

УДК 536.2 (075)

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА<sup>1</sup>

А.В. ЕРЕМИН, К.В. ГУБАРЕВА  
ФГБОУВО «Самарский государственный технический университет»,  
г. Самара, Российская Федерация  
E-mail: a.v.eremin@list.ru

### Авторское резюме

**Состояние вопроса.** Нестационарный перенос теплоты в твердых телах описывается уравнениями параболического и гиперболического типов. В настоящее время распространение получили численные методы исследования процессов тепломассопереноса в потоках жидкостей и газов. Современные программы позволяют в автоматическом режиме выполнять построение расчетных сеток, решать системы уравнений, предлагают широкий набор инструментов для анализа. Приближенные аналитические решения обладают существенными преимуществами в сравнении с численными. В частности, решения, полученные в аналитическом виде, позволяют выполнять параметрический анализ исследуемой системы, настройку и программирование измерительных устройств и др.

**Материалы и методы.** Метод математического моделирования процесса переноса теплоты в пластине при симметричных граничных условиях третьего рода разработан на основе совместного использования дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса.

**Результаты.** Предложен метод решения задач теплопроводности с граничными условиями третьего рода с использованием плотности теплового потока в качестве новой искомой функции. Задача отыскания решения дифференциального уравнения в частных производных относительно функции температуры сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения относительно плотности теплового потока на поверхности исследуемой области. Показано, что изотермы появляются на поверхности пластины, имея определенную начальную скорость, зависящую от интенсивности теплообмена. Выполнено сравнение результатов расчета с точным решением.

**Выводы.** Представленный метод может быть использован при определении плотности теплового потока зданий и нагревательных устройств, нахождении потерь тепла при конвективном теплообмене, проектировании теплообменного оборудования. Полученные результаты могут быть применены для повышения обоснованности и достоверности расчета фактических потерь и баланса тепловой энергии. Подтверждена достоверность, обоснованность метода и высокая степень приближения с погрешностью порядка 3 %. Точность решения зависит от числа выполненных приближений и определяется степенью аппроксимирующего полинома.

**Ключевые слова:** дополнительная искомая функция, граничные условия, интеграл теплового баланса, изотермы, скорость изотерм

## ANALYTICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF HEAT TRANSFER USING BOUNDARY CONDITIONS OF THE THIRD KIND

A.V. EREMIN, K.V. GUBAREVA  
Samara State Technical University, Samara, Russian Federation,  
E-mail: a.v.eremin@list.ru

### Abstract

**Background.** Non-stationary heat transmission within solid bodies is described using parabolic and hyperbolic equations. Currently, numerical methods for studying the processes of heat and mass transfer in the flows of liquids and gases have disseminated. Modern programs allow the automatic construction of computational grids, solutions to the systems of equations and offer a wide range of tools for analysis. Approximate analytical solutions have significant advantages compared to numerical ones. In particular, the solutions obtained in an analytical form allow performing parametric analysis of the system under study, configuration and programming of measurement devices, etc.

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 18-79-00171.

**Materials and methods.** Based on the joint use of additional desired function and additional boundary conditions in the integral method of heat balance, a method of mathematical modeling for the heat transfer process in a plate under symmetric boundary conditions of the third kind has been developed.

**Results.** Using the heat flux density as a new desired function, the method for solving heat conduction problems with boundary conditions of the third kind has been proposed. Finding a solution to the partial differential equation with respect to the temperature function presents integrating an ordinary differential equation with respect to the heat flux density on the surface of the studied zone. It has been shown that isotherms appear on the surface of the plate with a certain initial velocity which depends on the heat transfer intensity. The calculation results have been compared to the exact solution.

**Conclusions.** The presented method can be used in determining the heat flux density of buildings and heating devices, finding heat losses during convective heat transfer and designing heat transfer equipment. The results can be applied to increase the validity and reliability of the calculation of actual losses and balance of thermal energy. The method reliability, validity and a high degree of approximation with about 3% inaccuracy have been demonstrated. The accuracy of the solution depends on the number of approximations performed and is determined by the degree of the approximating polynomial.

