

Сравнение различных подходов к определению продолжительности удара твердых тел при измельчении

С.П. Бобков, И.В. Полищук
ФБГОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: ajto@mail.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Достоверное прогнозирование фракционного состава измельченного твердого топлива и энергозатрат на измельчение на угольных электростанциях и других материалов в смежных производствах химической, строительной и других отраслей промышленности требует разработки адекватных моделей и методов расчета процессов измельчения. Чаще всего измельчение реализуется стесненным (шаровые барабанные мельницы) или свободным (молотковые мельницы) ударным взаимодействием измельчаемых частиц с твердой поверхностью. Эволюция механического состояния частицы при ударном нагружении является важнейшей составляющей собственно измельчения. Поэтому важно знать, какие из моделей ударного нагружения наиболее приемлемы для расчета измельчения частиц. При описании процесса упругого удара обычно применяются классические непрерывные модели сплошной среды. Кроме того, в настоящее время все шире используются дискретные подходы к описанию процессов в твердых телах. В этой связи становится уместным провести сравнение результатов, полученных с использованием различных моделей, в целях определения их адекватности и областей применимости.

Материалы и методы: Рассмотрены методы, использующие подходы классической механики сплошной среды, а также модели, основанные на теории распространения упругих волн в твердом материале. В качестве альтернативы рассмотрен метод дискретных элементов, описывающий сплошную среду как систему взаимосвязанных составных частей.

Результаты: Представлены результаты исследования влияния размера твердого тела, скорости в момент удара и упругих свойств материала на продолжительность упругого соударения тела с поверхностью. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных с использованием различных подходов.

Выводы: Данные, полученные с помощью дискретной модели тела, хорошо коррелируют с результатами, которые можно получить при использовании непрерывных моделей, и не противоречат существующим представлениям о сути процесса упругого столкновения. Их следует рекомендовать для использования в моделях ударного измельчения.

Ключевые слова: ударное измельчение, модель твердого тела, продолжительность удара, метод дискретных элементов.

Comparison of different approaches to determining the duration of collision of solids under grinding

S.P. Bobkov, I.V. Polishchuk
Ivanovo State University of Chemistry and Technology, Ivanovo, Russian Federation
E-mail: ajto@mail.ru

Abstract

Background: Reliable prediction of particle size distribution in ground material and energy consumption for grinding at coal power plants, as well as in other materials in similar technological processes in chemical, construction and other industries requires development of adequate models and computational methods of grinding. Grinding is usually conducted by using constrained impact (drum ball mills), or by free impact (hammer mills) of solid particles under grinding. The evolution of mechanical state of a particle under impact loading is the most important component of the grinding itself. This is why it is important to know, which of such models of the impact loading are acceptable for calculating particle grinding. Elastic collisions are normally described by classical continuous medium models. But now discrete methods of describing processes in solids are gaining popularity. This fact makes it important to compare the results obtained by using different models in order to determine their adequacy and application fields.

Materials and methods: The paper studies the methods based on classical continuous mechanics approaches and models based on the theory of elastic wave propagation in a solid material. As their alternative, it also investigates the method of discrete elements describing a continuous medium as a system of interrelated components.

Results: The paper presents the results of studying the influence of the size of a solid body and its speed at the moment of collision and elasticity properties of the material on the duration of the body elastic collision with the surface. It also shows the results of comparative analysis conducted by various methods.

Conclusions: The data obtained by the body discrete model correlates well with the results that can be obtained when using continuous models and does not conflict with the existing models of elastic collision. They can be recommended for implementation in models of grinding.

Key words: impact grinding, model of solid body, collision duration, discrete elements method.

DOI: 10.17588/2072-2672.2016.6.066-070

Известно, что в угольной энергетике широко используются процессы измельчения твердых видов топлива. Чаще всего измельчение реализуется стесненным (шаровые барабанные мельницы) или свободным (молотковые мельницы) ударным взаимодействием измельчаемых частиц с твердой поверхностью. При этом частицы материала разрушаются под действием механических нагрузок. С позиций адекватного моделирования процессов ударного измельчения исследование параметров процесса взаимодействия твердых тел при соударении можно считать весьма актуальной задачей.

