

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК 621.927

Теоретическое исследование влияния параметров смешивания на время смешивания и качество смеси разнородных дисперсных материалов¹

В.Е. Мизонов¹, А.В. Митрофанов¹, И.А. Балагуров¹, Н. Berthiaux², В.А. Зайцев³

¹ ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», г. Иваново, Российская Федерация

² Ecole des Mines d'Albi-Carmaux, Albi, France

³ ФГБОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет», г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: mizonov46@mail.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса. Процессы смешивания дисперсных материалов широко присутствуют в различных отраслях промышленности. Они реализуются как самостоятельные процессы для получения однородных смесей и полуфабрикатов, а также как сопутствующие процессы при переработке дисперсных сред, например, в угольной энергетике. Любое перемешивание состоит из комбинации двух процессов: чисто диффузионного перемешивания, ведущего к выравниванию распределения компонентов по объему смеси, и сегрегации, ведущей к расслоению смеси. Несмотря на то, что модели смешивания с учетом обоих составляющих процесса известны, их отдельное влияние на формирование качества смеси практически не исследовано, что затрудняет выбор рационального механического воздействия на смесь для достижения ее максимально возможной однородности. Очевидно, что такое исследование в настоящее время требует специального внимания.

Материалы и методы. Для решения поставленной задачи используется метод математического моделирования и численного эксперимента. Модель построена на основе теории цепей Маркова. Процесс смешивания представлен дискретным в пространстве и времени. Матрица переходных вероятностей представлена произведением двух матриц: для чисто диффузионного перемешивания и для сегрегационного перемешивания. Состояние смеси представлено вектор-столбцом. Ее однородность характеризуется среднеквадратичным отклонением. Расчеты по рекуррентному матричному равенству позволяют оценивать эволюцию состояния смеси и определять оптимальное время смешивания, соответствующее максимальной однородности смеси.

Результаты. Найдена зависимость максимально достижимой однородности смеси и времени ее достижения от интенсивности диффузионного и сегрегационного перемешивания. Показано, что одна и та же максимальная однородность может быть достигнута при разных комбинациях этих интенсивностей. Выявлено, что скорость сегрегационного перемешивания значительно выше диффузионного. Однако само значение максимальной неоднородности заметно хуже по сравнению со случаем, когда диффузионное перемешивание преобладает.

Выводы. Предложенная модель позволяет находить рациональную комбинацию интенсивности диффузионного и сегрегационного перемешивания для достижения требуемого качества смеси и, ориентируясь на этот выбор, подбирать рациональные способы воздействия на смесь для ее получения.

Ключевые слова: смесь сыпучих материалов, моделирование, цепь Маркова, диффузионное перемешивание, сегрегационное перемешивание, качество смеси

Theoretical study of influence of the mixing parameters on mixing time and mixture quality of dissimilar particulate solids

Vadim Mizonov¹, Andrej Mitrofanov¹, Ivan Balagurov¹, Hhenri Berthiaux², Viktor Zaitsev³

¹ Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation

² Ecole des Mines d'Albi-Carmaux, Albi, France

³ Ivanovo State University of Chemistry and Technology, Ivanovo, Russian Federation

E-mail: mizonov46@mail.ru

Abstract

Background. Mixing of particulate solids is widely spread in many industries. Mixing can be realized as an independent process to obtain a homogeneous mixture or half-finished product, as well as an accompanying process in particulate

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №18-08-00028).

solids treatment, for instance, in coal energetics. Any mixing is the combination of two sub-processes: pure diffusion mixing that leads to equalizing of components distribution over a mixture volume, and segregation that leads to exfoliation of the mixture. Despite the models of mixing taking into account the both components of the process are known, their separate influence on mixture quality formation is not practically investigated that makes it difficult to choose the rational parameters of a mixture mechanical agitation to reach as much homogeneity as possible. It is obvious that, at present, such analysis deserves special attention.

Materials and methods. The method of mathematical modeling and numerical experiments is used to solve the above problem. The model is based on the theory of Markov chains. The process of mixing is presented as a discrete one in space and time. The matrix of transition probabilities is presented as multiplication of two matrices: one for pure diffusion mixing, and another one for segregation mixing. The state of the mixture is presented as a column vector. Its homogeneity is characterized by the standard deviation. The recurrent calculations using the matrix equality allow estimating the evolution of the mixture state and the optimum mixing time corresponding to the maximum homogeneity of the mixture.

