

УДК 621.313.333

Разработка уточненной математической модели синхронного двигателя с постоянными магнитами для расчетов в реальном времени

В.А. Мартынов, А.Н. Голубев, А.В. Алейников
ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: zav@toe.ispu.ru, alenikgo@yandex.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: В настоящее время математическое моделирование динамических режимов работы m -фазных синхронных двигателей ($m \geq 3$) основано на моделях, имеющих ряд существенных допущений, в числе которых допущение о гладком воздушном зазоре машины и отсутствии насыщения магнитопровода. Использование полевых моделей возможно только при проектировании в связи со значительным использованием машинного времени и не подходит для управления в реальном времени. В связи с этим актуальной становится разработка математической модели синхронного двигателя с постоянными магнитами, позволяющей вести расчет в режиме реального времени и учитывающей реальную геометрию двигателя, насыщение магнитной цепи, дискретное распределение обмоток по пазам.

Материалы и методы: При разработке математической модели использованы метод переменных состояния и метод моделирования поля в среде Elcut. Для построения разработанной модели использован пакет MatLab Simulink.

Результаты: Предложена математическая модель m -фазного синхронного двигателя с постоянными магнитами, позволяющая, предварительно определив зависимость потокоцепления фаз от угла поворота ротора, обусловленного действием индуктора, методом конечных элементов производить расчет динамических режимов работы в реальном времени. При этом учитывается реальное распределение магнитного поля в активной зоне машины с учетом насыщения магнитной цепи, дискретного распределения многофазной обмотки статора по пазам и перемещения зубчатого сердечника статора относительно ротора с постоянными магнитами.

Выводы: Разработанную модель предлагается использовать в системах управления в реальном времени динамическими режимами работы синхронных двигателей с постоянными магнитами. На ее основе возможна разработка алгоритмов управления двигателем, улучшающих виброшумовые показатели электропривода. Достоверность результатов, полученных посредством нового подхода, подтверждается сопоставлением с результатами, полученными в современных программах расчета методами конечных элементов. При этом данная модель производит расчет работы двигателя в 4 раза быстрее реального времени.

Ключевые слова: синхронный электропривод, математическая модель, многофазный синхронный двигатель, виброшумовые характеристики, возбуждение от постоянных магнитов, пульсация электромагнитного момента.

Development of a mathematical model of synchronous permanent magnet motor for real-time calculations

V.A. Martynov, A.N. Golubev, A.V. Aleynikov
Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation
E-mail: zav@toe.ispu.ru, alenikgo@yandex.ru

Abstract

Background: Mathematical simulation of m -phase synchronous motors ($m \geq 3$) is based on models with assumptions, including the assumption of a smooth air gap of the machine and absence of magnetic circuit saturation. Field models can only be used in designing because such calculations are time-consuming and they are inapplicable to real-time control. All this makes it urgent to develop a mathematical model of the synchronous motor with permanent magnets, allowing real time calculations and accounting for the real geometry of the motor, saturation of the magnetic circuit, discrete distribution of windings in the grooves.

Materials and methods: The state variables method and the method of field simulation in the Elcut were used in this work. MatLab Simulink was applied to building the developed model.

Results: A mathematical model of the m -phase synchronous motor with permanent magnets has been created. The model allows us, after a preliminary determination of the phase flux linkage dependences on the rotor rotation angle caused by the inductor, to calculate the dynamic operating modes in real time by the finite-element method. The model takes into account the actual distribution of the magnetic field in the active zone of the machine and the saturation of the magnetic circuit, the discrete distribution of the multiphase stator winding through the grooves and the displacement of the toothed stator core relative to the rotor with permanent magnets.

Conclusion: The developed model can be used in real-time control systems in dynamic modes of operation of synchronous motors with permanent magnets. It can also become the basis for development of engine control algorithms that improve the vibration values of the electric drive. The reliability of the results obtained by the new approach is con-

firmed by comparing them with the results achieved by the modern programs of the finite element method calculation. This model calculates the engine operation 4 times faster than the real-time.

