УДК 536.2 (075) 46

**Евгения Валериевна Котова**
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», кандидат технических наук, доцент кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики, Россия, Самара, e-mail: larginaevgenya@mail.ru

**Василий Александрович Кудинов**
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретических основ теплотехники и гидромеханики, Россия, Самара, телефон +7 (846) 332-42-35, e-mail: totig@yandex.ru

**Ксения Владимировна Колотилкина**
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», аспирант кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики, Россия, Самара, телефон +7 (846) 332-42-35

**Екатерина Васильевна Стефанюк**
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», доктор технических. наук, профессор кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики, заведующий кафедрой трубопроводного транспорта, Россия, Самара, телефон +7 (846) 332-42-35, e-mail: stef-kate@yandex.ru

**Игорь Васильевич Кудинов**
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики, руководитель опытно-промышленной лаборатории «Нефтегазовые технологии производства водорода и графита», Россия, Самара, e-mail: igor-kudinov@bk.ru

# Исследование условий теплового взрыва в пластине с переменными свойствами при зависимости источника теплоты от температуры[1]

**Авторское резюме**

**Состояние вопроса.** Интерес к получению аналитических решений задач теплопроводности с переменными физическими свойствами среды при зависимости внутреннего источника теплоты от температуры объясняется необходимостью исследования высокотемпературных процессов теплового воспламенения и взрыва, протекающих в режимах с обострением, при которых теплота, локализуясь в ограниченной области пространства, в течение короткого диапазона времени приводит к неограниченному возрастанию температуры (тепловому взрыву). Исследование подобных задач в основном выполняется численными методами, так как их решение с помощью известных аналитических методов не предоставляется возможным. В связи с этим актуальным является разработка аналитических методов, позволяющих получать решения таких задач
**Материалы и методы.** Применительно к решению указанных задач теплопроводности вводятся в рассмотрение дополнительная функция и дополнительные граничные условия, состоящие из координатных соотношений, приводящих к выполнению уравнения теплопроводности на границах. Дополнительная функция представляет временно̀е изменение температуры в некоторой точке пространственной переменной, ее применение позволяет снизить порядок исходного уравнения – из уравнения в частных производных оно приводится к обыкновенному уравнению. Применение дополнительных граничных условий позволяет исключить процесс интегрирования исходного дифференциального уравнения по пространственной переменной вследствие его граничного выполнения.
**Результаты.** Приводится доказательство теоремы, согласно которой граничное выполнение уравнения приводит к его выполнению во всей области определения пространственной переменной. Найдено решение задачи теплопроводности с переменными физическими свойствами и температурозависящим внутренним источником теплоты. Полученное решение позволяет отделить стационарные режимы от режимов неограниченного возрастания температуры, протекающих при положительном первом собственном числе. Установлено, что возрастание температуры происходит в узкой области пространственной переменной в коротком диапазоне времени, то есть в режиме с обострением. Применен метод, позволяющий при большом числе используемых дополнительных граничных условий исключить интегрирование уравнения по координате, что подтверждено доказательством теоремы. Полученное решение использовано для нахождения мощности источника теплоты, при которой градиент температуры стенки реактора пиролиза метана не превышает допустимой (заданной) величины.
**Выводы**. С использованием дополнительных граничных условий и дополнительной искомой функции получено аналитическое решение сложнейшей нелинейной задачи теплопроводности с нелинейным источником теплоты. Рас-

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2026-0003) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета.
This study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under the state assignment of Samara State Technical University (project no. FSSE-2026-0014)

© Котова Е.В., Кудинов В.А., Колотилкина К.В., Стефанюк Е.В., Кудинов И.В., 2026
Вестник ИГЭУ, 2026, вып. 5, с. 36–45.

смотренный метод позволяет выполнять исследование процессов горения и взрыва, сопровождающихся неограниченным возрастанием температуры, а также любые другие тепловые процессы в конструкциях с внутренними источниками теплоты, например индукционный прогрев металлов.

**Ключевые слова:** теплопроводность, пластина, переменные свойства, температурозависящий источник, дополнительные граничные условия, дополнительная функция, интеграл теплового баланса

**Evgenia Valerievna Kotova**
Samara State Technical University, Candidate of Engineering Sciences, (PhD), Associate Professor of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics Department, Russia, Samara, e-mail: larginaevgenya@mail.ru

**Vasily Alexandrovich Kudinov**
Samara State Technical University, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, (Post-doctoral degree), Professor, Head of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics Department, Russia, Samara,
telephone +7 (846) 332-42-35, e-mail: totig@yandex.ru

**Ksenia Vladimirovna Kolotilkina**
Samara State Technical University, Postgraduate Student of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics Department, Russia, Samara, telephone +7 (846) 332-42-35

**Ekaterina Vasilievna Stefanyuk**
Samara State Technical University, Doctor of Engineering Sciences (Post-doctoral degree), Professor of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics Department, Head of Pipeline Transportation Department, Russia, Samara, telephone +7 (846) 332-42-35, e-mail: stef-kate@yandex.ru

**Igor Vasilievich Kudinov**
Samara State Technical University, Doctor of Engineering Sciences (Post-doctoral degree), Professor, Head of Physics Department, Head of Experimental Industrial Laboratory “Oil and Gas Technologies for Hydrogen and Graphite Production”, Russia, Samara, e-mail: igor-kudinov@bk.ru

# Study of thermal explosion conditions in a plate with variable properties and temperature-dependent heat source

**Abstract**

**Background.** The interest to obtain analytical solutions to heat conduction problems with variable physical properties and a temperature-dependent internal heat source, is relevant due to the need to study high-temperature processes of thermal ignition and explosion that occur in blow-up regimes. In these regimes heat becomes localized in a bounded region of space and leads to an unbounded increase in temperature (thermal explosion) within a short time interval. The study of such problems is mainly carried out by numerical methods, since their solution using known analytical methods is not feasible. In this regard, the development of analytical methods to get solutions to such problems is of current importance.
**Materials and methods.** To solve the specified heat conduction problems, an additional function (AF) and additional boundary conditions (ABCs) are introduced. These conditions consist of coordinate relations that ensure the heat conduction equation is satisfied at the boundaries. The AF represents the temporal variation of temperature at a certain point of the spatial variable. Its application makes it possible to reduce the order of the original equation, transforming it from a partial differential equation into an ordinary differential equation. The application of ABCs allows one to eliminate the process of integrating the original differential equation with respect to the spatial variable, as the equation is satisfied at the boundaries.
**Results.** A proof is presented for a theorem stating that if the equation holds on the boundary, it holds throughout the entire domain of the spatial variable. A solution has been found for the heat conduction problem involving variable physical properties and a temperature-dependent internal heat source. The obtained solution makes it possible to separate stationary regimes from regimes of unbounded temperature growth, which occur when the first eigenvalue is positive. It has been found that the temperature rise occurs within a narrow spatial region over a short time interval, that is, in a blow-up regime. A method is employed that makes it possible to eliminate integration of the equation with respect to the coordinate when a large number of additional boundary conditions are used. This is confirmed by the proof of the theorem. The obtained solution has been used to determine the heat source power at which the temperature gradient of the methane pyrolysis reactor wall does not exceed the permissible (specified) value.
**Conclusions.** By employing additional boundary conditions and an auxiliary unknown function, an analytical solution has been obtained for a highly complex nonlinear heat conduction problem involving a nonlinear heat source. The method described enables the analysis of combustion and explosion processes characterized by unbounded temperature rise, as well as other thermal processes in structures with internal heat sources, such as the induction heating of metals.