Results. The dependence of the maximum reachable homogeneity and the time when it can be reached on the intensity of diffusion and segregation mixing is found. It is shown that one and the same maximum homogeneity can be reached at different combination of these intensities. It is found that the rate of segregation mixing is much higher than of diffusion one. However, the maximum value of homogeneity itself in this case is much worse in comparison to the case when diffusion mixing prevails.

Conclusions. The proposed model allows finding the rational combination of diffusion and segregation intensity of mixing to reach a required mixture quality and, with orientation on them, choosing the rational way of mixture agitation to obtain it.

Key words: mixture of particulate solid, modeling, Markov chain, diffusion mixing, segregation mixing, mixture quality

DOI: 10.17588/2072-2672.2018.5.056-061

Состояние вопроса. Получение высококачественных смесей разнородных дисперсных материалов продолжает оставаться актуальной технологической и научной задачей, значительную помощь в решении которой может оказать математическое моделирование и оптимизация этих процессов. Основы теории процессов смешивания были заложены в работах [1, 2]. Однако принятое в них большое число упрощающих предположений позволяло лишь качественно осмыслить физику происходящих при смешивании процессов, но не позволяло получить более или менее адекватное их описание. К настоящему времени известно несколько подходов к построению математических моделей смешивания, учитывающих более глубокую специфику взаимодействия частиц при смешивании. Так, в [3] модель построена на основе модифицированной кинетической теории газов и применена к смешиванию компонентов с разными физико-механическими свойствами (размер и плотность частиц, коэффициент восстановления скорости при их соударении и т.д.). Однако модель была ориентирована на сдвиговое смешивание в параллельных потоках частиц, что является достаточно редким в реальных смесителях. В обзорных работах [4, 5] подчеркнута, что до настоящего времени проектирование эффективных смесителей остается скорее предметом инженерного искусства, чем расчетом на сколько-нибудь научно обоснованном базисе. Реальная возможность достижения прогресса в этом направлении нам видится в использовании метода дискретных элементов, в котором индивидуально отслеживается динамика всех частиц ансамбля. Однако огромные затраты машинного времени на его реализацию пока практически исключают его использование в инженерной практике.

На наш взгляд, наиболее подходящим математическим инструментом для моделирования процессов смешивания является теория цепей Маркова, которая как бы соприродна этим процессам. Она рассматривает эволюцию вероятностей в пространстве состояний, а смешивание – эволюцию содержания частиц в пространстве смесителя. Одна из первых попыток применить эту теорию к моделированию смешивания описана в [6]. Впоследствии эти авторы перешли к более сложным моделям, повышающим адекватность описания реального процесса [7, 8]. Однако в этих и других работах не выделены основные составляющие процесса: диффузионное перемешивание и сегрегация. Позднее общая стратегия применения теории цепей Маркова была описана в [9, 10], а ее более детальное приложение непосредственно к смешиванию сыпучих материалов – в [11, 12].

Ниже предлагается более детальная оценка вклада диффузионного и сегрегационного перемешивания в общую картину кинетики процесса, т. е. в формирование степени однородности бинарной смеси разнородных компонентов.

Теория. Для реализации процесса смешивания дисперсных компонентов необходимо создать условия, обеспечивающие относительную подвижность частиц и порозность смеси, позволяющую частицам мигрировать по ее объему. Для этого используются разнообразные механические воздействия на смесь, например виброоживление. Однако при обеспечении подвижности начинаются два фактически противоположных процесса. Во-первых, это чисто диффузионное перемешивание, обусловленное движущей силой, пропорциональной градиенту концентрации ключевого компонента. Оно ведет к выравниванию распределения

компонента и в конечном счете к достижению однородной смеси. Во-вторых, происходит сегрегация одного компонента в другом (сегрегационное перемешивание). Оно ведет, наоборот, к расслоению смеси. Механическое воздействие на смесь инициирует оба процесса, но при разных видах воздействия по-разному. Поэтому при выборе вида воздействия важно знать, какая комбинация того и другого перемешивания может обеспечить требуемое качество смеси. Оценка влияния этих комбинаций на качество готовой смеси и производительность смесителя может быть сделана на основе математического моделирования.

