

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕХНИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

УДК 621.929

Владимир Павлович Жуков

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45, e-mail: zhukov-home@yandex.ru

Антон Николаевич Беляков

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, e-mail: ab_pm@mail.ru

Наталья Сергеевна Шпейнова

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», аспирант кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45

Елена Александровна Шуина

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-74, e-mail: barantseva77@mail.ru

Илья Дмитриевич Аксаковский

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», аспирант кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, e-mail: aksil1703@gmail.com

Метод идентификации ячеечных моделей реактора кипящего слоя на основе дискретных аналогов уравнения Больцмана

Авторское резюме

Состояние вопроса. Сложные модели при высоком качестве получаемых результатов являются, как правило, более затратными с точки зрения квалификации разработчиков и вычислительных ресурсов. При выполнении технологических расчетов часто не требуется подробного и чрезмерного детального описания объекта, а точность получаемых результатов не должна быть выше точности используемых измерительных приборов. В связи с этим оптимальное сочетание простоты и качества математического описания технологических процессов является актуальной задачей математического моделирования.

Материалы и методы. Для идентификации ячеечной модели, построенной на основе теории цепей Маркова, используются данные, полученные с помощью решения дискретных моделей уравнения Больцмана.

Результаты. Разработан метод идентификации ячеечных моделей реактора кипящего слоя с использованием данных, полученных на основе решения моделей более высокого иерархического уровня – дискретных моделей уравнения Больцмана. Выполнена проверка адекватности идентифицированной модели реактора

кипящего слоя. Представлен подход к разработке расчетного обеспечения ячеечной модели, построенной на основе теории цепей Маркова.

Выводы. Анализ полученных результатов показал адекватное описание процессов в реакторах кипящего слоя ячеечными моделями, построенными на основе теории цепей Маркова и идентифицированными на основе результатов, полученных в рамках дискретных моделей уравнения Больцмана. Предложенный метод идентификации и верификации ячеечных моделей обеспечивает возможность одновременного получения приемлемых показателей простоты модели и точности расчета конструктивных и режимных параметров реакторов кипящего слоя.

Ключевые слова: идентификация, ячеечная модель, теория цепей Маркова, дискретные модели уравнения Больцмана, реактор кипящего слоя

Vladimir Pavlovich Zhukov

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences (Postdoctoral degree), Professor, Head of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45, e-mail: zhukov-home@yandex.ru

Anton Nikolaevich Belyakov

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences (Postdoctoral degree), Professor of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, e-mail: ab_pm@mail.ru

Natalia Sergeevna Shpeynova

Ivanovo State Power Engineering University, Postgraduate Student of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45

Elena Alexandrovna Shuina

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences (Postdoctoral degree), Professor, Head of Higher Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-74, e-mail: barantseva77@mail.ru

Ilya Dmitrievich Aksakovskiy

Ivanovo State Power Engineering University, Postgraduate Student of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, e-mail: aksil1703@gmail.com

Method for identification of cell models of fluidized bed reactor based on discrete analogues of Boltzmann equation

Abstract

Background. The most complex models with the high quality of the results obtained are, as a rule, more expensive in terms of developer qualifications and computational resources. During process design, a detailed description of the object is often not required, and the accuracy of the results obtained should not be higher than the accuracy of the measuring instruments used. Thus, the optimal combination of simplicity and quality of the mathematical description of technological processes is an urgent task of mathematical modeling.

Materials and methods. To identify a cell model developed based on the theory of Markov chains, data obtained by solving discrete models of the Boltzmann equation are used.

Results. A method to identify cell models of a fluidized bed reactor has been developed using data obtained based on solving discrete models of the Boltzmann equation. The adequacy of the identified model of a fluidized bed reactor has been verified. An approach to develop computational support for a cell model based on the theory of Markov chains is presented.

Conclusions. The analysis of the results obtained has shown an adequate description of the processes in fluidized bed reactors in terms of cell models. The models are developed based on the theory of Markov chains and identified based on the results obtained within the framework of discrete models of the Boltzmann equation. The proposed method to identify and verify cell models provides the possibility to obtain simultaneously acceptable indicators of model simplicity and the accuracy of calculation of the design and operating parameters of fluidized bed reactors.