**Key words:** thermal conductivity, plate, variable properties, temperature-dependent source, additional boundary conditions, additional function, heat balance integral

**DOI:** 10.17588/2072-2672.2026.5.036-045

**Введение.** Интерес к получению аналитических решений краевых задач связан с внедрением в технике композиционных материалов, а также с необходимостью исследования процессов, сопровождающихся тепловым воспламенением и взрывом. Исследование подобных задач с помощью известных точных аналитических методов не представляется возможным [1, 2].

В [3–5] применительно к решению нестационарных задач теплопроводности вводятся дополнительная функция (ДФ) и дополнительные условия на границах (ДГУ), позволяющие обеспечить граничное выполнение уравнения теплопроводности. В [5, 6] доказаны теоремы, согласно которым граничное выполнение уравнения адекватно его выполнению и внутри области.

В [7, 8] рассматриваются модификации методов, предложенных в [3–5]. И, в частности, дополнительная функция впервые задается в точках задания граничного условия первого рода, в связи с чем она принимается в виде производной от температуры в этой точке. В [9] источник теплоты в неоднородном двумерном уравнении, инициируемый электромагнитным импульсом, зависит от координат и времени. Решение задачи получено численным методом с использованием локально-одномерной схемы. В [10, 11] рассматривается численное решение нелинейной математической модели двухфазной задачи Стефана для слоистой системы диэлектриков при зависимости параметров тела от температуры и теплового источника от координаты. В [12] получено аналитическое решение задачи теплопроводности для температурного поля, возникающего при сварке под флюсом. При этом применена теорема Дюамеля и конечные интегральные преобразования.

В [13] приведены результаты исследований математической модели, описываемой нелинейным уравнением теплопроводности (коэффициент теплопроводности и внутренний источник теплоты – степенные функции температуры). Подобные модели описывают процессы горения, в которых интенсивность горения пропорциональна температуре. Рассматривается бесконечное пространство $(-\infty < x < \infty)$, в котором в начальный момент времени нагрет лишь маленький участок в окрестностях точки $x = 0$. Результаты численных исследований показали, что профили температуры локализуются в некоторой области $(-1 \le x \le +1)$, вне которой температура равна нулю ($t = 0$). В данном случае происходит локализация теплоты в ограниченной области, причем решение существует лишь в течение ограниченного времени, называемого временем обострения, в течение которого температура в точке $x = 0$ обращается в бесконечность.

Одним из направлений получения аналитических решений указанных задач является применение дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса. Основная проблема этого метода – низкая точность, которая связана с недостаточным количеством граничной информации, ограничивающей получение решения для большого числа приближений [3–5]. Для ее решения используются ДГУ, позволяющие обеспечить граничное выполнение уравнения. Отметим, что ДГУ выполняются при любом методе получения аналитических решений (включая классические точные методы), в чем можно убедиться непосредственной подстановкой точных решений в использованные в настоящем исследовании ДГУ.

Дополнительная функция, представляющая временно̀е изменение температуры в одной из точек пространственной переменной, также является искомой величиной в любом методе получения аналитического решения, не являясь предметом специального рассмотрения. Ее отдельное рассмотрение позволяет снизить порядок исходного уравнения в частных производных, приводя его к обыкновенному уравнению. Использование ДФ совместно с ДГУ позволяет находить аналитические решения сложнейших нелинейных краевых задач, в том числе и с зависящими от температуры физическими свойствами среды и источниками теплоты, что оказывается возможным вследствие использования специфических свойств ДГУ в интегральном методе теплового баланса, благодаря которым процесс интегрирования исходного уравнения по координате заменяется на более простую операцию определения интеграла теплового баланса – осредненного аналога исходного уравнения.

**Методы исследования.** Рассмотрим применение метода к решению следующей задачи теплопроводности:

$$c\rho\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right] + \omega(T), \quad (1)$$

$(t > 0;\ 0 < x < \delta)$;

$$T(x,0) = T_0; \quad (2)$$

$$\partial T(0,t)/\partial x = 0; \quad (3)$$

$$T(\delta,t) = T_{\text{ст}}, \quad (4)$$

где $T$, $x$, $t$ – температура, координата, время; $T_0$ – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура при $x = \delta$; $\lambda(x)$ – коэффициент теплопроводности; $\omega(T)$ – внутренний источник теплоты; $c$, $\rho$ – теплоемкость, плотность; $\delta$ – толщина пластины.

Рассмотрим следующие зависимости $\lambda(x)$ и $\omega(T)$:

$$\lambda(x) = \lambda_0 \exp(\pm mx); \quad (5)$$

$$\omega(T) = \omega_0(1 + \gamma(T - T_0)), \quad (6)$$

где $\lambda_0$ – коэффициент теплопроводности при $x = 0$; $m > 0$ – постоянная, 1/м; $\omega_0$ – мощность

источника при $T = T_0$; $\gamma > 0$ – постоянная, 1/К; знак «плюс» в показателе экспоненты означает возрастание $\lambda$ с увеличением $x$, знак «минус» – убывание.

Уравнение (1) с учетом (5), (6) при положительном показателе экспоненты принимает вид

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[\exp(mx)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right] + \\ + \frac{\omega_0}{c\rho}(1+\gamma(T(x,t)-T_0)). \quad (7)$$

Введем обозначения:

$$\Theta = \frac{T-T_0}{\Delta T};\ \mathrm{Fo} = \frac{a_0 t}{\delta^2};\ \xi = \frac{x}{\delta};\ \mathrm{Po}_1 = \frac{\omega_0 \delta^2}{\lambda_0 \Delta T}; \\ \mathrm{Po} = \frac{\omega_0 \gamma \delta^2}{\lambda_0};\ \nu = m\delta, \quad (8)$$

где $\Theta$, $\xi$, Fo – безразмерные переменные (температура, координата, время); Po, $\mathrm{Po}_1$ – безразмерные комплексы; $a_0 = \lambda_0/(c\rho)$ – коэффициент температуропроводности при $x = 0$; $\Delta T = T_{ст} - T_0$.