**Key words:** additional desired function, boundary conditions, integral of heat balance, isotherms, speed of isotherms

**DOI:** 10.17588/2072-2672.2019.6.067-074

**Введение.** Несмотря на существенные преимущества аналитических решений в сравнении с численными, их получение с использованием точных аналитических методов возможно лишь в некоторых частных случаях. Как правило, их применение оправдано при определении температурных полей в телах простой геометрической формы, с постоянными теплофизическими свойствами среды и др. Использование точных аналитических методов для решения нелинейных задач теплопроводности, задач с внутренними источниками теплоты переменной мощности, зависящими от времени и координаты свойствами среды, нелинейными граничными условиями крайне затруднено [1–4]. Кроме того, получаемые на их основе решения могут выражаться сложными функциональными рядами, содержать специальные функции, что существенно затрудняет их практическое использование. В связи с этим получило развитие направление, связанное с разработкой приближенных аналитических методов. К ним относят ортогональные методы Л.В. Канторовича, Бубнова–Галеркина, Швеца, Ритца, интегральный метод теплового баланса и др. [5–8]. Использование приближенных методов позволяет значительно расширить круг задач, для которых могут быть получены решения в аналитической форме.

Ниже представлены результаты разработки приближенного аналитического метода решения краевых задач теплопроводности, основанного на совместном использовании дополнительной искомым функции и дополни-

тельных граничных условий в интегральном методе теплового баланса [9–15].

#### Математическая постановка задачи.

Основную идею метода рассмотрим на примере решения задачи теплопроводности в пластине при симметричных граничных условиях третьего рода. При исследовании процесса теплопроводности в узком диапазоне изменения температуры коэффициент температуропроводности может рассматриваться как постоянная величина ( $a = \text{const}$ ) [1]. Математическая постановка задачи в данном случае имеет следующий вид [1]:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0; \quad 0 < x < \delta); \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial T(\delta, \tau)}{\partial x} + \alpha(T_{\text{ср}} - T(\delta, \tau)) = 0, \quad (4)$$

где  $T$  – температура, К;  $x$  – координата, м;  $\tau$  – время, с;  $a = \lambda / (c\rho)$  – коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $c$  – удельная изохорная теплоемкость, Дж/(кг·К);  $T_0$  – начальная температура, К;  $T_{\text{ср}}$  – температура среды, К;  $\delta$  – половина толщины пластины, м;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К).

Задача (1)–(4) может быть представлена в безразмерном виде [5] (рис. 1):

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \quad (Fo > 0; \quad 0 < \xi < 1); \quad (5)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = 0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} + Bi \Theta(1, Fo) = 0, \tag{8}$$

где  $\Theta = (T - T_{cp}) / (T_0 - T_{cp})$  – безразмерная температура;  $\xi = x/\delta$  – безразмерная координата;  $Fo = a\tau/\delta^2$  – критерий Фурье (безразмерное время);  $Bi = \alpha\delta/\lambda$  – число Био.

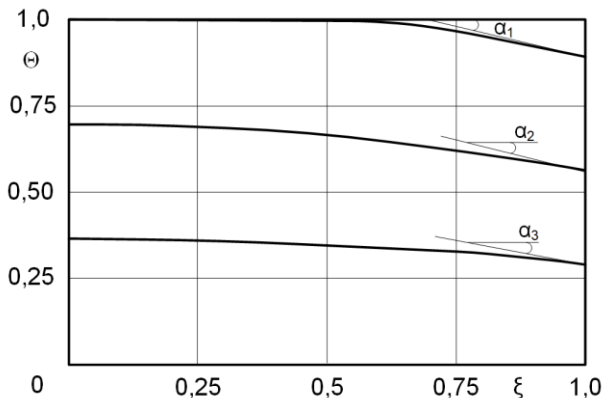


Рис. 1. Распределение безразмерной температуры в пластине

**Метод решения задачи.** В соответствии с предлагаемым методом, введем в рассмотрение новую искомую функцию времени:

$$\varphi(Fo) = \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} = tg \alpha, \tag{9}$$

где  $\alpha$  – угол между касательной к графику функции  $\Theta(\xi, Fo)$  в точке  $\xi = 1$  и координатной осью.