Key words: Synchronous electric drive, mathematical model, multiphase synchronous motor, vibronoise characteristics, permanent magnet excitation, electromagnetic torque pulsation.

DOI: 10.17588/2072-2672.2017.5.037-043

Введение. В синхронных двигателях с постоянными магнитами (СДПМ) поле возбуждения создается за счет использования магнитных материалов. Благодаря использованию редкоземельных магнитов синхронные двигатели обладают более высокой удельной мощностью по сравнению с эквивалентными двигателями постоянного тока или асинхронными. КПД синхронных двигателей более чем в 2 раза выше по сравнению с асинхронными двигателями той же мощности. Кроме того, развитие технологий изготовления постоянных магнитов (ПМ) привело к широкому их распространению и удешевлению производства. В связи с этим синхронные двигатели с постоянными магнитами получили широкое распространение. Тем не менее для расчетов динамических режимов работы таких двигателей в настоящее время используют, как правило, модели обобщенной двухфазной машины переменного тока, а математическое описание электромагнитных процессов основывается на уравнениях Парка-Горевы [1, 2]. В таких моделях присутствует ряд идеализирующих допущений, в числе которых: предположение о гладком воздушном зазоре; учет только радиального синусоидального или трапецеидального распределения индукции в зазоре; отсутствие учета зубчатости магнитопроводов и насыщения стали магнитной цепи [1, 3, 4].

Использование полевых моделей является наиболее достоверным способом адекватного моделирования режимов работы СДПМ, однако время расчета таких моделей, даже с использованием современных компьютерных средств, весьма значительно [5, 6] и не годится для управления двигателем в реальном времени. Кроме того, перспективным направлением является разработка многофазных электромеханических систем [3]. Это связано с рядом преимуществ, к числу которых относятся повышенная отказоустойчивость системы, улучшенные энергетические и виброшумовые характеристики. В связи с этим актуальной задачей является создание математической модели многофазного электропривода, которая, с одной стороны, учитывала бы специфику протекания электромагнитных процессов в m -фазных машинах на основе использования полевых моделей, а с другой стороны, позволяла бы управлять синхронным электроприводом в реальном времени. Существует подход к моделированию динамических систем, позволяющий совместить быстродействие цепных моделей с точностью и универсальностью полевых моделей [6], однако из-за того, что в них присутствует итерационный расчет поле-

вой модели, они не подходят для интеграции в микропроцессор для управления двигателем.

Методы исследования. Работу любой электрической машины можно описать при помощи уравнений движения вращающихся частей, электромагнитного момента и дифференциальных уравнений электрического состояния ветвей.

Уравнения динамики механической системы, включающей электрическую машину с одной степенью свободы, для вращающихся машин имеют следующий вид [7]:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J}(M_{\text{Э}} - M_{\text{С}}); \quad \frac{d\alpha}{dt} = \Omega, \quad (1)$$

где Ω – угловая частота вращения ротора; α – угол поворота ротора относительно статора в момент времени t ; J – момент инерции ротора; $M_{\text{Э}}$ и $M_{\text{С}}$ – электромагнитный момент и момент сопротивления, приложенные к валу ротора соответственно.

Если принять допущение о том, что токи смещения пренебрежимо малы, то обмотки машины можно рассматривать как электрические цепи с сосредоточенными параметрами (рис. 1). Тогда уравнения переменных состояния для всех m фаз обмоток статора СДПМ в матричной форме будут иметь вид

$$[u] = \frac{d[\Psi]}{dt} + [R][i], \quad (2)$$

где $[u] = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]^T$ – матрица-столбец мгновенных напряжений, приложенных к фазам обмотки статора; $[\Psi] = [\Psi_1 \ \Psi_2 \ \dots \ \Psi_m]^T$ – матрица-столбец мгновенных потокосцеплений фаз обмотки статора; $[R] = \text{diag}[R_1 \ R_2 \ \dots \ R_m]$ – диагональная матрица активных сопротивлений фазных обмоток; $[i] = [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_m]^T$ – матрица-столбец мгновенных фазных токов.