С учетом (8) математическая постановка будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(e^{\nu\xi}\frac{\partial \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi}\right) + \\ + \mathrm{Po}\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) + \mathrm{Po}_1 \quad (9)$$

$$(\mathrm{Fo} > 0;\ 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi,0) = 0; \quad (10)$$

$$\left.\frac{\partial \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 0; \quad (11)$$

$$\Theta(1,\mathrm{Fo}) = 1. \quad (12)$$

Введем ДФ $q(\mathrm{Fo})$ последовательно в точках: $\xi = 0$; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9. Например, в точке $\xi = 0$ $q(\mathrm{Fo})$ имеет вид

$$q(\mathrm{Fo}) = \Theta(0,\mathrm{Fo}). \quad (13)$$

Температура в точке $\xi$ = 0 заранее не определена – она изменяется лишь от времени и является определяемой величиной задачи (9)–(12), поэтому ее специальное рассмотрение эту задачу не изменяет, но существенно упрощает получение решения.

Рассмотрим получение решения задачи в виде ряда

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 - \sum_{k=1}^{n} b_k(q(\mathrm{Fo}))\varphi_k(\xi) \quad (14)$$

$$(k = \overline{1,n}),$$

где $b_k(q(\mathrm{Fo}))$ – функции, зависящие от времени; $\varphi_k(\xi) = \cos(r\pi\xi/2)$ – функции, зависящие от координаты $(r = 2k-1)$.

Формула (14) удовлетворяет граничным условиям (11), (12). В первом приближении, подставляя (14) (при $n$ = 1) в (13), для $b_1(q(\mathrm{Fo}))$ получаем алгебраическое уравнение, имеющее решение: $b_1(q(\mathrm{Fo})) = 1 - q(\mathrm{Fo})$. Из этого следует

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 - (1-q(\mathrm{Fo}))\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right). \quad (15)$$

Интеграл теплового баланса (9) имеет вид

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} d\xi = \int_0^1 \left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[e^{\nu\xi}\frac{\partial \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi}\right] + \right. \\ \left. + \mathrm{Po}\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) + \mathrm{Po}_1\right\} d\xi. \quad (16)$$

Подставим (15) в (16):

$$\eta_1 \frac{dq(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} + \eta_2 q(\mathrm{Fo}) + \eta_3 = 0, \quad (17)$$

где $\eta_1 = -4/(2\pi)$; $\eta_2 = (4\mathrm{Po} - \pi^2 e^{\nu})/(2\pi)$; $\eta_3 = \mathrm{Po}(1-(2/\pi)) + \mathrm{Po}_1$.

Очевидно, что применение ДФ в интегральном методе теплового баланса приводит уравнение (9) к обыкновенному уравнению (17) относительно $q(\mathrm{Fo})$, при этом выполняется достаточно простая операция определения интегралов в соотношении (16).

Интегрируя уравнение (17), имеем

$$q(\mathrm{Fo}) = C\exp\left[\left(\mathrm{Po} - \frac{\pi^2 e^{\nu}}{4}\right)\mathrm{Fo}\right] - \\ - \frac{2\pi(\mathrm{Po}+\mathrm{Po}_1) - 4\mathrm{Po} + \pi^2 e^{\nu}}{4\mathrm{Po} - \pi^2 e^{\nu}}, \quad (18)$$

где $C$ – постоянная интегрирования.

Подставим (18) в (15):

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 - \left\{1 - C\exp\left[\left(\mathrm{Po} - \frac{\pi^2 e^{\nu}}{4}\right)\mathrm{Fo}\right] + \right. \\ \left. + \frac{2\pi(\mathrm{Po}+\mathrm{Po}_1) - 4\mathrm{Po} + \pi^2 e^{\nu}}{4\mathrm{Po} - \pi^2 e^{\nu}}\right\}\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right). \quad (19)$$

Потребуем выполнения ортогональности невязки начального условия (10) к координатной функции первого приближения $\varphi_1(\xi)$:

$$\int_0^1 \Theta(\xi,0)\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) d\xi = 0. \quad (20)$$

Подставляя (19) в (20), для постоянной $C$ получаем алгебраическое уравнение, имеющее следующее решение:

$$C = \frac{4\pi(\mathrm{Po}+\mathrm{Po}_1)}{2(4\mathrm{Po}-\pi^2 e^{\nu})} - \frac{4}{\pi}. \qquad (21)$$

Формула (19) с учетом (21) принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 - \left\{1 - \left[-\frac{4}{\pi} + \frac{4\pi(\mathrm{Po}+\mathrm{Po}_1)}{2(4\mathrm{Po}-\pi^2 e^{\nu})}\right]\exp(\mu_1 \mathrm{Fo}) + \right.$$
$$\left. + \frac{2\pi\,(\mathrm{Po}+\mathrm{Po}_1) - 4\mathrm{Po} + \pi^2 e^{\nu}}{4\mathrm{Po}-\pi^2 e^{\nu}}\right\}\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right), \qquad (22)$$

где $\mu_1 = \mathrm{Po} - \pi^2 e^{\nu}/4$ – первое собственное число задачи (9)–(12).

Формула (22) представляет первое приближение задачи (9)–(12). При $\mathrm{Po} = 0$; $\mathrm{Po}_1 = 0$; $\nu = 0$ (однородная пластина без источника теплоты) формула (22) будет иметь вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 - \frac{4}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right), \qquad (23)$$

где $\pi^2/4$ – первое собственное число линейной краевой задачи (это число совпадает с точным его значением).

Расчеты по (23) для $0{,}1 \le \mathrm{Fo} < \infty$ отличаются от точных значений температур в пределах 3 % [1].

В классических аналитических методах собственные числа находятся путем интегрирования задачи Штурма–Лиувилля, которая рассматривается в пространственных переменных. Следовательно, используется иной метод их определения, связанный с интегрированием временно́го обыкновенного уравнения.

Формула (22) позволяет отделить стационарные режимы от режимов неограниченного возрастания температуры – теплового взрыва. В случае, если коэффициент показателя экспоненты $(\mathrm{Po} - \pi^2 e^{\nu}/4) > 0$, с увеличением числа Fo будет происходить неограниченное возрастание температуры. При $(\mathrm{Po} - \pi^2 e^{\nu}/4) < 0$ экспонента в (23) с увеличением числа Fo убывает и при $\mathrm{Fo} \to \infty$ имеем стационарный режим теплообмена. Знак показателя экспоненты зависит от величин Po, $\mathrm{Po}_1$, $\nu$, задаваемых в исходных данных.