Для описания процесса соударения твердых тел широко используются как классические континуальные подходы, так и методы, которые предполагают дискретизацию пространства.

Ранее нами была предложена и исследована двухмерная дискретная модель твердого тела, позволяющая исследовать процесс его деформирования при механическом воздействии [1].

Модель позволила провести численные эксперименты, имитирующие процесс упругого удара тел различной формы о твердую поверхность. Было исследовано влияние размеров и материала тела, а также скорости соударения на некоторые параметры удара. В частности, был изучен процесс соударения шара с плоской поверхностью. При этом в качестве одного из основных параметров была выбрана продолжительность соударения (контакта шара с поверхностью), т.е. промежуток времени от момента касания до момента отрыва при отскоке.

В целом было найдено, что продолжительность соударения возрастает с увеличением радиуса (массы) шара, но несколько падает с возрастанием упругих свойств материала. Кроме того, численные эксперименты показали, что в рамках использованной модели продолжительность соударения не зависит от скорости столкновения тела с препятствием. В целом, полученные результаты моделирования не противоречат ряду общепринятых гипотез, однако представляется целесообразным сопоставить их с данными, которые могут быть получены с использованием известных моделей.

Было признано целесообразным сопоставить данные модельных экспериментов по исследованию параметров удара, прежде всего продолжительности соударения, с результатами, которые могут быть получены с использованием известных аналитических моделей.

Следует отметить, что существуют две принципиально разные группы подходов к описанию упругого удара. Первая использует

уравнения классической механики, вторая – рассматривает упругий удар с позиций волновой теории, т.е. рассматривает прохождение упругих волн через соударяющиеся тела.

Предложен эмпирический критерий применимости формул классической механики и волновой теории [2]:

$$\beta = \tau_0 / T, \quad T = 2l / C, \quad (1)$$

где τ_0 – полная продолжительность упругого соударения; T – период собственных колебаний ударяющегося тела; l – характерный размер тела; C – скорость распространения упругих волн в материале тела.

Согласно данному критерию, при $\beta > 3$ для расчета применяют формулы классической механики, при $\beta < 3$ – формулы волновой теории.

Рассмотрим модели упругого удара, относящиеся к обеим группам подходов.

Среди наиболее известных подходов, описывающих упругое соударение в рамках классической механики, следует назвать теорию Герца, которая лежит в основе механики контактного взаимодействия. При этом используется допущение, что зависимость между упругим перемещением и контактным усилием при ударе имеет такой же вид, как в статике, а силами инерции пренебрегают. Согласно этой теории, при ударе круглого тела (шара) о полупространство соотношение между контактной силой P и глубиной проникновения шара в плоскость h имеет вид [3]

$$P = kh^{3/2}, \quad (2)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от механических свойств материалов и размеров шара.

Решая уравнения движения тел после удара, взятые в виде обычных уравнений динамики твердых тел, можно получить основные параметры удара, такие как максимальная глубина проникновения шара в плоскость, максимальная сила удара, продолжительность удара и пр. В частности, полная продолжительность упругого удара шара с плоскостью τ_0 , согласно теории Герца, может быть вычислена следующим образом:

$$\tau_0 \approx 3 \left(\frac{m^2}{v_0 k^2} \right)^{1/5}, \quad k = \frac{4}{3} \sqrt{R} \frac{E}{(1 - \nu^2)}, \quad (3)$$

где m – масса шара; v_0 – скорость в момент удара; R – радиус шара; E – модуль упругости материала; ν – коэффициент Пуассона материала.

Согласно (3), продолжительность удара пропорциональна радиусу шара и зависит от

начальной скорости в степени минус 1/5. Кроме того, продолжительность удара падает с возрастанием упругих свойств материала (модуля упругости) и значения коэффициента Пуассона.