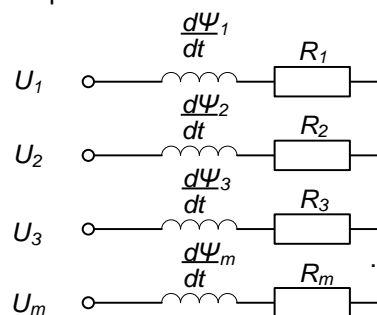


Рис. 1. Электрическая схема m -фазного СДПМ

Поскольку относительная магнитная проницаемость редкоземельных ПМ практически равна единице и на несколько порядков меньше магнитной проницаемости стали, из которой выполнена основная часть магнитопровода машины, то можно принять допущение о том, что действие токов фазных обмоток на насыщение магнитной цепи незначительно и в основном вызвано действием ПМ. Из этого следует, что потокосцепления фаз возможно найти как сумму потокосцеплений от ПМ и токов фазных обмоток [8]:

$$[\Psi] = [\Psi_0] + [L][i], \quad (3)$$

где $[\Psi_0] = [\Psi_{10} \ \Psi_{20} \ \dots \ \Psi_{m0}]^T$ – матрица-столбец потокосцеплений фаз от ПМ ротора при токах, равных нулю;

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1m} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{m1} & L_{m2} & \dots & L_{mm} \end{bmatrix} \text{ – матрица фазных са-}$$

мо- и взаимоиנדуктивностей.

Таким образом, с учетом данных допущений можно составить электрическую схему замещения m -фазного СДПМ, изображенную на рис. 2. При этом уравнение переменных состояния в матричной форме примет вид

$$[u] = \Omega \frac{d[\Psi_0]}{d\alpha} + [L] \frac{d[i]}{dt} + \Omega \frac{d[L]}{d\alpha} [i] + [R][i]. \quad (4)$$

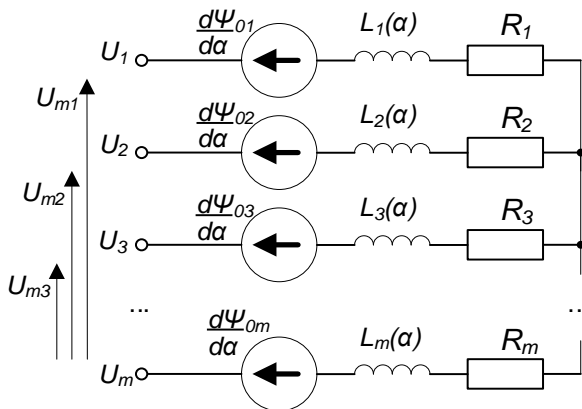


Рис. 2. Электрическая схема замещения m -фазного СДПМ

Как правило, в электрических машинах нейтральный провод отсутствует и к фазам многофазной обмотки статора приложены линейные напряжения. В этом случае ток одной фазы всегда может быть выражен через токи всех остальных фаз в соответствии с первым законом Кирхгофа. В связи с этим количество уравнений, необходимых для расчета электрической цепи, будет на единицу меньше количества фаз $(m-1)$. С учетом этого данную схему можно рассчитать матричным методом контурных токов. Тогда уравнение (4) преобразуется к виду

$$\frac{d[i_k]}{dt} = (B \cdot [L] \cdot B^T)^{-1} ([u_{\Pi}] - B[R]B^T [i_k] - \Omega B \frac{d[L]}{d\alpha} [i_k] - \Omega B \frac{d[\Psi_0]}{dt}), \quad (5)$$

где $[u_{\Pi}]$ – матрица мгновенных значений линейных напряжений; $[i_k]$ – матрица мгновенных значений контурных токов;

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

– матрица главных контуров.