Возвращаясь к размерным величинам, выражение (9) может быть записано в виде

$$\varphi(\tau) = \frac{\delta}{T_{cr} - T_0} \frac{\partial T(\delta, \tau)}{\partial x}. \tag{10}$$

Плотность теплового потока по закону Фурье на поверхности пластины определяется выражением

$$q(\tau) = -\lambda \frac{\partial T(\delta, \tau)}{\partial x}. \tag{11}$$

Выражение (10) с учетом (11) запишется как

$$\varphi(\tau) = \frac{\delta}{\lambda(T_0 - T_{cp})} q(\tau) = k q(\tau), \tag{12}$$

где  $k = const$  – некоторый коэффициент, определяемый масштабом системы.

Таким образом, отличием данного метода от известных [9–11] является использование в качестве новой искомой функции закона изменения плотности теплового потока в точке приложения граничного условия третьего рода в произведении с константой.

Использование соотношения (10), как будет показано далее, позволяет уже в первом приближении с высокой точностью определять плотность теплового потока на поверхности тела.

Решение задачи (5)–(8) отыскивается в виде полинома  $n$ -й степени:

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{i=1}^n b_i(Fo) \xi^{i-1}, \tag{13}$$

где  $n$  – число членов ряда (13);  $b_i(Fo)$  – неизвестные коэффициенты, зависящие от безразмерного времени.

Для получения решения задачи (5)–(8) в первом приближении ограничимся тремя слагаемыми в выражении (13). Для определения неизвестных коэффициентов  $b_i(Fo)$  подставим выражение (13) в граничные условия (7) и (8), а также в дополнительное условие (9). В результате подстановки получим систему трех алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} Bi b_1 + b_3 (Bi + 2) = 0, \\ b_2 = 0, \\ 2b_3 - \varphi(Fo) = 0. \end{cases}$$

Из решения системы находим:

$$b_1(Fo) = -\frac{\varphi(Fo)(2 + Bi)}{2Bi};$$

$$b_2(Fo) = 0;$$

$$b_3(Fo) = \frac{\varphi(Fo)}{2}.$$

Выражение (13) с учетом найденных коэффициентов запишется в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = f_1(\xi) \varphi(Fo), \tag{14}$$

где  $f_1(\xi) = \frac{\xi^2}{2} - \frac{Bi + 2}{2Bi}$  – координатная функция.

Полученное соотношение удовлетворяет граничным условиям (7), (8), а также дополнительному условию (9) при любых значениях функции  $\varphi(Fo)$ .

Для приближенного удовлетворения исходного дифференциального уравнения (5) проинтегрируем его в пределах изменения пространственной координаты, т.е. составим интеграл теплового баланса [9–12]:

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \right) d\xi. \tag{15}$$

Вычисляя интеграл, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$-\frac{d\varphi(Fo)}{dFo} \left( \frac{1}{Bi} + \frac{1}{3} \right) - \varphi(Fo) = 0, \tag{16}$$

из решения которого находим

$$\varphi(Fo) = C_1 e^{-\frac{Fo}{K}}, \quad (17)$$

где  $C_1$  – константа интегрирования;

$$K = \frac{1}{Bi} + \frac{1}{3}.$$

Подставляя (17) в (14), получаем

$$\Theta(\xi, Fo) = f_1(\xi) C_1 e^{-\frac{Fo}{K}}. \quad (18)$$

Для выполнения начального условия (6) составим его невязку и потребуем ортогональности невязки к координатной функции  $f_1(\xi)$ :

$$\int_0^1 [\Theta(\xi, 0) - 1] f_1(\xi) d\xi = (Bi + 3)C_1 + 3Bi = 0. \quad (19)$$

Из решения уравнения (19) определим

$$\text{константу интегрирования } C_1 = -\frac{3Bi}{Bi + 3} = -\frac{1}{K}.$$

Выражение (18) с учетом найденного значения представляет решение задачи (5)–(8) в первом приближении и может быть записано в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = -\frac{1}{K} \left( \frac{\xi^2}{2} - \frac{Bi + 2}{2Bi} \right) e^{-\frac{Fo}{K}}. \quad (20)$$

Результаты расчетов температуры по формуле (20) представлены на рис. 2, 3.