При задании ДФ в точках $\xi$ = 0,3; 0,5; 0,7; 0,9 формулы для решений имеют различный вид. Их исследования показали, что определяемые по этим формулам температуры при любых конкретных исходных данных полностью совпадают. Следовательно, решение не зависит от точки задания ДФ (исключая точку $\xi$ = 1, где задано граничное условие первого рода), что имеет важное значение при решении задач, в которых граничные условия первого рода заданы на обеих границах, а также для задач с переменным начальным условием, когда граничные значения температур также известны. Во всех этих случаях ДФ может быть задана в любой внутренней точке области, исключая граничные точки.

Повышение точности обусловлено увеличением числа членов решения (14). Неизвестные функции $b_k(q(\mathrm{Fo}))$ определяются из (13) и дополнительных граничных условий (ДГУ) такого вида, выполнение которых адекватно выполнению уравнения (9) в точке $\xi$ = 0. Они определяются следующим образом. Продифференцируем (13) по Fo:

$$\frac{\partial q(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \left.\frac{\partial \Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}\right|_{\xi=0}. \qquad (24)$$

Подставляя (24) в (9), находим первое ДГУ в точке $\xi$ = 0:

$$\frac{\partial q(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} + q(\mathrm{Fo})\mathrm{Po} + \mathrm{Po}_1. \qquad (25)$$

Для получения следующего ДГУ продифференцируем (25) по переменной Fo, а уравнение (9) – дважды по переменной $\xi$:

$$\frac{\partial^2 q(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^3 \Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2 \partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Po}\frac{\partial q(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}; \qquad (26)$$

$$\frac{\partial^3 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2 \partial \mathrm{Fo}} = \nu^3 e^{\nu\xi}\frac{\partial \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi} +$$
$$+ 3\nu^2 e^{\nu\xi}\frac{\partial^2 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} + \mathrm{Po}\frac{\partial^2 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2}. \qquad (27)$$

Соотношение (27) применительно к точке $\xi$ = 0 с учетом (11) принимает вид

$$\frac{\partial^3 \Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2 \partial \mathrm{Fo}} = (3\nu^2 + \mathrm{Po})\frac{\partial^2 \Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2}. \qquad (28)$$

Подставляя (28) в (26), находим второе ДГУ для точки $\xi$ = 0:

$$\frac{\partial^2 q(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} = (3\nu^2 + \mathrm{Po})\frac{\partial^2 \Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} + \mathrm{Po}\frac{\partial q(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}. \qquad (29)$$

Аналогично можно получить и последующие ДГУ в точке $\xi$ = 0.

Для получения второго приближения подставим (14) ($n$ = 2) в (13), (25). Для $b_k(q(\mathrm{Fo}))$ имеем систему, включающую два алгебраических уравнения и имеющую решение:

$$b_1(q) = (-4q' - I_1 q + I_2)/I_3;$$
$$b_2(q) = (-4q' - I_4 q + I_5)/I_3, \qquad (30)$$

где $q' = \dfrac{dq}{d\mathrm{Fo}}$; $\quad I_1 = 9\pi^2 - 4\mathrm{Po}$; $\quad I_2 = 9\pi^2 + 4\mathrm{Po}_1$;

$I_3 = 8\pi^2$; $I_4 = \pi^2 - 4\mathrm{Po}$; $I_5 = \pi^2 + 4\mathrm{Po}_1$.

Соотношение (14) будет иметь вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 - b_1(q(\mathrm{Fo}))\cos(\pi\xi/2) -$$
$$- b_2(q(\mathrm{Fo}))\cos(3\pi\xi/2). \qquad (31)$$

Подставим (31) в (16):

$$R_1 q'' + R_2 q' + R_3 q + R_4 = 0,$$

где $q'' = \dfrac{d^2 q}{d\mathrm{Fo}^2}$; $R_1 = \dfrac{4}{3\pi^3}$; $R_2 = \dfrac{7}{3\pi} + \dfrac{e^{\nu}}{\pi} - \dfrac{8\mathrm{Po}}{3\pi^3}$;

$$R_3 = \frac{4\mathrm{Po}^2}{3\pi^3} - \frac{7\mathrm{Po}}{3\pi} + \frac{3\pi e^{\nu}}{4} - \frac{\mathrm{Po} e^{\nu}}{\pi};$$

$$R_4 = \mathrm{Po}\left(\frac{4\mathrm{Po}_1}{3\pi^3} + \frac{7}{3\pi} - 1\right) - \mathrm{Po}_1\left(1 + \frac{e^{\nu}}{\pi}\right) - \frac{3\pi e^{\nu}}{4}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$q(\mathrm{Fo}) = C_1 e^{\mu_1 \mathrm{Fo}} + C_2 e^{\mu_2 \mathrm{Fo}} - R_4 / R_3, \qquad (32)$$

где $C_1$, $C_2$ – константы интегрирования; $\mu_1$, $\mu_2$ – первое и второе собственные числа, определяемые по формуле

$$\mu_{1,2} = \exp(0{,}5 R_1 (\pm\sqrt{R_2^2 - 4R_1 R_3} - R_2)). \qquad (33)$$

**Результаты исследования.** Согласно расчетам по (31), неограниченное возрастание температуры во времени (тепловой взрыв) происходит при положительном первом собственном числе.

Если принять $\nu = 0$, $\mathrm{Po} = 0$, $\mathrm{Po}_1 = 0$, то первое и второе собственные числа совпадают с точными значениями: $\mu_1 = \pi^2 / 4$; $\mu_2 = 9\pi^2 / 4$ [1].

Соотношение (31) с учетом (30)–(33) представляет решение задачи (9)–(12) во втором приближении. Константы интегрирования $C_1$ и $C_2$ находятся путем выполнения требования ортогональности невязки начального условия (10) к координатным функциям $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$:

$$\int_0^1 \Theta(\xi, 0)\varphi_j(\xi)\, d\xi = 0, \quad (j = k = 1,2). \qquad (34)$$

Подставив (31) в (34), для определения $C_1$ и $C_2$ имеем систему двух алгебраических уравнений. Нахождением констант интегрирования завершается процесс получения второго приближения задачи (9)–(12), определяемого по (31).