В соответствии со стратегией ячеечного моделирования, разобьем высоту зоны смешивания на m ячеек высотой $\Delta y = H/m$, где H – высота этой зоны. Допустим, что каждая ячейка вмещает единичную объемную порцию компонентов или смеси независимо от ее состава. Будем наблюдать процесс в дискретные моменты времени $t_k = (k-1) \Delta t$, где Δt – продолжительность, а k – номер временного перехода (дискретный аналог времени). В каждый момент времени распределение содержания какого-либо компонента по ячейкам характеризуется вектором-столбцом \mathbf{S}^k , а его эволюция от перехода к переходу описывается рекуррентным матричным равенством

$$\mathbf{S}^{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{S}^k, \quad (1)$$

где \mathbf{P} – матрица переходных вероятностей, которая описывает переходы частиц между ячейками в течение одного временного перехода.

Для решения поставленной задачи представим матрицу \mathbf{P} в виде произведения двух матриц:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_d \mathbf{P}_v, \quad (2)$$

где \mathbf{P}_d – переходная матрица для чисто диффузионного перемешивания; \mathbf{P}_v – переходная матрица для сегрегационного перемешивания.

Матрица диффузионного перемешивания – это трехдиагональная матрица, элементы которой рассчитываются по следующим формулам:

$$P_{d,i+1,i} = d, \quad i = 1, 2, \dots, m-1; \quad (3)$$

$$P_{d,i,i+1} = d, \quad i = 1, 2, \dots, m-1; \quad (4)$$

$$P_{d,ii} = 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^m P_{dji}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

где $d = D\Delta t/\Delta y^2$ – интенсивность диффузионного перемешивания; D – размерный коэффициент макродиффузии.

Матрица сегрегационного перемешивания определяется следующими равенствами:

$$P_{v,i+1,i} = v(1 - S_{i+1}^k), \quad i = 1, 2, \dots, m-1; \quad (6)$$

$$P_{v,i,i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1; \quad (7)$$

$$P_{v,ii} = 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^m P_{vji}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

где $v = V\Delta t/\Delta y$ – интенсивность сегрегационного перемешивания; V – размерная скорость сегрегации ключевого компонента в чистый базовый компонент.

Выражение в круглых скобках в (6) учитывает, что сегрегация ключевого компонента может идти только в ту часть следующей ячейки, которая свободна от ключевого компонента. Таким образом, модель сегрегационного перемешивания оказывается нелинейной.

Поскольку матричное произведение некоммукативно, то небезразлично, в какой последовательности перемножаются матрицы \mathbf{P}_d и \mathbf{P}_v в равенстве (2). Однако расчеты показывают, что если эти матрицы являются марковскими, то уже при $m > 5$ их перестановка практически не влияет на описание кинетики смешивания.

Результаты исследования. Задачей численных экспериментов с описанной выше математической моделью было исследование влияния параметров перемешивания v и d на формирование качества смеси, оцениваемого среднеквадратичным отклонением σ распределения по ячейкам содержания ключевого компонента. Расчеты выполнены для $m = 8$.

На рис. 1 показан пример кинетики формирования качества смеси при различных условиях перемешивания.

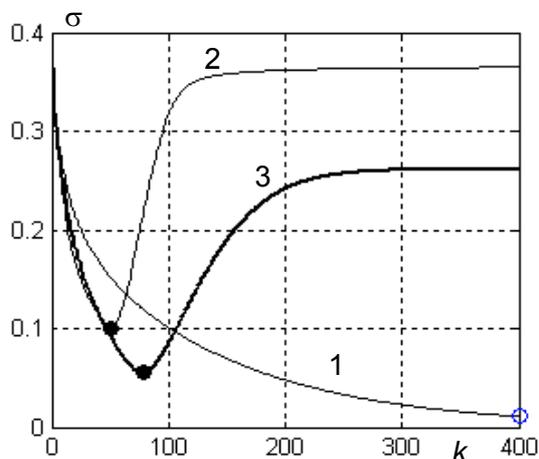


Рис. 1. Влияние условий перемешивания на формирование качества смеси: 1 – чисто диффузионное перемешивание ($d = 0,3$; $v = 0$); 2 – чисто сегрегационное перемешивание ($d = 0$; $v = 0,3$); 3 – перемешивание при действии обоих факторов ($d = 0,15$; $v = 0,15$)

При чисто диффузионном процессе (рис. 1, кривая 1) перемешивание идет сравнительно медленно, но асимптотически неоднородность стремится к нулю, т. е. теоретически возможно получение идеальной смеси. При чисто сегрегационном перемешивании (рис. 1, кривая 2) вначале процесс идет гораздо быстрее, но вскоре неоднородность достигает минимума σ_{\min} (отмечена черным кружком), после чего

вновь возрастает, стремясь к полному расщеплению, т. е. к начальной неоднородности. При этом полностью однородная смесь недостижима в принципе и существует оптимальное время перемешивания k_{opt} , при достижении которого процесс следует прервать. Если в процессе участвуют оба механизма перемешивания (рис. 1, кривая 3), то идеальная смесь также недостижима, но ее минимальная неоднородность меньше, а достигается она за большее время. Практически в любом реальном случае действуют оба механизма перемешивания, что исключает возможность получения полностью однородных смесей и можно говорить лишь о возможностях подавления негативного влияния сегрегации.