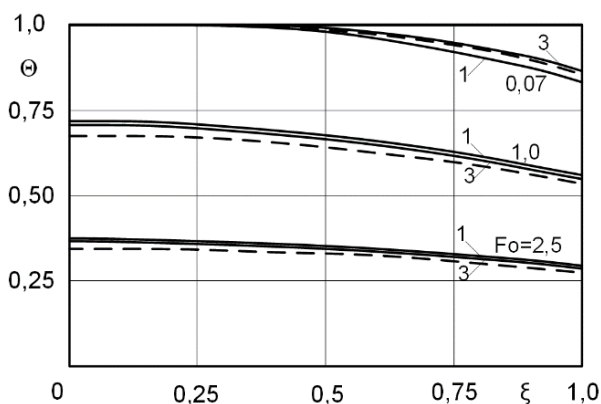


Рис. 2. Распределение безразмерной температуры в пластине: — — — приближенное решение; - - - точное решение [1]; 1, 3 – номер приближения;  $Bi = 0,5$

Невысокая точность полученного в первом приближении решения обусловлена недостаточным числом членов ряда (13). Во втором приближении будем использовать шесть слагаемых в выражении (13). При определении неизвестных коэффициентов  $b_i(Fo)$  помимо основных граничных условий будут использоваться дополнительные [5, 8, 9], физический смысл которых состоит в выполнении исходного дифференциаль-

ного уравнения (5) и выражений, полученных после его дифференцирования в точках  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ . Отметим, что в [8] показано, что выполнение уравнения лишь в граничных точках приводит к его выполнению и внутри области.

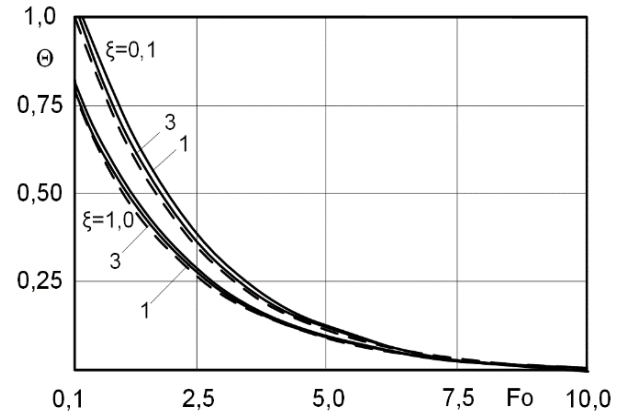


Рис. 3. Изменение безразмерной температуры во времени: — — — приближенное решение; - - - точное решение [1]; 1, 3 – номер приближения;  $Bi = 0,5$

Для получения решения задачи (5)–(8) во втором приближении будем использовать шесть членов ряда (13) ( $n = 6$ ). В этом случае для определения неизвестных коэффициентов  $b_i(Fo)$  помимо условий (7)–(9) будем использовать три дополнительных условия, два из которых будут записаны для точки  $\xi = 1$  и одно для  $\xi = 0$  [5].

Записывая соотношение (5) в точке  $\xi = 1$  с учетом (8), (9), получаем первое дополнительное граничное условие:

$$-\frac{1}{Bi} \frac{\partial \varphi(1, Fo)}{\partial Fo} - \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2} = 0. \quad (21)$$

Для получения второго дополнительного условия продифференцируем исходное дифференциальное уравнение по пространственной переменной  $\xi$ :

$$\frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} = \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^3}. \quad (22)$$

Записывая соотношение (22) в точке  $\xi = 1$  с учетом (8), (9), получаем второе дополнительное условие:

$$-Bi \frac{\partial \varphi(1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^3}. \quad (23)$$

Третье граничное условие может быть получено путем однократного дифференцирования исходного уравнения (5) по пространственной переменной применительно к