Результаты расчетов по (31) приведены на рис. 1–4. Расчеты выполнены для двух вариантов значения $\nu$ – положительного и отрицательного. При положительном $\nu$ теплопроводность с увеличением координаты $\xi$ возрастает, а при отрицательном – уменьшается. Для каждого из вариантов находились значения числа Po, приводящие к стационарному режиму и к тепловому взрыву. Величина $\mathrm{Po}_1 = 8{,}3 \cdot 10^{-5}$ использована во всех вариантах расчетов. Для каждого варианта расчета приводятся собственные числа, определяемые по (33). Знаком первого собственного числа определяется наличие или отсутствие теплового взрыва – тепловой взрыв имеет место при положительном первом собственном числе. Например, при $\nu = 1$; $\mathrm{Po} = 0{,}05$ получены следующие собственные числа: $\mu_1 = -4{,}883$; $\mu_2 = -32{,}811$. В данном случае при $\mathrm{Fo} > 3$ имеем стационарное состояние (рис. 1). При $\nu = -1$; $\mathrm{Po} = 0{,}05$; $\mu_1 = -1{,}015$; $\mu_2 = -18{,}88$ стационарное состояние имеем для всех $\mathrm{Fo} > 8$ (рис. 2). Отметим, что в данном случае время перехода к стационарному состоянию значительно больше, по сравнению с предыдущим вариантом. При $\nu = 2$; $\mathrm{Po} = 8$; $\mu_1 = 1{,}848$; $\mu_2 = -57{,}816$ положительное первое собственное число приводит к неограниченному возрастанию температуры во времени (рис. 3). При $\nu = -2$; $\mathrm{Po} = 0{,}05$; $\mu_1 = -0{,}365$; $\mu_2 = -17{,}808$ первое собственное число отрицательное – стационарное состояние устанавливается при $\mathrm{Fo} \approx 60$, т. е. в этом случае происходит существенное увеличение времени установления стационарного состояния, по сравнению со всеми предыдущими вариантами с отрицательным первым собственным числом (рис. 4). Результаты согласуются с результатами работы [13] в том смысле, что теплота локализуется в ограниченной области $-1 \le x \le 1$ (задача (13)–(16) представляет задачу с симметричными граничными условиями первого рода) при неограниченном возрастании температуры в точке $x = 0$ и при постоянном ее значении в точке $x = \pm 1$ ($x = -1$ и $x = 1$). Следует также отметить ограниченность времени выхода температуры на бесконечно большие значения, т. е. наблюдается режим с обострением, несмотря на то что внутренний источник теплоты описывается линейной функцией температуры, а не степенной (как в [13]).

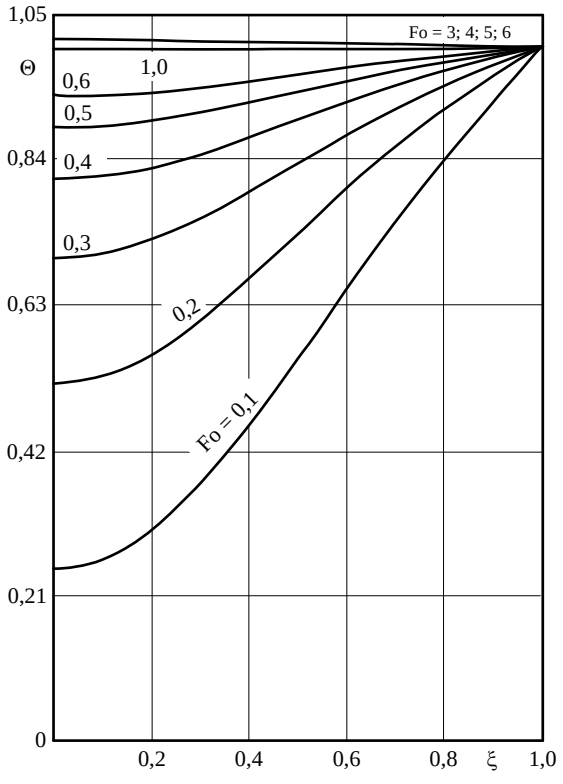



Рис. 1. Изменение температуры (расчет по формуле (31)): $\mathrm{Po} = 0{,}05$; $\nu = 1$; $\mu_1 = -4{,}883$; $\mu_2 = -32{,}811$

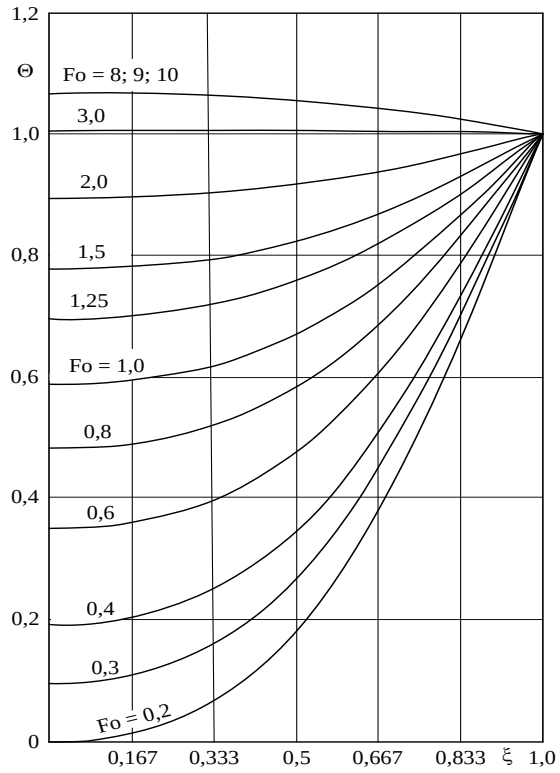



Рис. 2. Изменение температуры (расчет по формуле (31)): $\mathrm{Po} = 0{,}05$; $\nu = -1$; $\mu_1 = -1{,}015$; $\mu_2 = -18{,}88$

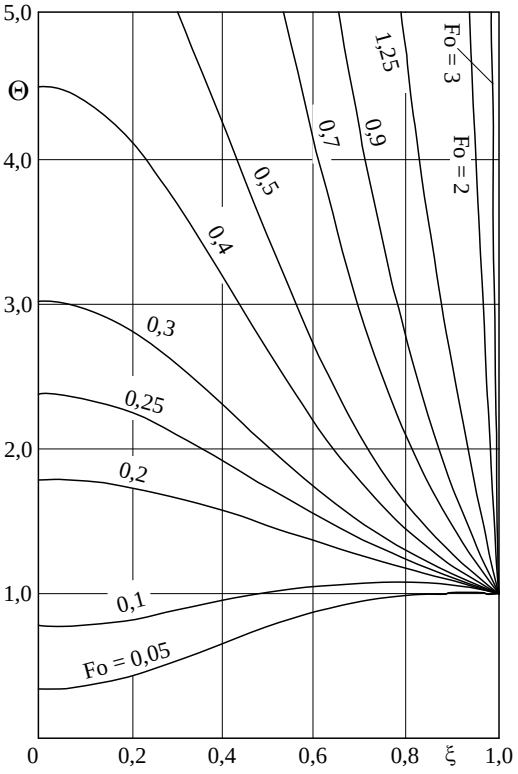



Рис. 3. Изменение температуры (расчет по формуле (31)): $\mathrm{Po} = 8$; $\nu = 2$; $\mu_1 = 1{,}848$; $\mu_2 = -57{,}816$