На рис. 2 показано обобщение результатов выполненных численных экспериментов в виде зависимости минимально достижимой неоднородности смеси σ_{min} (рис. 2,а) и необходимого для ее достижения времени перемешивания k_{opt} (рис. 2,б) от интенсивности диффузионного d и сегрегационного перемешивания при $d = 0 \dots 0,45$ $v = 0,05 \dots 0,6$.

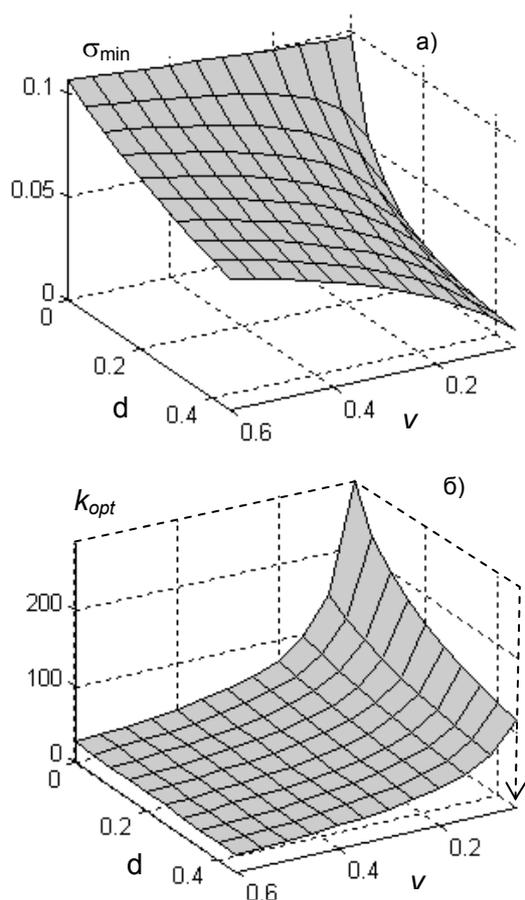


Рис. 2. Зависимости минимально достижимой неоднородности смеси σ_{min} (а) и необходимого для ее достижения времени перемешивания k_{opt} (б) от интенсивности диффузионного d и сегрегационного перемешивания v

Анализ полученных зависимостей показывает, что при $d = 0$ минимальная неоднородность

родность $\sigma_{min} = 0,1$ почти не зависит от величины v , но само ее значение является относительно большим (рис. 2,а). В то же время с ростом v время ее достижения достаточно резко убывает (рис. 2,б). Необходимо отметить, что, если пренебречь временем загрузки компонентов и выгрузки смеси из смесителя, величина k_{opt} обратно пропорциональна его производительности: чем меньше k_{opt} , тем больше производительность.

С ростом величины d минимальная неоднородность снижается, причем особенно резко при малой интенсивности сегрегации v . Сравнительный анализ графиков (рис. 2,а и рис. 2,б) показывает, что снижение неоднородности всегда ведет к снижению производительности. Компромисс при этом возможен только исходя из конкретных условий производства.

Линии на рис. 3 являются линиями уровня поверхности $\sigma_{min} = f(d,v)$ на рис. 2,а. Вдоль каждой из них величина минимальной неоднородности остается постоянной (эти величины можно увидеть на графике через номера соответствующих линий). Если технологические регламенты на смесь требуют какой-то конкретный уровень ее неоднородности σ_{min} , то он может быть достигнут в любой точке кривой, соответствующей этой неоднородности.