При этом фазные токи ветвей с 1 по $(m-1)$ будут соответствовать контурным, а ток ветви с номером m найдется из первого закона Кирхгофа. В матричной форме уравнение будет иметь вид

$$[i] = [B]^T [i_k]. \quad (7)$$

При этом матрицу линейных напряжений следует формировать из напряжений, входящих в главные контуры.

Электромагнитный момент СДПМ может быть определен через производную коэнергии по углу поворота ротора. Учитывая допущение, что в основном насыщение вызвано действием только ПМ при повороте ротора на малый угол $d\alpha$ и неизменных токах фаз, насыщение магнитной цепи не изменится. Таким образом, величину электромагнитного момента СДПМ можно определить следующим образом [8]:

$$M_{\Theta} = [i]^T \frac{d[\Psi_0]}{d\alpha} + \frac{1}{2} [i]^T \frac{d[L]}{d\alpha} [i]. \quad (8)$$

В симметричных СДПМ кривые потокосцепления от постоянных магнитов всех фаз $\Psi_0(\alpha)$ будут одинаковыми, следовательно, зная зависимость $\Psi_0(\alpha)$, можно определить элементы матрицы $[\Psi_0]$ при любом значении α . Данная зависимость определяется при помощи полевых моделей с учетом реальной геометрии машины и насыщения стали.

Аналогичным образом определяются и элементы матрицы $[L]$. Для этого надо полевою модель изменить таким образом, чтобы все, кроме одного, фазные токи были равны нулю, а постоянные магниты заменяются участками с такой же индуктивностью, но без источников поля. В этом случае формулы для определения индуктивности примут предельно простой вид [9]:

$$L = \frac{2W}{i^2}, \quad (9)$$

где W – энергия магнитного поля.

В случае, если на роторе СДПМ отсутствуют ферромагнитные вставки, то индуктивности фаз не будут зависеть от угла поворота ротора α , следовательно, элементы матрицы $[L]$ могут быть определены один раз для произвольного положения ротора.

Результаты исследования. Данный алгоритм был реализован в программе MatLab (simulink) для трехфазного двигателя с номинальным моментом $M_H = 6$ Нм, номинальным напряжением $U_H = 100$ В, мощностью $P = 1,2$ кВт и числом пар полюсов $2p = 4$. Simulink-схема представлена на рис. 3. Блоки электрической и электромеханической частей реализованы посредством s-функций.

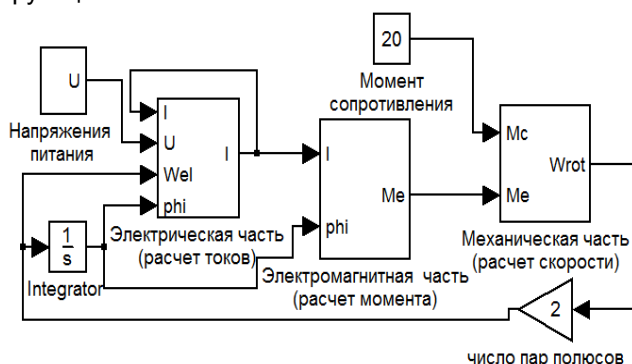


Рис. 3. Simulink-схема математической модели СДПМ

На вход блока электрической части подаются текущие мгновенные значения фазных токов, мгновенные значения линейных напряжений, текущая скорость и угол поворота ротора. В нем реализована система уравнений (5), по которой рассчитываются производные фазных токов и интегрируются методом Рунге-Кутты. При этом в память заложена зависимость потокоцепления фазы, обусловленного действием только постоянных магнитов, от угла поворота ротора α , полученная разложением в ряд Фурье дискретных значений, полученных из программы Elcut.

На вход блока электромагнитной части подаются мгновенные значения фазных токов и угол поворота ротора. В нем рассчитывается момент по формуле (8).