точке  $\xi = 0$ . С учетом граничного условия (7) оно принимает вид

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} = 0. \tag{24}$$

Подставляя (13) в (7), (8), (9) и дополнительные условия (21), (23), (24), получаем систему шести алгебраических уравнений, из решения которой определяем неизвестные коэффициенты  $b_i(Fo)$ :

$$b_1(Fo) = \frac{Bi^2 - 8}{40Bi} \frac{d\varphi(Fo)}{dFo} - \frac{\varphi(Fo)(40 + 28Bi)}{40}$$

$$- \frac{1}{5Bi} \frac{d\varphi(Fo)}{dFo} - \frac{7\varphi(Fo)}{10};$$

$$b_2(Fo) = 0;$$

$$b_3(Fo) = \varphi(Fo) - \frac{Bi^2 - 6}{12Bi} \frac{d\varphi(Fo)}{dFo};$$

$$b_4(Fo) = 0;$$

$$b_5(Fo) = \frac{Bi^2 - 4}{8Bi} \frac{d\varphi(Fo)}{dFo} - \varphi(Fo);$$

$$b_6(Fo) = -\frac{Bi^2 - 3}{15Bi} \frac{d\varphi(Fo)}{dFo} + \varphi(Fo).$$

Вычисляя интеграл (15) (с учетом найденных коэффициентов), получаем однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 \varphi(Fo)}{dFo^2} (Bi^2 - 9) - \frac{d\varphi(Fo)}{dFo} (39Bi + 90) - 90Bi\varphi(Fo) = 0. \tag{25}$$

Его решение имеет вид

$$\varphi(Fo) = C_1 \exp(K_1 Fo) + C_2 \exp(K_2 Fo), \tag{26}$$

где

$$K_1 = \frac{3(13Bi + \sqrt{40Bi^3 + 169Bi^2 + 420Bi + 900} + 30)}{2(Bi^2 - 9)};$$

$$K_2 = \frac{3(13Bi - \sqrt{40Bi^3 + 169Bi^2 + 420Bi + 900} + 30)}{2(Bi^2 - 9)}.$$

Выражение (13) после подстановки в него коэффициентов может быть представлено в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{j=1}^2 f_j(\xi) C_j \exp(K_j Fo), \tag{27}$$

где

$$f_j(\xi) = \left( \frac{K_j}{5Bi} - \frac{BiK_j}{15} + \frac{1}{5} \right) \xi^5 + \left( \frac{BiK_j}{8} - \frac{K_j}{2Bi} - \frac{1}{2} \right) \xi^4 + \left( \frac{K_j}{2Bi} - \frac{BiK_j}{12} + 1 \right) \xi^2 + \frac{BiK_j}{40} - \frac{1}{Bi} - \frac{K_j}{5Bi} - \frac{7}{10}.$$

Составляя невязку начального условия и требуя ортогональности невязки к каждой координатной функции  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\xi)$ , получаем систему двух алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \int_0^1 (\Theta(\xi, 0) - 1) f_1(\xi) d\xi = 0, \\ \int_0^1 (\Theta(\xi, 0) - 1) f_2(\xi) d\xi = 0, \end{cases}$$

из решения которой найдем  $C_1, C_2$ . Например, при  $Bi = 0,5$  константы интегрирования равны  $C_1 = -0,42$  и  $C_2 = -0,046$ .

Выражение (27) с учетом найденных констант интегрирования представляет решение задачи (5)–(8) во втором приближении. Для дальнейшего повышения точности необходимо увеличивать число членов ряда (13). Так, в третьем приближении будем использовать девять членов ряда, в четвертом – двенадцать и т. д. Для нахождения неизвестных коэффициентов будем использовать дополнительные граничные условия. Общие формулы для их определения имеют вид:

$$\frac{\partial^{2k-1} \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^{2k-1}} = 0;$$

$$- \frac{1}{Bi} \frac{\partial^{k-1} \varphi(Fo)}{\partial Fo^{k-1}} = \frac{\partial^{k+1} \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^{k+1}};$$

$$- Bi \frac{\partial^{k-1} \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^{k-1}} = \frac{\partial^{2k-1} \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^{2k-1}},$$

где  $k = 1, 2, 3 \dots$  – номер приближения.

Результаты расчетов температуры в третьем приближении в сравнении с численным решением представлены на рис. 2, 3. Анализ полученных результатов показывает, что в диапазоне  $0,1 \leq Fo < \infty$  расхождение полученных результатов не превышает 3 %.

На рис. 4 представлен график функции  $\varphi(Fo)$ . Отмечается, что точность определения искомой функции  $\varphi(Fo)$  (теплового потока на поверхности) значительно выше точности определения температуры.