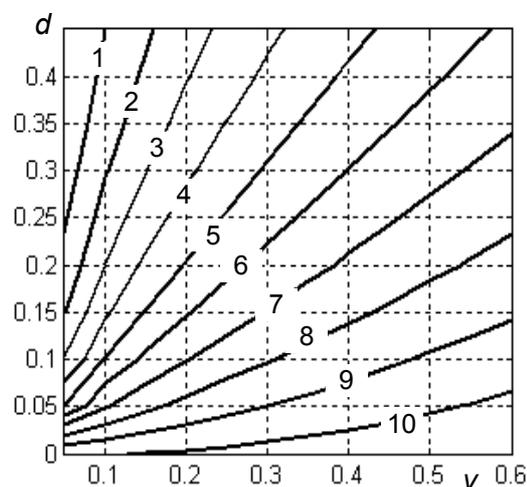


Рис. 3. Изолинии $v(d)$, обеспечивающие постоянную σ_{min} : 1 – $\sigma_{min} = 0,009$; 2 – $0,019$; 3 – $0,028$; 4 – $0,038$; 4 – $0,048$; 5 – $0,058$; 6 – $0,068$; 7 – $0,077$; 8 – $0,087$; 9 – $0,097$; 10 – $0,107$

Необходимо, однако, отметить, что вдоль каждой линии (рис. 3) время достижения соответствующей ей неоднородности может существенно меняться. Так, например, правому краю линии 6 ($\sigma_{min} = 0,068$) соответствует время k_{opt} , равное 103 временным переходам, а левому – 22, что означает изменение производительности примерно в 5 раз.

Как было отмечено выше, интенсивности диффузионного и сегрегационного перемешивания не могут формироваться независимо. Обе они являются следствием конкретного вида механического воздействия на смесь, а также часто зависят от конкретных параметров воздействия внутри вида, например от амплитудо-частотной характеристики вибровоздействия. Поэтому, чтобы найти подходящую пару величин d и v для кривых на рис. 3, необходимо знать характеристики конкретного смесителя или, наоборот, подыскивать смесители с подходящей парой d и v . В силу разнообразия типов смесителей и видов получаемых смесей, эта задача выходит за рамки настоящей статьи.

Выводы. Предложенная модель смешивания дисперсных материалов и результаты численных экспериментов с ней показали, что требуемая минимальная неоднородность смеси может быть обеспечена разной комбинацией интенсивностей диффузионного и сегрегационного перемешивания. Доминирование диффузионной составляющей позволяет получать более однородные смеси (вплоть до идеальной), но при этом требуется длительное время перемешивания. При доминировании сегрегационной составляющей на начальном этапе время смешивания сокращается, но появляется предельно достижимая минимальная неоднородность смеси, которая возрастает с ростом интенсивности сегрегационного перемешивания и далеко не всегда может удовлетворить технологическим требованиям к качеству смеси. Предложенная модель позволяет выбирать рациональный способ смешивания и тип смесителя, позволяющие в первом приближении обеспечить требуемое качество смеси.

Мизонов Вадим Евгеньевич,

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И.Ленина»,
доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики,
e-mail: mizonov46@mail.ru

Mizonov Vadim Evgenievich,

Ivanovo State Power Engineering University,
Doctor of Engineering Sciences (Post-doctoral degree), Professor of the Applied Mathematics Department,
e-mail: mizonov46@mail.ru

Митрофанов Андрей Васильевич,

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики,
e-mail: and2mit@mail.ru

Mitrofanov Andrei Vasilievich,

Ivanovo State Power Engineering University,
Candidate of Engineering Sciences (PhD), Associate Professor of the Applied Mathematics Department,
e-mail: and2mit@mail.ru

Балагуров Иван Александрович,

ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
аспирант кафедры прикладной математики,
e-mail: ibalagurov@bk.ru