В блоке механической части реализованы формулы(1) на элементах стандартной simulink-библиотеки.

В качестве проверки адекватности разработанной модели было проведено сопоставление результатов расчета, полученных по данному алгоритму, с результатами, полученными при расчете полевой модели в программном комплексе Elcut, для установившегося режима работы при номинальных значениях напряжения, тока, частоты вращения и электромагнитного момента. Результаты представлены на рис. 4 и в таблице. При расчете полевой модели считалось, что магнитный поток не выходит за внешние пределы статорного кольца, для стали и постоянных магнитов задавалась основная кривая

намагничивания, режим работы считался квазиустановившимся.

Из модели брались: угол поворота ротора, мгновенные значения фазных токов и их производных. Эти значения подставлялись в полевую модель двигателя в программе Elcut. Методом конечных элементов определялись значения потокоцепления и электромагнитного момента. Далее ротор в полевой модели поворачивался на небольшой угол $\Delta\alpha$, токи изменялись согласно значениям их производных, снова производился расчет потокоцеплений. Определив производную потокоцеплений, полученных из программы Elcut, рассчитывались значения фазных напряжений по уравнению (2). Результаты расчета представлены в таблице. Погрешность при этом не превысила 3 %.

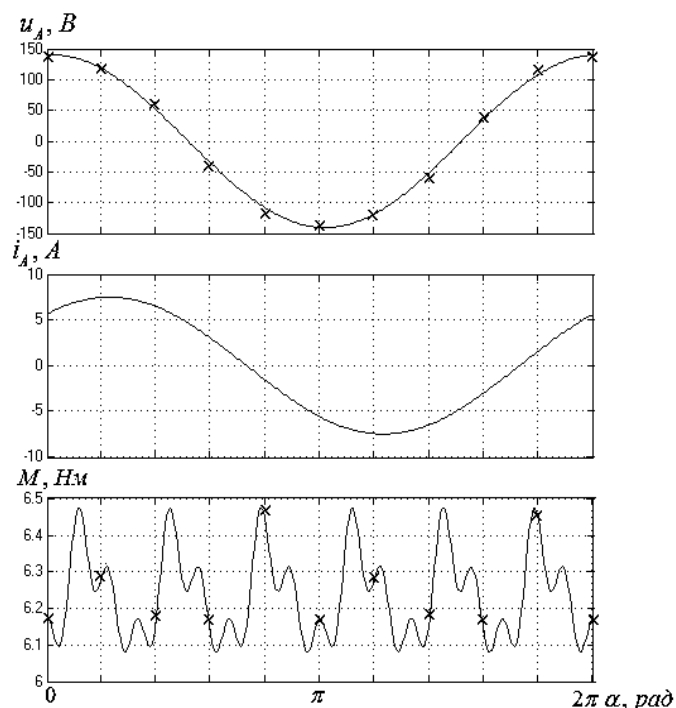


Рис. 4. Результаты расчета работы двигателя в установившемся режиме при питании от синусоидального источника: — — рассчитанные по разработанной модели; x — рассчитанные в Elcut

Сопоставление результатов, полученных по разработанной математической модели, и в программе Elcut

$\alpha, ^\circ$	0	30	60	90
$U_A, В$	141,4	122,5	70,7	0
$d\psi_{A0}/d\alpha, Вб/рад$	0	0,2834	0,3841	0,3926
$i_A, А$	5,318	6,846	6,451	4,744
$d\psi_{AE}/d\alpha, Вб/рад$	0,399	0,324	0,153	-0,035
$U_{El}, В$	141,7	122,8	67,9	1,5

Данная модель легко работает без системы управления, в том числе и плавно пускается посредством постепенного увеличения частоты (рис. 5). Колебания медленно затухают из-за отсутствия на роторе демпфирующих обмоток.

Как известно, действующее значение тока рассчитывается по формуле

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt}, \quad (10)$$

где $i(t)$ – зависимость фазного тока от времени; T – период изменения фазного тока.