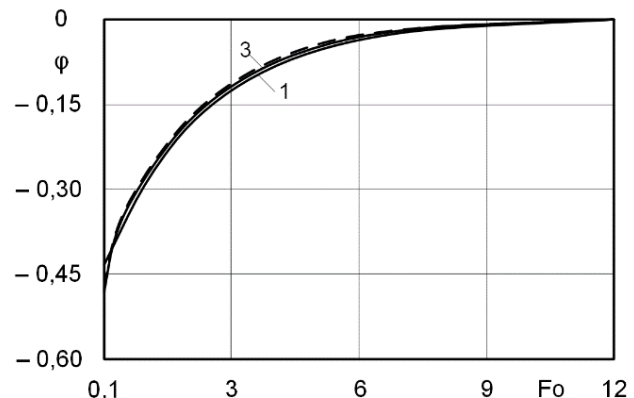


Рис. 4. Графики изменения функции  $\varphi(Fo)$ : — — — приближенное решение; - - - точное решение [1]; 1, 3 – номер приближения;  $Bi = 0,5$

Расхождение результатов расчета теплового потока  $\varphi(Fo)$  по формуле (9) с численным решением в диапазоне безразмерного времени  $0,1 \leq Fo < \infty$  не превышает 5 % уже в первом приближении.

Выражая координату  $\xi$  как функцию температуры  $\Theta(\xi, Fo)$  и времени  $Fo$ , соотношение (14) можно привести к виду

$$\xi(Fo) = \sqrt{\frac{2Bi\Theta(Fo) + \varphi(Fo)(2 + Bi)}{Bi\varphi(Fo)}}. \quad (28)$$

Соотношение (28) позволяет для любых конкретных  $\Theta(\xi, Fo) = \text{const}$  построить графики зависимости  $\xi$  от  $Fo$  (графики изотерм).

Первые производные по времени от соотношения (28) позволяют определить безразмерные скорости движения изотерм  $v = d\xi/dFo$  по координате  $\xi$  в зависимости от времени  $Fo$ . Соотношение для определения скорости будет иметь вид

$$v(Fo) = \frac{\varphi(Fo) \frac{\partial \Theta(Fo)}{\partial Fo} - \frac{\partial \varphi(Fo)}{\partial Fo} \Theta(Fo)}{\varphi^2(Fo) \sqrt{\frac{2}{Bi} + \frac{2\Theta(Fo)}{\varphi(Fo)} + 1}}. \quad (29)$$

Распределение изотерм и скоростей, полученных с использованием формул (28), (29), показано на рис. 5, 6.

Изотермы имеют вид наклонных к поверхности ( $\xi = 0$ ) пластины кривых. Каждая изотерма появляется на поверхности пластины в определенный момент времени, имея определенную начальную скорость, причем начальные скорости  $v_0$  всех изотерм одинаковы (например, для  $Bi = 0,5$  они равны  $v_0 \approx 0,44$ ). При приближении изотерм к центру пластины ( $\xi \rightarrow 0$ ) скорости их движения уменьшаются, устремляясь к нулю.

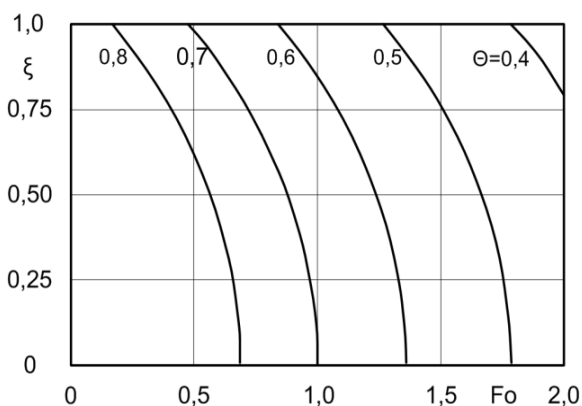


Рис. 5. Распределение изотерм в пластине при граничных условиях 3-го рода ( $Bi = 0,5$ )

