

УДК 681.511.4

**Анатолий Романович Гайдук**

ФГБОУАВПО «Южный федеральный университет», доктор технических наук, профессор кафедры систем автоматического управления, Россия, Таганрог, телефон +7(918) 503-18-39, e-mail: gaiduk\_2003@mail.ru

**Сергей Григорьевич Капустян**

«Южный научный центр Российской академии наук», доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Россия, Ростов-на-Дону, телефон +7-918-556-69-82, e-mail: kap56@mail.ru

**Мохаммад Джалаль Алмашаал**

ФГБОУАВПО «Южный федеральный университет», аспирант, Россия, Таганрог, телефон +7(950) 735-17-38, e-mail: almashaal.jalal@gmail.com

**Сравнение методов синтеза нелинейных систем управления<sup>1</sup>****Авторское резюме**

**Состояние вопроса.** Проблема построения нелинейных систем управления является сложной задачей. Известно много методов, которые позволяют найти подходящее управление для заданного нелинейного объекта, обеспечивающее асимптотическую устойчивость положения равновесия нелинейной системы и приемлемое качество переходного процесса. Многие из этих методов весьма сложны при практическом применении. В связи с этим представляет интерес сравнение некоторых методов по простоте применения.

**Материалы и методы.** В качестве материала для проведения сравнительного анализа выбраны два аналитических метода синтеза нелинейных систем управления: алгебраический полиномиально-матричный метод, в котором используется квазилинейная модель, и метод линеаризации обратной связью, в котором используется модель Бруновского в совокупности со специальными обратными связями.

**Результаты.** Проведен сравнительный анализ алгебраического полиномиально-матричного метода и метода линеаризации обратной связью. Установлено, что значительно более простым является алгебраический полиномиально-матричный метод. Рассмотрен численный пример построения системы, синтезированной данными методами. Установлено, что система, синтезированная алгебраическим полиномиально-матричным методом, имеет область притяжения положения равновесия в два раза большую, чем область притяжения системы, синтезированной методом линеаризации обратной связью.

**Выводы.** Алгебраический полиномиально-матричный метод с применением квазилинейных моделей целесообразно использовать при синтезе систем управления объектами с дифференцируемыми нелинейностями.

**Ключевые слова:** нелинейный объект, квазилинейная модель, область притяжения, управление, синтез, алгебраический полиномиально-матричный метод, метод линеаризации обратной связью

**Anatoly Romanovich Gaiduk**

South Federal University, Doctor of Engineering Sciences (Postdoctoral degree), Professor of Automatic Control Systems Department, Russia, Taganrog, telephone +7(918) 503-18-39, e-mail: gaiduk\_2003@mail.ru

**Sergey Grigorievich Kapustyan**

Southern Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Doctor of Engineering Sciences (Postdoctoral degree), Leading Researcher, Russia, Rostov-on-Don, telephone +7-918-556-69-82, e-mail: kap56@mail.ru

**Mohammad Jalal Almashaal**

South Federal University, Post Graduate Student, Russia, Taganrog, telephone +7(950) 735-17-38, e-mail: almashaal.jalal@gmail.com

<sup>1</sup> Исследование выполнено в ЮФУ и ЮНЦ РАН при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 17-29-07054 и № 19-08-01226, а также в рамках реализации гос. задания ЮНЦ РАН № гр. проекта АААА-А19-119011190173-6.

The study is carried out at SFU and SSC RAS with financial support of the Russian Foundation for Basic Research in the framework of scientific projects No. 17-29-07054 and No. 19-08-01226, as well as in the framework of the implementation of state assignments of SSC RAS No. gr. project АААА А19-119011190173-6

## Comparison of methods of nonlinear control systems design

### Abstract

**Background.** The issue of designing nonlinear control systems is a complex problem. A lot of methods are known that allow us to find a suitable control for a given nonlinear object that provides asymptotic stability of the nonlinear system equilibrium and an acceptable quality of the transient process. Many of these methods are difficult to apply in practice. Thus, comparing some of the methods in terms of simplicity of use is of great interest.