При постоянных физических свойствах и источнике теплоты ($m$ = 0; $\gamma$ = 0) метод с применением ДФ и ДГУ приводит к точным аналитическим решениям. Постановка задачи в данном случае имеет вид:

$$\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) / \partial\mathrm{Fo} = \partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) / \partial\xi^2 + \mathrm{Po} \qquad (35)$$

$$(\mathrm{Fo} > 0;\ 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi,0) = 0; \qquad (36)$$

$$\partial\Theta(0,\mathrm{Fo}) / \partial\xi = 0; \qquad (37)$$

$$\Theta(1,\mathrm{Fo}) = 1. \qquad (38)$$

Решение задачи при ДФ вида (13) принимается следующим:

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2) + \sum_{k=1}^{n} b_k(q)\varphi_k(\xi). \qquad (39)$$

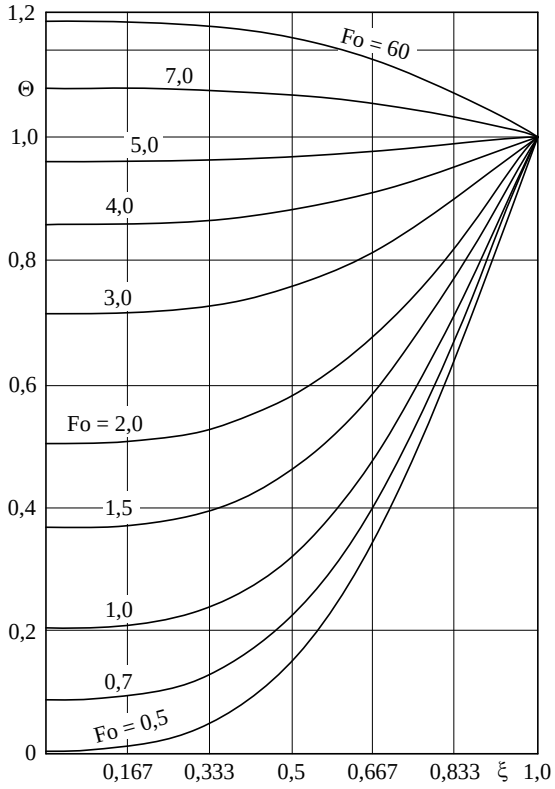



Рис. 4. Изменение температуры (расчет по формуле (31)): $\mathrm{Po} = 0{,}05$; $\nu = -2$; $\mu_1 = -0{,}365$; $\mu_2 = -17{,}808$

Формула (39) удовлетворяет условиям (37), (38). Неизвестные $b_k(q(\mathrm{Fo}))$, ($k = \overline{1,n}$) находятся из (13) и следующих ДГУ:

$$\frac{\partial q(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} + \mathrm{Po}; \qquad (40)$$

$$\partial^i\Theta(0,\mathrm{Fo}) / \partial\xi^i = 0;\ (i = 3,5,7,\ldots); \qquad (41)$$

$$\partial^i\Theta(1,\mathrm{Fo}) / \partial\xi^i = 0,\ (i = 4,6,8,\ldots); \qquad (42)$$

$$\frac{\partial^{2i}\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^{2i}} = \frac{\partial^i q(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^i},\ (i = 2,3,4,\ldots). \qquad (43)$$

Очевидно, что, благодаря координатным функциям, ДГУ (41), (42) выполняются решением

(39). В первом приближении ($n=1$) после подстановки (39) в (13) для $b_1(q(\mathrm{Fo}))$ имеем алгебраическое уравнение, имеющее решение: $b_1(q(\mathrm{Fo}))=q(\mathrm{Fo})-1-\mathrm{Po}/2$. Соотношение (39) принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=1+\frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2)+\left(q-1-\frac{\mathrm{Po}}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right). \quad (44)$$

Подставляя (44) в (35) и применяя полученное соотношение к любой точке пространственной переменной, находим

$$8\frac{\partial q(\mathrm{Fo})}{\partial Fo}+2\pi^2 q(\mathrm{Fo})-\pi^2(2+\mathrm{Po})=0. \quad (45)$$

Отметим, что уравнение (45) получено без привязки к конкретному значению пространственной переменной и, следовательно, оно справедливо для любого $\xi$. Этот факт объясняется тем, что, благодаря выполнению решением (39) ДГУ (41), (42), уравнение (35) оказывается выполненным во всей области переменной $\xi$.

Интегрируя уравнение (45) и подставляя полученное решение в (44), получим

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=1+\frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2)+ +C_1\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right). \quad (46)$$

Постоянная интегрирования $C_1$ находится из интеграла взвешенной невязки начального условия (36):

$$\int_0^1\left[1+\frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2)+C_1\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)\right]\times \times\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)d\xi=0. \quad (47)$$

Определяя интегралы, находим

$$C_1=-4(\pi^2-4\mathrm{Po})/\pi^3. \quad (48)$$

Решение (46) точно выполняет уравнение (35), граничные условия (37), (38) и приближенно – начальное условие (36). Повышение точности определяется числом членов ряда (39).

Для нахождения решения во втором приближении подставим (39) ($n$ = 2) в (13), (40). Для $b_1(q(\mathrm{Fo}))$ и $b_2(q(\mathrm{Fo}))$ имеем два алгебраических уравнения. После их решения (39) получим

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=1+\frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2)+\left[\frac{q'}{2\pi^2}+\frac{9}{8}\left(q-1-\frac{\mathrm{Po}}{2}\right)\right]\times \times\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)+\left[\frac{1}{8}\left(1+\frac{\mathrm{Po}}{2}-q\right)-\frac{q'}{2\pi^2}\right]\cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right). \quad (49)$$

Подставляя (49) в уравнение (35), находим

$$\frac{16q''}{\pi^4}+\frac{40q'}{\pi^2}+9\left(q-1-\frac{\mathrm{Po}}{2}\right)=0. \quad (50)$$

Интегрируя уравнение (50) и подставляя полученное решение в (49), получим

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=1+\frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2)+C_1e^{-\nu_1\mathrm{Fo}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)+ +C_2e^{-\nu_2\mathrm{Fo}}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right), \quad (51)$$

где $\nu_1=\pi^2/4$, $\nu_2=9\pi^2/4$ – собственные числа, совпадающие с точными их величинами [1]; $C_1$, $C_2$ – постоянные.