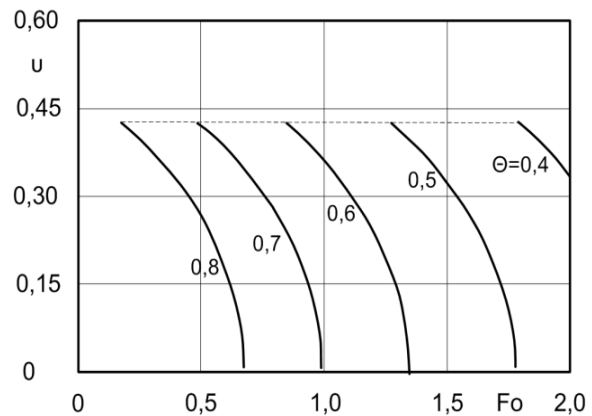


Рис. 6. Распределение скоростей изотерм в пластине при граничных условиях 3-го рода ( $Bi = 0,5$ )

**Выводы.** На основе использования дополнительных граничных условий и дополнительной искомой функции разработан приближенный аналитический метод решения нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях 3-го рода.

В результате сравнения полученных результатов с точным решением [1] можно сделать вывод о том, что разработанный метод имеет высокую степень приближения с погрешностью порядка 3 %.

Данный метод может быть использован специалистами, эксплуатирующими нагревательные устройства на тепловом источнике, при определении плотности теплового потока, когда не представляется возможным определение посредством независимых измерений с использованием датчиков (калориметров) теплового потока. Разработанный метод также может быть применен экспертными организациями при проведении энергоаудита зданий и сооружений для нахождения тепловых потерь через ограждающие конструкции, а также в практике расчета и проектирования теплообменного оборудования.

Рекомендуется использовать предлагаемый метод для получения простых по форме аналитических решений в тех случаях, когда погрешность порядка 3 % можно считать удовлетворительной. Стоит отметить, что данный метод может быть использован и для получения высокоточных решений, однако в этом случае вид получаемого решения усложняется, а объем вычислительной работы существенно возрастает.

## Список литературы

1. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
2. **Цой П.В.** Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса. – М.: Изд-во МЭИ, 2005. – 567 с.
3. **Беляев Н.М., Рядно А.А.** Методы теории теплопроводности. Т. 1. – М.: Высш. шк., 1982. – 328 с.
4. **Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В.** Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. – М.: Высш. шк., 2005. – 430 с.
5. **Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В.** Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. – Самара: СамГТУ, 2008. – 391 с.
6. **Канторович Л.В., Крылов В.И.** Приближенные методы высшего анализа. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
7. **Канторович Л.В.** Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных // ДАН СССР. – 1934. – Т. 2, № 2. – С. 532–534.
8. **Федоров Ф.М.** Граничный метод решения прикладных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 2000. – 220 с.
9. **Метод** дополнительных искомым функций в задачах теплопроводности с переменными физическими свойствами среды / Е.В. Котова, А.В. Еремин, В.А. Кудинов и др. // Вестник ИГЭУ. – 2019. – Вып. 2. – С. 59–70.
10. **Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Абишева Л.С.** Идентификация источника теплоты на основе аналитического решения задачи теплопроводности // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2016. – Т. 59, № 5. – С. 339–346.
11. **Об одном** методе решения нестационарных краевых задач / И.В. Кудинов, В.А. Кудинов, Е.В. Котова, А.В. Еремин // Инженерно-физический журнал. – 2017. – Т. 90, № 6. – С. 1387–1397.
12. **Layeni O.P., Johnson J.V.** Hybrids of the heat balance integral method // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – Vol. 218, no. 14. – P. 7431–7444.
13. **Mitchell S.L., Myers T.G.** Improving the accuracy of heat balance integral methods applied to thermal problems with time dependent boundary conditions // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2010. – Vol. 53, no. 17–18. – P. 3540–3551.
14. **Mitchell S.L., Myers T.G.** Application of Standard and Refined Heat Balance Integral Methods to One-Dimensional Stefan Problems // Siam Review. – 2010. – Vol. 52, no. 1. – P. 57–86.
15. **Novozhilov V.** Application of heat-balance integral method to conjugate thermal

explosion // Thermal Science. – 2009. – Vol. 13, no. 2. – P. 73–80.