Key words: Identification, cell model, Markov chain, discrete models of Boltzmann equation, fluidized bed reactor

DOI: 10.17588/2072-2672.2023.5.083-089

Введение. Ячеечные модели, построенные на основе теории цепей Маркова, в силу их универсальности и простоты реализации расчетных алгоритмов широко используются для описания различных технологических процессов в химической, строительной и энергетической отраслях промышленности [1–5]. Известны мо-

дели на основе теории цепей Маркова реакторов кипящего слоя, в которых реализуются процессы смешивания [1], классификации [2], измельчения [3], сушки [4], тепломассообмена [5]. При этом в качестве параметров идентификации модели используются приведенные коэффициенты макродиффузии и скорости конвективного переноса материала для выбранных условий

протекания процесса. Данные коэффициенты зависят от целого ряда технологических параметров, для определения которых требуется проведение дополнительных экспериментальных исследований или привлечение экспериментальных данных из литературных источников. Модели более высокого иерархического уровня, в которых для получения конечных результатов используются только справочные данные, позволяют существенно снизить объем необходимых экспериментальных исследований для идентификации и верификации модели. Однако такие модели требуют более высокой квалификации разработчиков и пользователей, а также существенно больших вычислительных ресурсов. Очевидно, что существует оптимальное соотношение вычислительных и экспериментальных ресурсов, которое позволяет обеспечить получение заданной точности результатов. Разработка таких расчетных методов, в которых оптимально сочетаются простота построения модели и точность получаемых результатов, является актуальной задачей научных исследований.

Предлагается для определения параметров идентификации ячеечной модели, построенной в рамках теории цепей Маркова, использовать результаты, полученные с помощью дискретной модели уравнения Больцмана, которая, по мнению А.А. Самарского [6], относится к более высокому иерархическому уровню моделей. При таком подходе, с одной стороны, уменьшается объем необходимых для идентификации и верификации модели экспериментальных данных, а с другой стороны, используются менее ресурсоемкие модели и методы для проведения технологических расчетов.

В качестве объекта моделирования выбран цилиндрический реактор кипящего слоя. Предметом исследования являются полученные расчетным путем параметры, необходимые для проведения технологических расчетов с использованием ячеечных моделей на основе теории цепей Маркова.

Целью исследования является разработка эффективных методов расчета технологических процессов при оптимальном сочетании простоты и качества математического описания.

Методы исследования. Анализируемый объект в виде цилиндрического реактора кипящего слоя представлен на рис. 1,а. Перерабатываемый материал 1 в периодическом режиме загружается в реактор кипящего слоя, в который снизу через распределительную решетку 2 подается газ. Находясь во взвешенном состоянии, сыпучий материал, в зависимости от назначения реактора, участвует в перемешивании, измельчении, классификации, сушке, тепломассообмене или других технологических процессах [1–5].

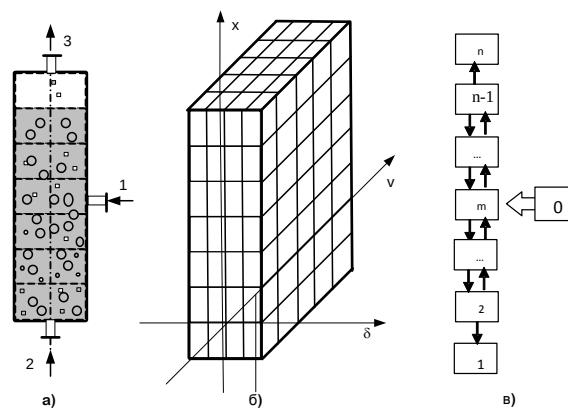


Рис. 1. Эскиз реактора кипящего слоя (а), расчетное фазовое пространство для дискретных моделей уравнения Больцмана (б), расчетная схема модели на основе теории цепей Маркова (в): 1 – подача исходного порошка; 2 – подача воздуха; 3 – выход воздуха

Кинетика перечисленных технологических процессов, протекающих в реакторе, определяется совокупностью ряда параметров, к наиболее важным из которых относятся время пребывания материала в реакторе, загрузка реактора, распределение материала по высоте аппарата. При моделировании реактора определение указанных параметров необходимо для описания основных процессов. Для их вычисления предлагается использовать сначала трехмерную дискретную модель уравнения Больцмана, а затем полученные расчетные данные использовать для идентификации более простой одномерной модели на основе Марковских цепей. Таким образом, в предлагаемом исследовании последовательно решаются две задачи:

1. В рамках дискретных аналогов уравнения Больцмана [7] строится модель распределения материала по высоте реактора кипящего слоя и проверяется ее адекватность.