В волновых моделях упругого удара (модели Релея и Сен-Венана) рассматривается прохождение упругих волн через соударяющиеся тела. При этом исследуются перемещения поперечных сечений взаимодействующих тел. Указанные перемещения обычно представлены как произведение двух функций, одна из которых зависит только от времени, а другая – только от координаты. Известно, что такие произведения описывают движение упругих волн.

Выражение для силы удара при упругом столкновении, полученное путем решения уравнений движения, имеет вид [4]

$$P(t) = -EA \frac{V_0}{\omega l} \sin(\omega t), \quad \omega^2 = \frac{EA}{ml}, \quad (4)$$

где A – характерная площадь поперечного сечения ударяющегося тела; l – характерная длина тела.

Гармонический характер изменения силы позволяет сделать вывод, что продолжительность соударения равна интервалу от начала соприкосновения, когда сила равна нулю, до отскока шара, когда сила тоже становится нулевой. Т.е. она составит половину периода синусоиды в приведенном уравнении, или $\omega\tau_0 = \pi$.

Из этого следует

$$\tau_0 = \pi \sqrt{\frac{ml}{EA}}. \quad (5)$$

Необходимо сказать, что выражение (4) первоначально приводится для случая упругого соударения стержней различной формы с жесткой поверхностью.

В этом случае геометрические параметры легко определяются: l – длина стержня; A – площадь его сечения. При использовании данного подхода к анализу процесса удара о плоскость тел другой формы возникают существенные проблемы в определении A и l . И если при исследовании соударения шара с поверхностью в качестве l , т.е. расстояния, которое проходит волна в теле, можно принять диаметр шара, то с вычислением площади сечения для шара возникают сложности.

Оценить значение данного параметра можно, приняв допущение, согласно которому площадь сечения шара, по которому движется фронт волны сжатия, сопоставима с площадью контактной площадки при соударении. Значение последней обычно не превышает одной четвертой максимального сечения шара [5]. Поэтому в качестве первого приближения можно вычислить значение параметра A следующим образом:

$$A = \frac{1}{4} \pi R^2. \quad (6)$$

Анализ выражений (4)–(6) показывает, что, продолжительность удара пропорциональна радиусу шара и снижается с возрастанием упругих свойств материала, как и в модели, соответствующей теории Герца. Можно также заметить, что в выражения волновой модели не входит коэффициент Пуассона, т. е. тело рассматривается как абсолютно хрупкое. Более важным выводом, на наш взгляд, является тот факт, что в волновой модели продолжительность удара не зависит от скорости соударения.

Ниже представлены результаты исследования влияния размера шара, скорости соударения и упругих свойств материала на продолжительность упругого соударения с поверхностью. При этом данные, полученные в численном эксперименте с использованием разработанной нами дискретной модели, сравнивались с результатами, полученными с применением моделей Герца (3) и волновой модели (5).

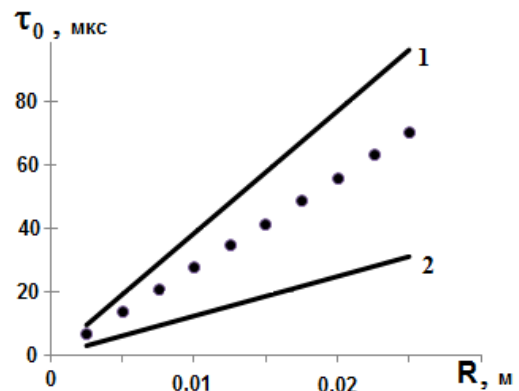


Рис. 1. Влияние радиуса шара на продолжительность соударения при скорости 5 м/с: сплошные линии: 1 – модель Герца; 2 – волновая модель; точки – данные, полученные авторами