В случае если в цепи протекают несинусоидальные токи, определяемые гармониками с порядковыми номерами меньше числа фаз, то действующее значение тока будет равно среднеквадратичному значению, которое легко рассчитать по формуле

$$I = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m i_k^2}. \quad (11)$$

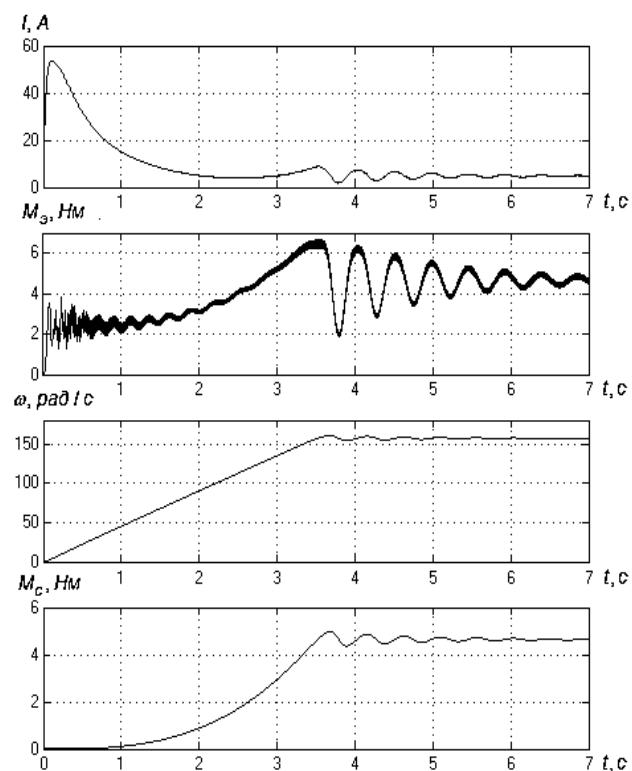


Рис. 5. Частотный пуск СДПМ посредством плавного увеличения частоты синусоидального источника напряжения

Также возможно использование данной модели и с системой управления в d - q координатах (рис. 6). При пуске были введены ограничения по среднеквадратичным значениям напряжений и токов (11), задание на ток по оси d было равно 0.