**Materials and methods.** Two analytical methods for the synthesis of nonlinear control systems are considered. They are the algebraic polynomial-matrix method that uses a quasilinear model, and the feedback linearization method that uses the Brunovsky model in combination with special feedbacks.

**Results.** A comparative analysis of the algebraic polynomial-matrix method and the feedback linearization method is carried out. It is found out that the algebraic polynomial-matrix method (APM) is much simpler than the feedback linearization method (FLM). A numerical example of designing a system that is synthesized by these methods is considered. It is found out that the system synthesized by the APM method has a region of attraction of the equilibrium position twice as large as the region of attraction of the system synthesized by the FLM method.

**Conclusions.** It is reasonable to use the algebraic polynomial-matrix method with the quasilinear models in case of synthesis of control systems of objects with differentiable nonlinearities.

**Key words:** nonlinear object, quasilinear model, attraction region, control, synthesis, algebraic polynomial-matrix method, feedback linearization.

**DOI:** 10.17588/2072-2672.2021.6.054-061

**Введение.** Проблема синтеза систем управления для нелинейных объектов все еще находится в стадии исследований и разработок, поскольку является очень сложной. Для ее решения предложено несколько подходов: метод линеаризации обратными связями [1–3], метод регуляризации [4], метод пассивации [5], метод бэкстеппинга [6], метод управляемой формы Жордана [7], метод квазилинеаризации [8, 9], позиционно траекторный метод [10, 11] и др. При использовании большинства из этих методов предварительно необходимо осуществить преобразование исходных нелинейных уравнений объекта к некоторой специальной форме [8]. Например, в случае метода линеаризации обратными связями необходимо преобразовать уравнения к форме Бруновского (canonical Brunovsky form) с применением скобки Ли; для применения метода бэкстеппинга необходимо нелинейные уравнения объекта привести к треугольной форме. При этом проверка условий существования подходящего преобразования или построение этого преобразования часто сравнимы по сложности с построением искомого нелинейного управления.

Одним из наиболее простых в этом плане методов является алгебраический полиномиально-матричный метод с приме-

нением квазилинейных моделей [8, 9]. Для существования моделей этого типа необходима лишь дифференцируемость нелинейностей объекта управления по всем аргументам, а построение квазилинейной модели (КЛМ) заключается во взятии частных производных и интегрировании их по вспомогательной переменной [8].

Ниже предлагается сравнительный анализ процедур синтеза нелинейных систем управления методом линеаризации обратными связями (ЛОС) [1, 3] и алгебраическим полиномиально-матричным (АПМ) методом с применением квазилинейных моделей [8, 9].

**Постановка задачи.** Уравнения многих нелинейных объектов управления имеют вид

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (1)$$

где  $x$  – вектор переменных состояния;  $f(x, u)$  – вектор-функция, дифференцируемая по всем аргументам.

Рассмотрим случай, когда  $\partial f(x, u) / \partial u = f'_u(x)$ , т.е. когда производная от  $f(x, u)$  по  $u$  не зависит от  $u$ . В этом случае уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\dot{x} = \psi(x) + b(x)u, \quad (2)$$

где  $\psi(x)$  – нелинейная вектор-функция;  $b(x) = [b_i(x)]$  – функциональный  $n$ -вектор.

Объекты, которые описываются уравнением (2), называются аффинными по управлению. Обычно переменные состояния предполагаются измеряемыми, поэтому управление ищется как функция переменных состояния  $u = u(x)$ .

Для сравнения указанных выше методов рассмотрим сначала аналитические соотношения этих методов, а затем осуществим синтез нелинейной системы управления конкретным нелинейным объектом этими методами и промоделируем полученные системы.

**Алгебраический полиномиально-матричный метод.** В случае применения этого метода уравнение (2) необходимо преобразовать к квазилинейной модели:

$$\dot{x} = A(x)x + b(x)u, \quad (3)$$

где  $A(x) = [a_{ij}(x)]$  – функциональная  $n \times n$ -матрица [9].