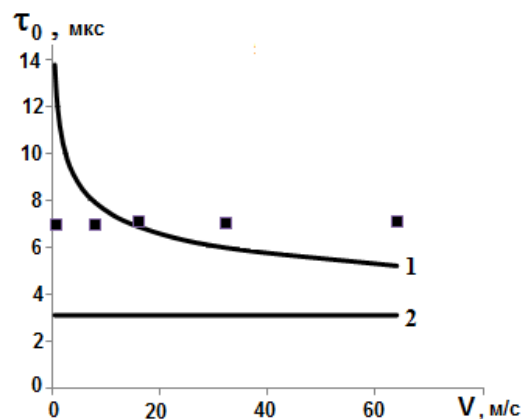


Рис. 2. Влияние скорости соударения шара радиусом 2,5 мм на продолжительность соударения: сплошные линии: 1 – модель Герца; 2 – волновая модель; точки – данные, полученные авторами

При моделировании были приняты параметры материала, характерные для кварце-

вого стекла, в частности: плотность 2200 кг/м^3 ; модуль упругости $71,4 \text{ ГПа}$; коэффициент Пуассона $0,25$. Диапазон изменения радиуса шара составлял от $2,5 \text{ мм}$ до 25 мм . Скорость соударения исследовалась в интервале ($0,5\text{--}64$) м/с.

Проведем анализ полученных результатов. Дискретная модель показывает, что продолжительность соударения пропорциональна радиусу шара и не зависит от скорости соударения. Первый вывод полностью согласуется с классическими подходами. Во втором случае дискретная модель согласуется только с волновой моделью, но лишь качественно, поскольку в целом численные значения исследуемого фактора ближе в модели Герца. Кроме того, значение критерия (1) в данном случае немногим более 4, что соответствует рекомендации о применении именно методов классической механики. На наш взгляд, основная причина несовпадения результатов дискретной модели с данными, полученными по модели Герца, состоит в следующем. В теории Герца рассматривается столкновение шара с упругим полупространством, которое деформируется. В физической модели столкновения, принятой нами, наоборот – деформируется шар, а плоскость является абсолютно жесткой. В этом смысле, по постановке задачи, к дискретной модели ближе волновой подход.

Рассмотрим причины различия в результатах при использовании дискретной и волновой моделей. Выше указывалось, что все волновые модели рассматривают столкновение с плоскостью продолговатых тел, т.е. имеющих вид стержня.

Были проведены численные эксперименты по исследованию процесса упругого столкновения цилиндра с плоскостью.

На рис. 3 представлены результаты исследования влияния длины (высоты) цилиндра на продолжительность упругого соударения. Параметры материала были приняты такими же, как в приведенных выше примерах. Данные сравнивались с результатами, полученными с применением волновой модели (5). Диаметр цилиндров во всех случаях составлял 50 мм , диапазон изменения длины от 5 мм до 50 мм , скорость соударения – 10 м/с .

Анализ показывает, что степень близости модельных результатов к данным волновой теории при исследовании соударения цилиндра выше, чем при изучении столкновения шара. Значение критерия (1) в данном случае составляет около 2, что соответствует рекомендации о применении волновых методов.

Сравним результаты исследования влияния скорости упругой волны в материале тела, полученные при использовании дискретной модели и классических моделей.

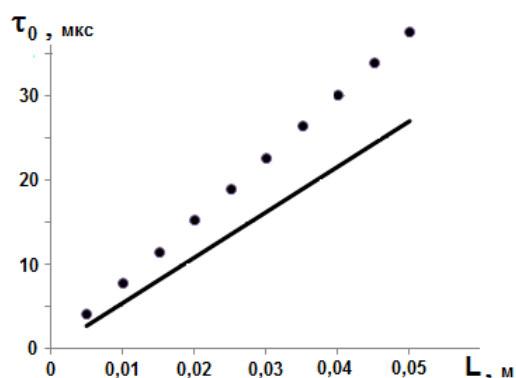


Рис. 3. Влияние длины цилиндра на продолжительность соударения: сплошная линия – волновая модель; точки – данные, полученные авторами

На рис. 4 показаны результаты исследования влияния упругих свойств материала на продолжительность соударения шарика диаметром 5 мм с неподвижной поверхностью при скорости 10 м/с . Данные, полученные с использованием дискретной модели, сравнивались с результатами, полученными с применением ранее рассмотренных классических моделей.