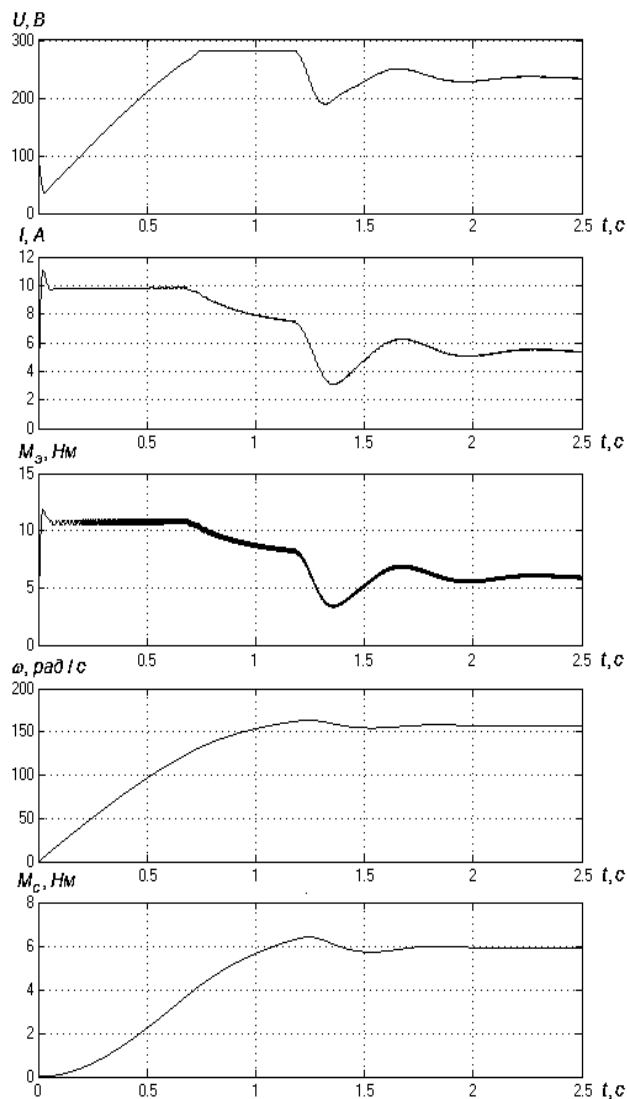


Рис. 6. Пуск СДПМ с системой управления в d - q координатах

В данном случае по разработанной модели рассчитывался режим работы двигателя продолжительностью 2,5 с, при этом время расчета составило 0,6 с, что более чем в 4 раза быстрее. Это свидетельствует о том, что при небольшой оптимизации возможно импортировать данный алгоритм в микропроцессор и использовать его в системе управления в реальном времени.

Выводы

Разработанная модель позволяет имитировать работу машины в стационарных и переходных режимах в реальном времени, с учетом реальной геометрии машины и насыщения стали. На базе данной модели возможна разработка системы управления в непосредственно фазных координатах для m -фазных СДПМ, позволяющей, управляя высшими гармониками токов как через фазные, так и через линейные напряжения, уменьшать пульсации электромагнитного момента и снижать деформации статорного кольца, улучшая тем самым виброшумовые характеристики.