2. В рамках модели уравнения Больцмана для исследуемых условий определяются параметры, необходимые для проведения технологических расчетов с помощью модели на основе теории цепей Маркова.

При построении модели процесса в рамках дискретных моделей уравнения Больцмана [7] в общем случае пространственных координат может быть три и соответственно три проекции скорости вдоль этих координат. В этом случае в качестве искомой функции рассматривается плотность распределения вещества $f(\vec{r}, \vec{v}, \delta, t)$ по координатам $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$, скоростям $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ и размерам частиц δ . Произведение искомой функции $f(\vec{r}, \vec{v}, \delta, t)$ и фазового объема $dV = dx_1 dx_2 dx_3 dv_1 dv_2 dv_3 d\delta$ показывает вероятность в момент времени $(t, t + dt)$ частицы размером $(\delta, \delta + d\delta)$, находящейся в точке с координатами $(x_1, x_1 + dx_1)$, $(x_2, x_2 + dx_2)$, $(x_3, x_3 + dx_3)$, двигаться со скоростью $(v_1, v_1 + dv_1)$,

$(v_2, v_2 + dv_2), (v_3, v_3 + dv_3)$. В общем случае изменение функции распределения в фазовом объеме dV обусловлено, во-первых, физическим перемещением частиц ($\text{div}_r(\vec{v}f)$), во-вторых, изменением скорости частиц ($\text{div}_v(\vec{a}f)$) и, в-третьих, переходом частиц в другой класс крупности за счет их разрушения или подвода частиц от внешнего источника ($\dot{f}_c$). В дифференциальной форме уравнение Больцмана принимает вид

$$f'_t + (v_k f)'_{x_k} + (a_k f)'_{v_k} = \dot{f}_c, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ – ускорение; $\dot{f}_c$ – источниковый член уравнения, описывающий внешние потоки и переходы частиц между фракциями при измельчении; повторение индекса « k » в слагаемых левой части показывает суммирование по этому индексу.

Уравнение (1) совпадает с известным уравнением Больцмана для распределения одинаковых молекул (в нашем случае частиц одного размера) [8]. При описании полидисперсного ансамбля частиц уравнение (1) записывается для каждой фракции. Для конечного числа выделенных фракций уравнение (1) превращается в систему уравнений, число которых совпадает с числом фракций, а связь между этими уравнениями осуществляется через функцию внешних потоков $\dot{f}_c$. Вид правой части при эволюции размера частиц за счет измельчения может быть записан на основе селективной модели измельчения в виде [9]

$$f'_t + (v_k f)'_{x_k} + (a_k f)'_{v_k} = -fS + \int_{\delta}^{\delta_{\max}} fS b d\varepsilon, \quad (2)$$

где S , b – селективная и распределительная функции разрушения [9]; δ , ε – наблюдаемый и текущий размеры частиц.

Полученное уравнение, с одной стороны, является обобщением кинетического уравнения Больцмана для ансамбля частиц разной крупности и, с другой стороны, обобщением модели селективного измельчения [9], учитывающим конвективный перенос частиц и силы, действующие на эти частицы при различных условиях реализации технологических процессов переработки сыпучих материалов.

Для уравнения (1) разработаны метод решения, алгоритм и программное обеспечение, на которое получено свидетельство о регистрации программного продукта [10]. Для численного решения уравнения Больцмана для реактора кипящего слоя искомая плотность распределения вещества по ячейкам фазового пространства, представленного на рис. 1, б, описывается вектором $\mathbf{F} = \{f_i\}$, где индекс i соответствует номеру ячейки. Сначала для каждой ячейки фазового пространства определяются номера ячеек, с которыми она может взаимодействовать. Затем составляются уравнения балансов вещества и

