostennykh konstruktsiy* [Nonlinear deformation of thin-walled structures]. Moscow, Nauka. FIZMATLIT, 1997. 272 p.

8. Badalov, F.B. *Metody resheniya integral'nykh i integro-differentsial'nykh uravneniy nasledstvennoy teorii vyazkouprugosti* [Methods for solving integral and integro-differential equations of the hereditary viscoelasticity theory]. Tashkent, Mekhnat, 1987. 269 p.

9. Badalov, F.B., Eshmatov, X., Yusupov, M. O nekotorykh metodakh resheniya sistem integro-differentsial'nykh uravneniy, vstrechayushchikhsya v zadachakh vyazkouprugosti [Some methods of solving systems of integro-differential equations in problems of viscoelasticity]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1987, vol. 51, no. 5, pp. 867–871.

10. Khudayarov, B.A., Bandurin, N.G. Nelineynyy flatter vyazkouprugikh ortotropnykh tsilindricheskikh paneley [Nonlinear flutter of viscoelastic orthotropic cylindrical panels]. *Matematicheskoe modelirovanie. RAN,* 2005, vol. 17, no. 10, pp. 79–86.

11. Badalov, F.B., Khudayarov, B.A., Abdukarimov, A. Issledovanie vliyaniya yadra nasledstvennosti na reshenie lineynykh i nelineynykh dinamicheskikh zadach nasledstvenno-deformiruemykh system [Investigation of the heredity influence on the core solution to linear and nonlinear dynamic problems of genetically-deformed systems]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin. Rossiyskaya akademiya nauk*, 2007, no. 4, pp. 107–110.

Худаяров Бахтияр Алимович,
Ташкентский институт ирригации и мелиорации,
доктор технических наук, зав. кафедрой высшей математики,
e-mail: bakht-flpo@yandex.ru