Список литературы

1. **Стрижков И.Г.** Основы теории синхронных машин с несколькими обмотками на статоре // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – № 10(84). – С. 469–507.
2. **Wallmark O.** Control of a Permanent Magnet Synchronous Motor with Non-Sinusoidal Flux Density Distribution. – Gothenburg: Chalmers University of Technology, 2001. – 65 p.
3. **Руденко Е.С., Морозов Д.И.** Линеаризованная математическая модель синхронного двигателя с постоянными магнитами как объекта управления // Сборник научных трудов ДнГТУ. – 2016. – № 1. – С. 88–93.
4. **Kaushik J., Pradip K.S., Goutam K.P.** Vector Control of Permanent Magnet Synchronous Motor Based On Sinusoidal Pulse Width Modulated Inverter with Proportional Integral Controller // Int. Journal of Engineering Research and Applications. – 2013. – Vol. 3, Issue 5. – P. 913–917.
5. **Баранов М.В., Корчагин О.А.** Разработка математической модели высокомоментного синхронного двигателя при проектировании прецизионных приводов // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Вып. 8. – 10 с. doi: 10.18698/2308-6033.
6. **Технология** моделирования в Simulink динамических режимов работы электрических машин с использованием библиотеки полевых расчетов / А.И. Тихонов, А.В. Гусенков, Ю.В. Тамьярова, А.В. Подобный // Вестник ИГЭУ. – 2016. – Вып. 6. – С. 57–65. doi: 10.17588/2072-2672.2016.6.057–065.
7. **Копылов И.П.** Математическое моделирование электрических машин: учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 327 с.
8. **Мартынов В.А., Голубев А.Н., Алейников А.В.** Математическое моделирование режимов работы многофазных синхронных двигателей с постоянными магнитами // Вестник ИГЭУ. – 2013. – Вып. 2. – С. 62–66.
9. **EICut.** Моделирование электромагнитных, тепловых и упругих полей методом конечных элементов: руководство пользователя. Версия 6.3. – СПб.: ООО «Тор», 2017. – 296 с.
- the theory of synchronous machines with several windings on the stator]. *Politematicheskiy setevoy elektronnyy nauchnyy zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta*, 2012, issue 10(84), pp. 469–507.
2. Wallmark, O. Control of a Permanent Magnet Synchronous Motor with Non-Sinusoidal Flux Density Distribution. Gothenburg: Chalmers University of Technology, 2001. 65 p.
3. Rudenko, E.S., Morozov, D.I. Linearizovannaya matematicheskaya model' sinkhronnogo dvigatelya s postoyannymi magnitami kak ob"ekta upravleniya [Linearized mathematical model of a synchronous motor with permanent magnets as a control object]. *Sbornik nauchnykh trudov DonGTU*, 2016, no. 1, pp. 88–93.
4. Kaushik, J., Pradip, K.S., Goutam, K.P. Vector Control of Permanent Magnet Synchronous Motor Based On Sinusoidal Pulse Width Modulated Inverter with Proportional Integral Controller. *Int. Journal of Engineering Research and Applications*, 2013, vol. 3, issue 5, pp. 913–917.
5. Baranov, M.V., Korchagin, O.A. Razrabotka matematicheskoy modeli vysokomomentnogo sinkhronnogo dvigatelya pri proektirovanii pretsizionnykh privodov [Development of a mathematical model of a high-torque synchronous motor in the design of precision drives]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii*, 2013, issue 8. 10 p. doi: 10.18698/2308-6033.
6. Tikhonov, A.I., Gusenkov, A.V., Tam'yarova, Yu.V., Podobnyy, A.V. Tekhnologiya modelirovaniya v Simulink dinamicheskikh rezhimov raboty elektricheskikh mashin s ispol'zovaniem biblioteki polevykh raschetov [Simulink technology for modeling dynamic modes of electric machine operation using a field calculations library]. *Vestnik IGEU*, 2016, issue 6, pp. 57–65. doi: 10.17588/2072-2672.2016.6.057-065.
7. Kopylov, I.P. Matematicheskoe modelirovanie elektricheskikh mashin [Mathematical modeling of electrical machines]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001. 327 p.
8. Martynov, V.A., Golubev, A.N., Aleynikov, A.V. Matematicheskoe modelirovanie rezhimov raboty mnogofaznykh sinkhronnykh dvigateley s postoyannymi magnitami [Mathematical modeling of the operation modes of multiphase synchronous motors with permanent magnets]. *Vestnik IGEU*, 2013, issue 2, pp. 62–66.
9. *EICut. Modelirovanie elektromagnitnykh, teplovykh i uprugikh poley metodom konechnykh elementov: rukovodstvo pol'zovatelya. Versiya 6.3* [EICut. Simulation of electromagnetic, thermal and elastic fields by the finite element method: a user manual. Version 6.3]. Saint-Petersburg, ООО «Тор», 2017. 296 p.

References

Голубев Александр Николаевич,
ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор кафедры теоретических основ электротехники и электротехнологий,
e-mail: alenikgo@yandex.ru
Golubev Aleksandr Nikolayevich,
Ivanovo State Power Engineering University,
Doctor of Engineering Sciences (Post-doctoral degree), Professor of the Department of Theoretical Basics of
Electrical Engineering and Electric Technologies,
e-mail: alenikgo@yandex.ru

Мартынов Владимир Александрович,
ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой теоретических основ электротехники и электро-
технологий,
e-mail: zav@toe.ispu.ru

Martynov Vladimir Aleksandrovich,
Ivanovo State Power Engineering University,
Doctor of Engineering Sciences (Post-doctoral degree), Professor, Head of the Department of Theoretical Basics of Electrical Engineering and Electric Technologies,
e-mail: zav@toe.ispu.ru

Алейников Алексей Владимирович,
ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
аспирант кафедры теоретических основ электротехники и электротехнологий,
e-mail: Aleynikov-AV@yandex.ru
Aleynikov Aleksei Vladimirovich,
Ivanovo State Power Engineering University,
Postgraduate student of the Department of Theoretical Basics of Electrical Engineering and Electric Technologies,
e-mail: Aleynikov-AV@yandex.ru