энергии и определяются потоки вещества и энергии между этими ячейками. Известные потоки позволяют определить вероятности переходов p_{ij} за рассматриваемый промежуток времени Δt . Указывая для каждой ячейки адреса ячеек, в которые возможен переход, и вероятности этих переходов, определяется состояние системы в следующий момент времени. Следует отметить, что трехмерное расчетное фазовое пространство (рис. 1, б) при реализации расчетной методики (3) преобразуется в одномерное распределение согласно правилам, представленным в [10]. Расчет искомого распределения $\mathbf{F}$ в произвольные моменты времени k_1 выполняется согласно выражению

$$(\mathbf{F}^{1B})_i^{k_1} = \sum_j p_{ij}^{1B} (\mathbf{F}^{1B})_j^{k_1-1}, \quad (3)$$

где верхний индекс «1B» относится к параметрам модели Больцмана в одномерном представлении функции распределения.

Тестирование метода решения уравнения Больцмана, алгоритма и компьютерной программы, проведенное при решении задачи движения ансамбля частиц [11], показало хорошее совпадение результатов численного и аналитического решений.

Метод расчета (3) используется далее для решения задачи распределения частиц сыпучего материала по высоте реактора кипящего слоя, приведенного на рис. 1, а.

При высокой концентрации твердой фазы в реакторе частицы сталкиваются друг с другом и с ограждающими стенками, что существенно влияет на поведение частиц в слое [12]. Для учета влияния столкновения частиц на формирование слоя в уравнение (2), помимо силы тяжести mg и силы аэродинамического сопротивления $F_c = -k_f(w-v)|w-v|$ [7], вводится дополнительная сила $(F_m)_{ij}$, обусловленная столкновением частиц [12]. После этого выражение для ускорения частиц в реакторе в уравнении (2) записывается в виде

$$\begin{aligned} a_i &= -g + \frac{(F_c)_i}{m_i} + \frac{(F_m)_{ij}}{m_i} = \\ &= -g + \frac{k_f(w-v)|w-v|}{m} + \\ &+ \frac{3(1+k_v)(\delta_i + \delta_j)^2}{2(\delta_i^3 + \delta_j^3)}(v_i - v_j)|v_i - v_j|\beta(\delta, v, x_j), \end{aligned} \quad (4)$$

где β_j – объемная концентрация частиц j -го класса крупности в фазовом объеме; δ – размер частиц; k_v – коэффициент восстановления скорости при ударе; k_f – коэффициент аэродинамического сопротивления; w – скорость газа; g – ускорение свободного падения.

Результаты решения уравнения (2) с учетом (4) приводятся на рис. 2 в виде зависимости распределения частиц по высоте кипящего слоя

для случая одинаковой крупности зерен исходного порошка при отсутствии измельчения. Экспериментальные данные получены на лабораторной установке реактора кипящего слоя при загрузке в реактор сферических частиц одинакового размера [13].

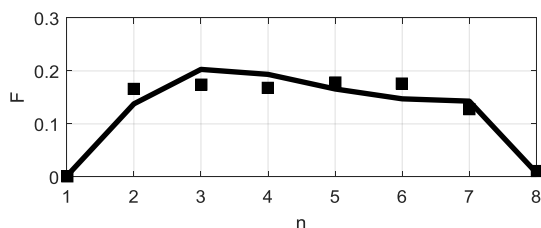


Рис. 2. Сопоставление результатов расчета по модели Больцмана (сплошная линия) с результатами эксперимента (точки): $W = 5,5$ м/с; подача материала в нижнюю ячейку с нулевой скоростью

Следует отметить, что на рис. 2 представлено одномерное распределение массы частиц по высоте аппарата, при этом трехмерное распределение преобразуется в одномерное суммированием по скоростям и по размерам зерен при выбранной высоте сечения аппарата:

$$F_{k_1}^{1B} = \sum_i \sum_j F_{k_1}^{3B}, \quad (5)$$

где верхний индекс «1B» относится к одномерному распределению; индекс «3B» — к трехмерному распределению материала по ячейкам реактора согласно модели Больцмана.