Постоянные $C_1$ и $C_2$ находятся из (36) путем выполнения условия ортогональности невязки (36) к функциям $\varphi_j(\xi)=\cos(j\pi\xi/2)$, ($j=r=2k-1$; $k$ = 1,2):

$$\int_0^1\left[1+\frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2)+C_1\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)+C_2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right)\right], \cos\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right)d\xi=0 \quad (j=1,3). \quad (52)$$

Ортогональность косинусов приводит к разделению неизвестных в системе (52) (каждое уравнение содержит одно неизвестное). Из решения этих уравнений получены следующие значения $C_1$ и $C_2$:

$$C_1=-4(\pi^2+4\mathrm{Po})/\pi^3;\ C_2=4(9\pi^2+4\mathrm{Po})/(27\pi^3).$$

Подставляя найденные из решения системы уравнений (52) постоянные интегрирования $C_1$ и $C_2$ в соотношение (51), получаем

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=1+\frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2)-\frac{4}{\pi^3}(\pi^2+4\mathrm{Po})\,e^{-\nu_1\mathrm{Fo}}\times \times\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)+\frac{4}{27\pi^3}(9\pi^2+4\mathrm{Po})\,e^{-\nu_2\mathrm{Fo}}\times \times\cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right). \quad (53)$$

В третьем приближении $b_k(q(\mathrm{Fo}))$ ($k$ = 1,2,3) находятся из (13), (40), (43) (при $i$ = 2). Для $q(\mathrm{Fo})$ имеем обыкновенное уравнение третьего порядка. Константы его интегрирования определяются из (36). Решение в третьем приближении будет иметь вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=1+\frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2)+ +\sum_{k=1}^{n}A_k(1+\mathrm{Po}/\nu_k^2)e^{-\nu_k^2\mathrm{Fo}}\cdot\cos(\nu_k\xi), \quad (54)$$

где $A_k=4(-1)^{k+1}/(r\pi)$; $\nu_k=r\pi/2$; $r=2k-1$; $n=3$.

Из (54) следует, что формулы для $A_k$ и $\nu_k$ совпадают с точными формулами для них. Тогда при $n\to\infty$ решение (54) совпадает с точным аналитическим решением задачи (35)–(38) [1].

Для подтверждения полученных результатов докажем следующую теорему.

**Теорема.** *Если неизвестные функции* $b_k(q)$ $(k=\overline{0,n})$ *находить путем выполнения уравнения (35) и ДГУ, полученных в результате определения производных от него k-го порядка, то при большом числе приближений* $(n\to\infty)$ *уравнение (35) будет выполняться и во всей области изменения* $0\le\xi\le1$*, не прибегая к его непосредственному интегрированию по переменной* $\xi$.

Для доказательства представим решение уравнения (35) в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{k=0}^{n}b_k(q(\mathrm{Fo}))\xi^k. \qquad (55)$$

Потребуем, чтобы решение (55) удовлетворяло уравнению (35) и ДГУ, полученным путем определения производных от него *k*-го порядка, в точке $\xi$ = 0:

$$\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}\left(\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}-\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}-\mathrm{Po}\right)_{\xi=0}=0 \qquad (56)$$

$(k=\overline{0,n})$.

При $k=0$ соотношение (56) не дифференцируется и представляет уравнение (35), которое должно быть выполнено в точке $\xi$ = 0. При $k=1,2,3,\ldots n$ оно приводится к следующим ДГУ:

$$\left(\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi\partial\mathrm{Fo}}-\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3}\right)_{\xi=0}=0;$$

$$\left(\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2\partial\mathrm{Fo}}-\frac{\partial^4\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^4}\right)_{\xi=0}=0;$$

$$\left(\frac{\partial^4\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3\partial\mathrm{Fo}}-\frac{\partial^5\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^5}\right)_{\xi=0}=0;$$

… .

Общая формула для ДГУ, которые должны быть выполнены в точке $\xi$ = 0, включая уравнение (35), имеет вид

$$\left(\frac{\partial^{k+1}\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^k\partial\mathrm{Fo}}-\frac{\partial^{k+2}\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^{k+2}}\right)_{\xi=0}=0 \qquad (57)$$

$(k=\overline{0,n})$.

Подставляя (55) в (57), для каждого $k=\overline{0,n}$ относительно $b_k(q(\mathrm{Fo}))$ получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{db_0}{d\mathrm{Fo}}-2b_2-\mathrm{Po}=0;\ \frac{db_1}{d\mathrm{Fo}}-6b_3=0;$$
$$\frac{db_2}{d\mathrm{Fo}}-24b_4=0;\ \frac{db_3}{d\mathrm{Fo}}-120b_5=0; \qquad (58)$$

… .

Умножая уравнения (58) соответственно на $\xi^k$ $(k=\overline{0,n})$ и суммируя полученные соотношения, имеем

$$\frac{db_0}{d\mathrm{Fo}}+\frac{db_1}{d\mathrm{Fo}}\xi+\frac{db_2}{d\mathrm{Fo}}\xi^2+\frac{db_3}{d\mathrm{Fo}}\xi^3+\ldots=$$
$$=2b_2+6b_3\xi+24b_4\xi^2+120b_5\xi^3+\mathrm{Po}+\ldots. \qquad (59)$$

Подставляя (55) в уравнение (35) без привязки к конкретному $\xi$, получаем соотношение, аналогичное (59). Следовательно, выполняя (35) и ДГУ вида (57) в точке $\xi$ = 0, при большом числе приближений $(n\to\infty)$ приходим к выполнению уравнения (35) и во всей области изменения $0\le\xi\le1$, минуя его непосредственное интегрирование по пространственной переменной, – что и требовалось доказать, согласно сформулированной выше теореме.

Используя решение (22), найдем такую мощность постоянного источника теплоты ($\gamma$ = 0) при постоянных физических свойствах ($\nu$ = 0), при которой температура стенки в точке $\xi$ = 0 в стационарном состоянии будет равна $1000\,°C$. Положив в формуле (22) $\Theta(0,\mathrm{Fo})=1$, при $\gamma$ = 0 и $\nu$ = 0 находим соответствующее число Померанцева и, следовательно, мощность внутреннего источника теплоты, при которой температура $\Theta(0,\mathrm{Fo})=1$ в точке $\xi$ = 0 достигается в стационарном режиме работы. Исходные данные для решения задачи следующие: $T_{ст}$ = 1000 °С; $T_0$ = 20 °С; $\lambda_0$ = 20 Вт/(м·К); $\delta$ = 0,005 м. Полученное таким путем число Померанцева: $\mathrm{Po}_1 = 3{,}230\cdot10^{-5}$. Из этого следует $\omega_0$ = 25111,51 Вт/м$^3$ = 25 кВт/м$^3$.

Решение подобной задачи может быть использовано при электромагнитном способе прогрева реактора пиролиза метана (термического разложения на водород и углерод) в целях недопущения его перегрева и плавления.

**Выводы.** С использованием дополнительной функции и дополнительных граничных условий найдено решение задачи теплопроводности применительно к пластине с переменными свойствами, а также с зависящим от температуры источником теплоты.

ДФ вводится в целях сведения исходного уравнения к обыкновенному уравнению, интегрирование которого позволяет найти собственные числа.

ДГУ используются для граничного выполнения уравнения, что позволяет выполнить его и внутри области, исключая непосредственное интегрирование по координате.