## References

1. Lykov, A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p.
2. Tsoy, P.V. *Sistemnye metody rascheta kraevykh zadach teplomassoperenosa* [System methods of calculation of boundary value problems of heat and mass transfer]. Moscow: Izdatel'stvo MEI, 2005. 567 p.
3. Belyaev, N.M., Ryadno, A.A. *Metody teorii teploprovodnosti. T. 1* [Methods of thermal conductivity theory. Vol. 1]. Moscow: Vysshaya shkola, 1982. 328 p.
4. Kudinov, V.A., Kartashov, E.M., Kalashnikov, V.V. *Analiticheskie resheniya zadach teplomassoperenosa i termouprugosti dlya mnogoslonykh konstruksiy* [Analytical solutions to problems of heat and mass transfer and thermoelasticity for multilayer structures]. Moscow: Vysshaya shkola, 2005. 430 p.
5. Kudinov, V.A., Averin, B.V., Stefanyuk, E.V. *Teploprovodnost' i termouprugost' v mnogoslonykh konstruksiyakh* [Heat conductivity and thermoelasticity in multilayered structures]. Samara: SamGTU, 2008. 391 p.
6. Kantorovich, L.V., Krylov, V.I. *Priblizhennyye metody vysshego analiza* [Approximate methods of higher analysis]. Leningrad: Fizmatgiz, 1962. 708 p.
7. Kantorovich, L.V. *Ob odnom metode priblizhennogo resheniya differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [On one method of approximate solution to partial differential equations]. DAN SSSR, 1934, vol. 2, no. 2, pp. 532–534.
8. Fedorov, F.M. *Granichnyy metod resheniya prikladnykh zadach matematicheskoy fiziki* [A boundary method of solving applied problems of mathematical physics]. Novosibirsk: Nauka, 2000. 220 p.
9. Kotova, E.V., Eremin, A.V., Kudinov, V.A., Tkachev, V.K., Kuznetsova, A.E. *Metod dopolnitel'nykh iskomykh funktsiy v zadachakh teploprovodnosti s peremennymi fizicheskimi svoystvami sredy* [Method of additional unknown functions in heat conductivity problems with variable physical properties of the medium]. Vestnik IGEU, 2019, issue 2, pp. 59–70.
10. Eremin, A.V., Stefanyuk, E.V., Abisheva, L.S. *Identifikatsiya istochnika teploty na osnove analiticheskogo resheniya zadachi teploprovodnosti* [Heat source identification based on analytical solutions of the heat-conduction problem]. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Chernaya metallurgiya, 2016, vol. 59, no. 5, pp. 339–346.
11. Kudinov, I.V., Kudinov, V.A., Kotova, E.V., Eremin, A.V. *Ob odnom metode resheniya nestatsionarykh kraevykh zadach* [On one method of solving nonstationary boundary-value problems].

*Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2017, vol. 90, no. 6, pp. 1387–1397.

12. Layeni, O.P., Johnson, J.V. Hybrids of the heat balance integral method. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, vol. 218, no. 14, pp. 7431–7444.

13. Mitchell, S.L., Myers, T.G. Improving the accuracy of heat balance integral methods applied to thermal problems with time dependent boundary conditions. *International Journal of Heat*

*and Mass Transfer*, 2010, vol. 53, no. 17–18, pp. 3540–3551.

14. Mitchell, S.L., Myers, T.G. Application of Standard and Refined Heat Balance Integral Methods to One–Dimensional Stefan Problems. *Siam Review*, 2010, vol. 52, no. 1, pp. 57–86.

15. Novozhilov, V. Application of heat–balance integral method to conjugate thermal explosion. *Thermal Science*, 2009, vol. 13, no. 2, pp. 73–80.

---

*Еремин Антон Владимирович,*

ФГБОУВО «Самарский государственный технический университет», кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой промышленной теплоэнергетики, e-mail: a.v.eremin@list.ru

*Eremin Anton Vladimirovich,*

Samara State Technical University, Candidate of Engineering (PhD), Head of Industrial Heat Power Engineering Department, e-mail: a.v.eremin@list.ru

*Губарева Кристина Владимировна,*

ФГБОУВО «Самарский государственный технический университет», аспирант кафедры промышленной теплоэнергетики, e-mail: r.kristina2017@mail.ru

*Gubareva Kristina Vladimirovna,*

Samara State Technical University, PhD student of Industrial Heat Power Engineering Department, e-mail: r.kristina2017@mail.ru