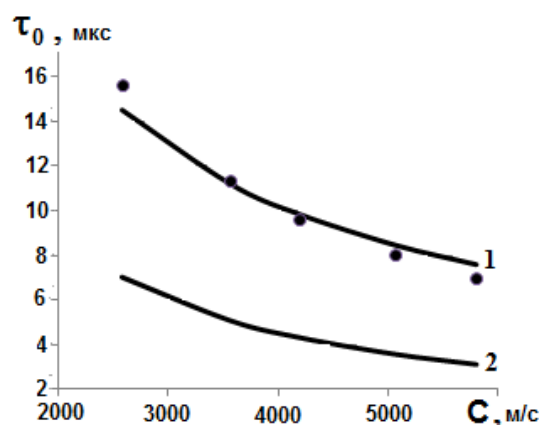


Рис. 4. Влияние скорости упругой волны в материале на продолжительность соударения: сплошные линии: 1 – модель Герца; 2 – волновая модель; точки – данные, полученные авторами

Нетрудно заметить, что в рассмотренном случае дискретная модель очень хорошо коррелирует с теорией Герца. Данные волновой модели имеют тот же порядок, но несколько отличаются.

В целом, следует отметить, что результаты, полученные с помощью предлагаемой дискретной модели тела, вполне совпадают с данными, которые можно получить при использовании других моделей и не противоречат существующим представлениям о сути процесса упругого столкновения. Дискретная модель твердого тела может быть рекомендована для включения в модели процессов измельчения.

Список литературы

1. **Бобков С.П., Полищук И.В.** Исследование процесса упругого деформирования с использованием метода дискретных элементов // Вестник ИГЭУ. – 2014. – Вып. 5. – С. 47–50.
2. **Кочетков А.В., Федотов П.В.** Некоторые вопросы теории удара // Интернет-журнал «Науковедение». – 2013. – № 5. – М.: Науковедение, 2015 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://naukovedenie.ru>.
3. **Ионов В.Н., Огибалов П.М.** Напряжения в телах при импульсивном нагружении. – М.: Высш. шк., 1975. – 463 с.
4. **Манжосов В.К.** Модели продольного удара. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – 160 с.
5. **Кольский Г.** Волны напряжения в твердых телах. – М.: Иностранная литература, 1955. – 194 с.

Бобков Сергей Петрович,
ФБГОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой информационных технологий,
e-mail: bsp@isuct.ru

Bobkov Sergei Petrovich,
Ivanovo State University of Chemistry and Technology,
Doctor of Engineering, Professor, Head of IT Department,
e-mail: bsp@isuct.ru

Полищук Илья Викторович,
ФБГОУВО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
аспирант кафедры информационных технологий,
e-mail: ajto@mail.ru

Polishchuk Ilya Viktorovich,
Ivanovo State University of Chemistry and Technology,
Postgraduate Student of IT Department,
e-mail: ajto@mail.ru

References

1. Bobkov, S.P., Polishchuk, I.V. Issledovanie protsessa uprugogo deformirovaniya s ispol'zovaniem metoda diskretnykh elementov [Investigation of elastic deformation using the method of discrete elements]. *Vestnik IGEU*, 2014, issue 5, pp. 47–50.
2. Kochetkov, A.V., Fedotov, P.V. Nekotorye voprosy teorii udara [Some problems of impact theory]. *Naukovedenie*, 2013, no. 5. Available at: <http://naukovedenie.ru>.
3. Ionov, V.N., Ogibalov, P.M. *Napryazheniya v telakh pri impul'sivnom nagruzhenii* [Stresses in bodies under impulsive loading]. Moscow, Vysshaya shkola, 1975. 463 p.
4. Manzhosov, V.K. *Modeli prodl'nogo udara* [Models of longitudinal impact]. Ulyanovsk, UIGTU, 2006. 160 p.
5. Kol'skiy, G. *Volny napryazheniya v tverdykh telakh* [Stress waves in solids]. Moscow, Inostrannaya literatura, 1955. 194 p.