Для описания распределения частиц в реакторе в рамках теории цепей Маркова предлагается необходимые для расчета параметра модели определить в ходе расчета в рамках дискретных моделей уравнения Больцмана. Основные расчетные соотношения для реактора кипящего слоя, работающего в периодическом режиме, записываются согласно [1] и расчетной схемы (рис. 1, в). Для модели процесса, построенной в рамках теории цепей Маркова, традиционно используется описание текущего состояния процесса в виде вектора-столбца F , состоящего из масс материала в каждой ячейке, а его эволюции — в виде матричного равенства

$$(F^M)^{k_1} = P^M \left((F^M)^{k_1-1} + (F^M)_S^{k_1-1} \right), \quad (6)$$

где k_1 — номер перехода; $(F^M)_S^{k_1-1}$ — вектор подачи исходного материала (его масса, поступающая в реактор на каждом переходе); P^M — матрица переходных вероятностей — трехдиагональная матрица размера $n \times n$, в каждом столбце которой размещены вероятности для материала в данной ячейке перейти вниз, остаться и перейти вверх соответственно. Эти вероятности выражаются через безразмерный коэффициент диффузионного переноса $d = D\Delta t / \Delta x^2$ (D — коэффициент макродиффузии),

характеризующий действие на частицы случайных факторов, и безразмерную скорость движения частиц фракции

$$v_k = (w - v_s) \Delta t / \Delta x, \quad (7)$$

где w — скорость потока газа в ячейке; v_s — скорость витания частиц.

В линейных моделях считается, что $w = \text{const}$, т. е. скорость газа не зависит ни от наличия в реакторе материала, ни от номера ячейки. В реальных условиях материал загромождает сечение реактора, в результате чего скорость газа увеличивается, что, в свою очередь, изменяет содержание материала, т. е. процесс очевидно является нелинейным. Найденное решение уравнений (2), (4) в рамках модели Больцмана позволяет определить параметры идентификации для модели Маркова согласно следующих выражений:

$$[p_v^{1M}]_{k_2} = \frac{1}{N} \left[\sum_{i,j} p_v^{3B} \right]_{k_2}; \quad (8)$$

$$[p_n^{1M}]_{k_2} = \frac{1}{N} \left[\sum_{i,j} p_n^{3B} \right]_{k_2}; \quad (9)$$

$$[d_n^{1M}]_{k_2} = [p_n^{1M}]_{k_2}; \quad (10)$$

$$[v_k^{1M}]_{k_2} = [p_v^{1M}]_{k_2} - [d_n^{1M}]_{k_2}, \quad (11)$$

где N — параметр нормировки; нижний индекс «n» соответствует вероятностям частиц двигаться вниз; нижний индекс «v» — вверх реактора; индекс « k_2 » показывает номер ячейки.

Найденные согласно (8)–(11) параметры идентификации модели Маркова оказались разными для разных ячеек:

$$v_k = [0,0833 \ 0,0245 \ 0,0202 \ 0,0207 \ 0,0225 \ 0,0237 \ 0,0240],$$

$$d = [0 \ 0,0333 \ 0,0301 \ 0,0305 \ 0,0318 \ 0,0328 \ 0,0331].$$

Результаты расчетного анализа, проведенного в рамках модели Маркова (6), представлены на рис. 3, 4.

На рис. 3 приведено сопоставление результатов расчета по модели Больцмана с результатами расчетов, выполненных в рамках модели Маркова, и с экспериментальными значениями, полученными на лабораторной установке. Анализ приведенных результатов показывает, что найденные параметры идентификации для модели на основе теории цепей Маркова удовлетворительно описывают распределение материала по высоте реактора и могут быть в дальнейшем использованы для расчетного анализа совмещенных процессов (измельчения, классификации, сушки, тепломассообмена и т.д.) в реакторе кипящего слоя.

На рис. 4 продемонстрированы прогностические возможности модели на основе теории цепей Маркова, полученные в рамках модели с идентифицированными параметрами.