Искомое управление  $u = u(x)$  описывается также квазилинейной моделью:

$$u = -k^T(x)x, \quad (4)$$

где  $k^T(x) = [k_1(x) \ k_2(x) \ \dots \ k_n(x)]$  – вектор функциональных коэффициентов, которые определяются в процессе решения задачи синтеза.

Из уравнений (3) и (4) следует уравнение замкнутой системы:

$$\dot{x} = D(x)x, \quad (5)$$

где  $D(x)$  – функциональная  $n \times n$ -матрица, причем

$$D(x) = A(x) - b(x) \cdot k^T(x). \quad (6)$$

Используя формулу (П.25) из [13, с. 233], характеристический полином  $A(p, x) = \det(pE - D(x))$  матрицы  $D(x)$  (6) системы (5) можно записать следующим образом:

$$D(p, x) = A(p, x) + \sum_{i=1}^n k_i(x)V_i(p, x), \quad (7)$$

где

$$A(p, x) = \det(pE - A(x)) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x)p^i; \quad (8)$$

$$V_i(p, x) = e_i \text{adj}(pE - A(x))b(x) = \sum_{j=0}^{n-1} v_{ij}(x)p^j; \quad (9)$$

$e_i$  –  $i$ -я строка единичной  $n \times n$ -матрицы  $E$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

В соответствии с АПМ методом, полином  $D(p, x)$  в (7) заменяется желаемым гурвицевым полиномом следующего вида:

$$D^*(p) = \sum_{i=1}^n (p - p_i^*) = p^n + \delta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \delta_1 p + \delta_0, \quad (10)$$

где  $p_i^*$  – корни полинома (вещественные, различные и отрицательные), назначаемые исходя из требований к характеру переходного процесса нелинейной замкнутой системы.

В результате указанной замены равенство (7) оказывается полиномиальным уравнением относительно неизвестных коэффициентов  $k_i(x)$  вектора  $k(x)$  из (4) и (6). Как показано в [9], это полиномиальное уравнение эквивалентно следующей алгебраической системе:

$$\begin{bmatrix} V_{10} & V_{20} & \dots & V_{n0} \\ V_{11} & V_{21} & \dots & V_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{n-1} & V_{2n-1} & \dots & V_{n,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \dots \\ r_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где  $r_i = r_i(x)$  – функциональные коэффициенты при  $p^i$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ) полинома

$$R(p, x) = D^*(p) - A(p, x) = (\delta_2 + 1)p^2 + (\delta_1 + 5w(x_1))p + \delta_0 + 9w(x_1).$$

Отметим, что в (11) аргумент опущен для краткости записи. Решение системы (11), т.е. решение задачи синтеза методом АПМ, существует [9], если модель (3) объекта (1) является управляемой, т.е. если выполняется условие

$$\det U_1(x) = [b(x) \ A(x)b(x) \ \dots \ A^{n-1}(x)b(x)] \neq 0. \quad (12)$$

**Метод линеаризации обратной связью.** Для применения данного метода нелинейное уравнение (1) преобразовывается к виду (2); затем оценивается возможность решения задачи синтеза методом линеаризации обратной связью. Для этого находится матрица управляемости и проверяются на неинволютивность столбцы этой матрицы (кроме последнего):

$$U_2 = (b(x) \ [\psi(x), \text{ad}_{\psi}^0 b(x)] \ \dots \ [\psi(x), \text{ad}_{\psi(x)}^{n-1} b(x)]), \quad (13)$$

где

$$\text{ad}_{\psi}^0 b(x) = b(x);$$

$$ad_{\psi}^1 b = [\psi(x), ad_{\psi}^0 b(x)] = \frac{\partial b(x)}{\partial x} \psi(x) - \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} b(x); \quad (14)$$

$ad_{\psi}^i b = [\psi(x), ad_{\psi}^{i-1} b(x)]$  –  $i$ -я производная векторного поля  $b(x)$  по направлению  $\psi(x)$  [3].