ДФ не изменяет постановку задачи, так как она является определяемой при любом методе получения решения. Ее использование позволяет упростить как процесс получения решения, так и его окончательную формулу.

Полученное решение уже в первом приближении позволяет отделить стационарные режимы теплообмена от режимов теплового взрыва – неограниченного возрастания температуры, которое происходит при положительном первом собственном числе. С использованием полученного решения найдена такая мощность источника, при которой температура стенки реактора пиролиза метана не превышает некоторой, наперед заданной величины.

**Список литературы**


1. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 601 с.
2. **Григорьев Л.Я., Маньковский О.Н.** Инженерные задачи нестационарного теплообмена. – Л.: Энергия, 1968. – 84 с.
3. **Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В.** Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях: учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2008. – 391 с.
4. **Метод** дополнительных искомых функций в задачах теплопроводности с переменными физическими свойствами среды / Е.В. Котова, А.В. Еремин, В.А. Кудинов и др. // Вестник ИГЭУ. – 2019. – Вып. 2. – С. 59–70.
5. **Кудинов И.В., Котова Е.В., Кудинов В.А.** Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2019. – Т. 22, № 2. – С. 153–165.
6. **Федоров Ф.М.** Граничный метод решения прикладных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 2000. – 220 с.
7. **Eremin A., Krasnova N.** One method of heat transfer process mathematical modeling in solids // 2019 International Multi-Conference on Industrial Engineering and modern Technologies (FarEastCon). – IEEE, 2019. – P. 1–5.
8. **Pashchenko D., Eremin A.** Heat flow inside a catalyst particle for steam methane reforming: CFD-modeling and analytical solution // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2021. – Vol. 165. – P. 120617.
9. **Васютин М.А., Данилова Е.В., Кузьмичев Н.Д.** Оценка максимального нагрева пленки NbN токовым импульсом при низких температурах на основе уравнения теплопроводности // Теплофизика и аэромеханика. – 2022. – Т. 29, № 3. – С. 473–480.
10. **Карелин В.А., Саломатов В.В.** Математическая модель переноса тепла в слое диэлектрика при СВЧ-облучении // Теплофизика и аэромеханика. – 2023. – Т. 30, № 2. – С. 375–380.
11. **Карелин В.А., Саломатов В.В.** Построение приближенных аналитических решений для модели переноса тепла в слое льда при СВЧ-облучении // Теплофизика и аэромеханика. – 2023. – Т. 30, № 6. – С. 1189–1196.
12. **Дутта Д.** Математическая модель температурного поля, возникающего при дуговой сварке под флюсом // Прикладная механика и техническая физика. – 2024. – Т. 65, № 3(385). – С. 74–82.
13. **Структуры** в нелинейных средах / С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов, А.А. Самарский // Компьютеры и нелинейные явления: Информатика и современное естествознание. – М.: Наука, 1988. – 192 с.


**References**


1. Lykov, A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of Heat Conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 601 p.
2. Grigor′ev, L.Ya., Man′kovskiy, O.N. *Inzhenernye zadachi nestatsionarnogo teploobmena* [Engineering Problems of Non-Stationary Heat Transfer]. Leningrad: Energiya, 1968. 84 p.
3. Kudinov, V.A., Averin, B.V., Stefanyuk, E.V. *Teploprovodnost′ i termouprugost′ v mnogosloynykh konstruktsiyakh* [Thermal Conductivity and Thermoelasticity in Multilayer Structures]. Moscow: Vysshaya shkola, 2008. 391 p.
4. Kotova, E.V., Eremin, A.V., Kudinov, V.A., Tkachev, V.K., Kuznetsova, A.E. Metod dopolnitel′nykh iskomykh funktsiy v zadachakh teploprovodnosti s peremennymi fizicheskimi svoystvami sredy [Method of additional unknown functions in heat onductivity problems with variable physical properties of the medium]. *Vestnik IGEU*, 2019, issue 2, pp. 59–70.
5. Kudinov, I.V., Kotova, E.V., Kudinov, V.A. Metod polucheniya analiticheskikh resheniy kraevykh zadach na osnove opredeleniya dopolnitel′nykh granichnykh usloviy i dopolnitel′nykh iskomykh funktsiy [A method for obtaining analytical solutions to boundary value problems based on determining additional boundary conditions and additional sought-for functions]. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki*, 2019, vol. 22, no. 2, pp. 153–165.
6. Fedorov, F.M. *Granichnyy metod resheniya prikladnykh zadach matematicheskoy fiziki* [Boundary value method for solving applied problems of mathematical physics]. Novosibirsk: Nauka, 2000. 220 p.
7. Eremin, A., Krasnova, N. One method of heat transfer process mathematical modeling in solids. 2019 International Multi-Conference on Industrial Engineering and modern Technologies (FarEastCon). IEEE, 2019, pp. 1–5.
8. Pashchenko, D., Eremin, A. Heat flow inside a catalyst particle for steam methane reforming: CFD modeling and analytical solution. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2021, vol. 165, p. 120617.
9. Vasyutin, M.A., Danilova, E.V., Kuz′michev, N.D. Otsenka maksimal′nogo nagreva plenki NbN tokovym impul′som pri nizkikh temperaturakh na osnove uravneniya teploprovodnosti [Estimation of the maximum heating of an NbN film by a current pulse at low temperatures based on the heat conduction equation]. *Teplofizika i aeromekhanika*, 2022, vol. 29, no. 3, pp. 473–480.
10. Karelin, V.A., Salomatov, V.V. Matematicheskaya model′ perenosa tepla v sloe dielektrika pri SVCH-obluchenii [Mathematical model of heat transfer in a dielectric layer under microwave irradiation]. *Teplofizika i aeromekhanika*, 2023, vol. 30, no. 2, pp. 375–380.
11. Karelin, V.A., Salomatov, V.V. Postroenie priblizhennykh analiticheskikh resheniy dlya modeli perenosa tepla v sloe l′da pri SVCH-obluchenii [Construction of approximate analytical solutions for the model of heat transfer in an ice layer under microwave irradiation]. *Teplofizika i aeromekhanika*, 2023, vol. 30, no. 6, pp. 1189–1196.
12. Dutta, D. Matematicheskaya model′ temperaturnogo polya, voznikayushchego pri dugovoy svarke pod flyusom [Mathematical model of the temperature field arising during submerged arc welding]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2024, vol. 65, no. 3(385), pp. 74–82.
13. Kurdyumov, S.P., Malinetskiy, G.G., Potapov, A.B., Samarskiy, A.A. Struktury v nelineynykh sredakh [Structures in nonlinear media]. *Komp'yutery i nelineynye yavleniya: Informatika i sovremennoe estestvoznanie* [Computers and nonlinear phenomena: Information technology and modern natural science]. Moscow: Nauka, 1988. 192 p.