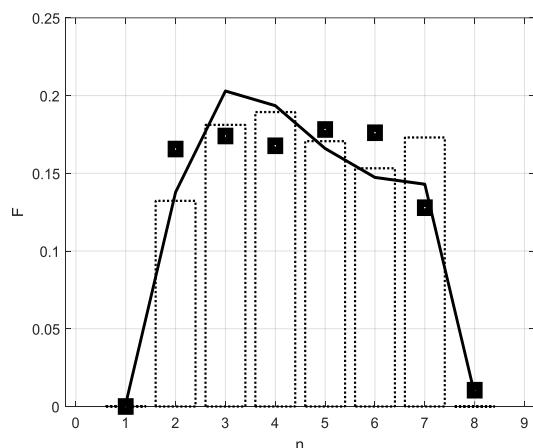


Рис. 3. Сопоставление результатов расчета по модели Больцмана (сплошная линия), по модели на основе теории цепей Маркова (пунктирная столбчатая диаграмма) с экспериментом (точки): $w = 5,5$ м/с, подача материала в нижнюю ячейку с нулевой скоростью

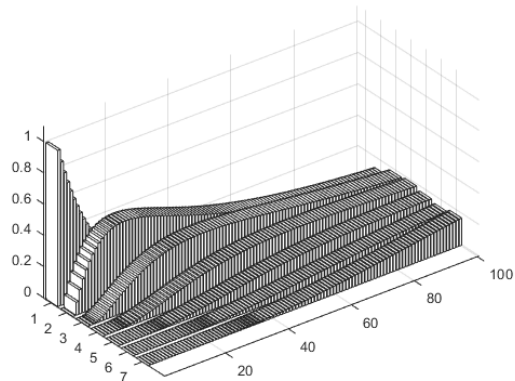


Рис. 4. Эволюция загрузки ячеек реактора в рамках модели на основе теории цепей Маркова

Выводы. Анализ полученных результатов показал адекватное описание процессов в реакторах кипящего слоя ячейечными моделями, построенными на основе теории цепей Маркова и идентифицированными на основе результатов, полученных в рамках дискретных моделей уравнения Больцмана.

Предложенный метод идентификации и верификации ячейечных моделей обеспечивает возможность одновременного получения приемлемых показателей простоты модели и точности расчета конструктивных и режимных параметров установок различного назначения. Анализ приведенных результатов показывает, что найденные параметры идентификации для модели на основе теории цепей Маркова удовлетворительно описывают распределение материала по высоте реактора и могут быть в дальнейшем использованы для расчетного анализа совмещенных процессов в реакторе кипящего слоя.

Список литературы

1. Баранцева Е.А., Мизонов В.Е., Хохлова Ю.В. Процессы смешивания сыпучих материалов: моделирование, оптимизация, расчет. – Иваново, 2008. – 116 с.

2. Application of multi-dimensional Markov chains to model kinetics of grinding with internal classification / V.E. Mizonov, V.P. Zhukov, H. Berthiaux, S. Bernotat // International journal of mineral processing. – 2004. – Vol. 74. – P. 307–315.

3. Огурцов А.В. Моделирование истирания частиц в кипящем слое на основе теории цепей Маркова // Известия высших учебных заведений. Сер.: Химия и химическая технология. – 2003. – Т. 46, № 7. – С. 64–66.

4. Berthiaux H., Mizonov V., Zhukov V. Application of the Theory of Markov Chains to Model Different Processes in Particle Technology // Powder Technology. – 2005. – Vol. 157, No. 1–3. – P. 128–137.

5. Алоян Р.М., Федосов С.В., Мизонов В.Е. Теоретические основы математического моделирования механических и тепловых процессов в производстве строительных материалов. – Иваново, 2011. – 255 с.

6. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.

7. Жуков В.П., Беляков А.Н. Моделирование совмещенных гетерогенных процессов на основе дискретных моделей уравнения Больцмана // Теоретические основы химической технологии. – 2017. – Т. 51, № 1. – С. 78–84.

8. Вулис Л.А. Теория и расчет магнитогазодинамических течений в каналах. – М.: Атомиздат, 1971. – 384 с.

9. Mizonov V., Zhukov V., Bernotat S. Simulation of Grinding: New Approaches. – Ivanovo, 1997. – 109 p.

10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Расчет многомерных совмещенных процессов измельчения, классификации в сыпучих средах» № 2010612671 / А.Н. Беляков, В.П. Жуков, А.А. Власюк, А.Е. Барочкин; опубли. 19 апреля 2010 года.

11. Жуков В.П., Барочкин А.Е., Беляков А.Н., Сизова О.В. Анализ и совершенствование методов решения дискретных моделей уравнения Больцмана // Вестник ИГЭУ. – 2021. – Вып. 6. – С. 62–69.