Список литературы

1. **Danckwerts P.V.** Continuous flow systems: Distribution of residence times. *Chem. Eng. Sci.* – 1953. – No. 2. – P. 1–11.
2. **Sommer K.** Mixing of particulate solids. *KONA.* – 1996. – No. 14. – P. 73–78.
3. **Iddir H., Arastoopour H., Hrenya C.M.** Analysis of binary and ternary granular mixture behavior using the kinetic theory approach. *Powder Technology.* – 2005. – No. 151. – P. 117–125.
4. **Bridgwater J.** Mixing of particles and powders: Where next? *Particuology.* – 2010. – No. 8. – P. 563–567.
5. **Bridgwater J.** Mixing of powders and granular materials by mechanical means – A perspective. *Particuology.* – 2012. – No. 10. – P. 397–427.
6. **Wang R.H., Fan L.T.** Axial Mixing of Grains in a Motionless Sulzer (Koch) Mixer. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.* – 1976. – No. 15. – P. 381–388.
7. **Wang R.H., Fan L.T.** Stochastic modeling of segregation in a motionless mixer, *Chem. Eng. Sci.* – 1977. – 32. – P. 695–701.
8. **Numerical** and experimental simulation studies on the mixing of particulate solids and the synthesis of a mixing system / L.T. Fan, R.S. Lai, et al. *Computers and Chemical Engineering.* – 1978. – No. 2. – P. 19–32.
9. **Berthiaux H., Mizonov V.** Applications of Markov Chains in Particulate Process Engineering: A Review. *The Canadian Journal of Chemical Engineering.* – 2004. – No. 85. – P. 1143–1168.
10. **Berthiaux H., Mizonov V., Zhukov V.** Application of the theory of Markov chains to model different processes in particle technology. *Powder Technology.* – 2005. – No. 157. – P. 128–137.
11. **Flow Analysis and Markov Chain Modelling to Quantify the Agitation Effect in a Continuous Mixer / K. Marikh, H. Berthiaux, et al.** *Chemical Engineering Research and Design.* – 2006. – 8(A11). – P. 1059–1074.
12. **Transitory powder flow dynamics during emptying of a continuous mixer / C. Ammarcha, et al.** *Chemical Engineering and Processing.* – 2013. – No. 65. – P. 68–75.

Balagurov Ivan Aleksandrovich,
Ivanovo State Power Engineering University,
Post-Graduate Student of the Applied Mathematics Department,
e-mail: ibalagurov@bk.ru

Berthiaux Henri,
Ecole des Mines d'Albi-Carmaux, France,
Dr.-Eng., Professor
e-mail: berthiau@enstimac.fr

Зайцев Виктор Александрович,
ФГБОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
доктор технических наук, профессор кафедры технической кибернетики и автоматике,
e-mail: z-viktor-a@mail.ru
Zaitsev Viktor Aleksandrovich,
Ivanovo State University of Chemistry and Technology,
Doctor of Engineering Sciences (Post-doctoral degree), Professor of the Engineering Cybernetics and Automatics,
e-mail: z-viktor-a@mail.ru

УДК 621.165

Разработка математической модели многопоточных теплообменных аппаратов с учетом фазового перехода в теплоносителях

К.А. Касаткин, А.Е. Барочкин, В.П. Жуков, Г.Г. Орлов
ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: zhukov-home@yandex.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса. Из литературных источников известны модели многопоточных теплообменных аппаратов без учета возможного в них фазового перехода в теплоносителях. Однако в ряде случаев, например в многопоточных теплообменных аппаратах, предназначенных для утилизации влаги и тепловой энергии дымовых газов тепловых электрических станций, водяные пары при конденсации меняют фазовое состояние. Отсутствие методов расчета таких аппаратов во многом сдерживает разработку и реализацию обоснованных технологических решений. Таким образом, развитие моделирования многопоточных теплообменных аппаратов на случай описания фазового перехода в теплоносителях является актуальной задачей для энергетической и смежных отраслей промышленности.

Материалы и методы. Построение модели для многопоточных теплообменных аппаратов с учетом фазового перехода в теплоносителях выполнено в виде системы дифференциальных уравнений, составленных на основе теплового баланса для каждого потока теплоносителя. Аналитическое решение системы линейных дифференциальных уравнений получено методом пробных функций, численное решение этой же системы найдено методом Рунге-Кутты.

Результаты. Разработано математическое описание многопоточного теплообменного аппарата с учетом фазового перехода в теплоносителях. Найдены и проанализированы аналитические и численные решения для контактного теплообменного аппарата, используемого для утилизации влаги и тепловой энергии из дымовых газов тепловых электрических станций. Показаны возможности проведения проектных расчетов в рамках предложенной модели.

Выводы. Разработанная математическая модель служит основой для создания более эффективных методов организации процессов теплопередачи в технологических установках различного назначения с произвольным числом теплоносителей с учетом фазового перехода в теплоносителях.

Ключевые слова: теплопередача, поток теплоносителей, фазовый переход, модель многопоточных теплообменников, аналитическое решение, численное решение

Development of a mathematical model of multi-current heat exchangers taking into account phase transition in heat carriers

K.A. Kasatkin, A.E. Barochkin, V.P. Zhukov, G.G. Orlov
Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation
E-mail: zhukov-home@yandex.ru

Abstract

Background. The models of multi-flow heat exchangers described in literature sources do not take into account possible phase transition in heat carriers. However, in a number of cases, for example, in multi-flow heat exchangers for utilization