12. Бабуха Г.Л., Рабинович М.И. Механика и теплообмен потоков полидисперсной газозвеси. – Киев, 1969. – 219 с.

13. Mizonov V., Mitrofanov A., Ogurtsov A., Tannous K. Modeling of Particle Concentration Distribution in a Fluidized Bed by Means of the Theory of Markov Chains // Particulate Science and Technology. – 2014. – Vol. 32, No. 2. – P. 171–178.

References

1. Barantseva, E.A. Mizonov, V.E., Khokhlova, Yu.V. *Protsessy smeshivaniya sypushikh materialov: modelirovaniye, optimizatsiya, raschet* [Processes of mixing bulk materials: modeling, optimization, calculation]. Ivanovo, 2008. 116 p.

2. Mizonov, V.E., Zhukov, V.P., Berthiaux, H., Bernotat, S. Application of multi-dimensional Markov chains to model kinetics of grinding with internal classification. *International journal of mineral processing*, 2004, vol. 74, pp. 307–315.

3. Ogurtsov, A.V. Modelirovaniye istiraniya chashtits v kipiyashchem sloe na osnove teorii tsepey Markova [Simulation of abrasion of particles in a fluidized bed based on the theory of Markov chains]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Seriya: Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya*, 2003, vol. 46, no. 7, pp. 64–66.

4. Berthiaux, H., Mizonov, V., Zhukov, V. Application of the Theory of Markov Chains to Model Different Processes in Particle Technology. *Powder Technology*, 2005, vol. 157, no. 1–3, pp. 128–137.
5. Aloyan, R.M., Fedosov, S.V., Mizonov, V.E. *Teoreticheskie osnovy matematicheskogo modelirovaniya mekhanicheskikh i teplovykh protsessov v proizvodstve stroitel'nykh materialov* [Simulation of abrasion of particles in a fluidized bed based on the theory of Markov chains]. Ivanovo, 2011. 255 p.
6. Samarskiy, A.A. *Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery* [Mathematical modeling: Ideas. Methods. Examples]. Moscow: Fizmatlit, 2001. 320 p.
7. Zhukov, V.P., Belyakov, A.N. Modelirovanie sovmeshchennykh geterogennykh protsessov na osnove diskretnykh modeley uravneniya Bol'tsmana [Modeling of combined heterogeneous processes based on discrete models of the Boltzmann equation]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*, 2017, vol. 51, no. 1, pp. 78–84.
8. Vulis, L.A. *Teoriya i raschet magnitogazodinamicheskikh techeniy v kanalakh* [Theory and calculation of magnetogasdynamic flows in channels]. Moscow: Atomizdat, 1971. 384 p.
9. Mizonov, V., Zhukov, V., Bernotat, S. Simulation of Grinding: New Approaches. Ivanovo, 1997. 108 p.
10. Belyakov, A.N., Zhukov, V.P., Vlasyuk, A.A., Barochkin, A.E. *Raschet mnogomernykh sovmeshchennykh protsessov izmel'cheniya, klassifikatsii v sypuchikh sredakh* [Calculation of multidimensional combined processes of grinding, classification in bulk media]. Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2010612671 [Certificate of state registration of computer program № 2010612671], 2010.
11. Zhukov, V.P., Barochkin, A.E., Belyakov, A.N., Sizova, O.V. Analiz i sovershenstvovanie metodov resheniya diskretnykh modeley uravneniya Bol'tsmana [Analysis and improvement of methods for solving discrete models of the Boltzmann equation]. *Vestnik IGEU*, 2021, issue 6, pp. 62–69.
12. Babukha, G.L., Rabinovich, M.I. *Mekhanika i teploobmen potokov polidispersnoy gazovzvesi* [Mechanics and heat exchange of polydisperse gas suspension flows]. Kiev, 1969. 219 p.
13. Mizonov, V., Mitrofanov, A., Ogurtzov, A., Tan-nous, K. Modeling of Particle Concentration Distribution in a Fluidized Bed by Means of the Theory of Markov Chains. *Particulate Science and Technology*, 2014, vol. 32, no. 2, pp. 171–178.