Если определитель  $\det U_2 = \zeta(x)$  не равен нулю и проверка на инволютивность прошла успешно, то определяется преобразование

$$z(x) = [T_1(x) \ T_2(x) \ \dots \ T_n(x)]^T,$$

где  $z_1(x) = T_1(x)$ , причем функция  $T_1(x)$  выбирается произвольной, но такой, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1(x)}{\partial x} ad_{\psi(x)}^i b(x) &= 0, \quad i = \overline{0, n-2}; \\ \frac{\partial T_1(x)}{\partial x} ad_{\psi(x)}^{n-1} b(x) &\neq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Остальные компоненты  $z_i(x) = T_i(x)$  преобразования  $z(x)$  определяются выражениями

$$z_i(x) = T_i(x) = (\partial T_{i-1}(x) / \partial x) \psi(x), \quad i = \overline{1, n}. \quad (16)$$

При условии (15) производная по времени  $\dot{z}$  с учетом (15) определяется выражением

$$\dot{z} = [z_2 \ z_3 \ \dots \ z_{n-1} \ \varphi(x) + \gamma \zeta(x) u]^T, \quad (17)$$

где  $\varphi(x)$ ,  $\zeta(x)$  – некоторые скалярные функции;  $\gamma$  – постоянный коэффициент.

Согласно (17), преобразование  $z(x)$  приводит уравнение (2) аддитивного по управлению нелинейного объекта (1) к канонической форме Бруновского:  $\dot{z} = [z_2 \ z_3 \ \dots \ z_{n-1} \ v]^T$ , где  $v = \varphi(x) + \gamma \zeta(x) u$  – новое управление.

Так как форма Бруновского является линейной, то управление  $v = v(z)$  обычно берется линейным, т.е. в виде  $v(z) = \delta_0 z_1 + \delta_1 z_2 + \dots + \delta_{n-1} z_n$ . Его постоянные коэффициенты  $\delta_i$  назначаются исходя из требований к характеру переходного процесса нелинейной системы каким-либо линейным методом, например методом модального управления.

Тогда искомое нелинейное управление определяется из условия  $\varphi(x) + \gamma \zeta(x) u = v(z)$ , т.е. по формуле

$$u = [\delta_0 z_1 + \delta_1 z_2 + \dots + \delta_{n-1} z_n - \varphi(x)] / \gamma \zeta(x), \quad (18)$$

где функции  $z_i = z_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$  определяются выражениями (16).

Соотношения (13)–(18) являются расчетными соотношениями метода ЛОС.

Перейдем к рассмотрению численного примера синтеза нелинейных систем управления рассмотренными методами.

*Пример.* Перевернутый маятник с маховиком описывается [12] уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = 5 \sin(x_1) + 2x_3 + 2u, \\ \dot{x}_3 &= 7 \sin(x_1) + x_3 + u. \end{aligned} \quad (19)$$

Найти управление  $u = u(x)$ , при котором положение равновесия  $x = 0$  будет асимптотически устойчивым.

**Синтез АПМ методом.** В данном случае матрица  $A(x)$  и вектор  $b(x)$  квазилинейной модели (3) объекта (19) имеют вид

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5w(x) & 0 & 2 \\ 7w(x) & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где  $w(x) = x_1^{-1} \sin x_1$ .

В соответствии с изложенным выше, прежде всего, проверяется условие управляемости (12). В данном случае  $\det U_1(x) = -36x_1^{-1} \sin x_1$ . Следовательно, решение задачи синтеза существует, если  $|x_1| < \pi$ . Затем по формулам (8) и (9) определяются полиномы:

$$\begin{aligned} A(p, x) &= \det(pE - A(x)) = \\ &= p^3 - p^2 + \alpha_1(x)p + \alpha_0(x), \end{aligned}$$

где  $\alpha_1(x) = -5w(x)$ ,  $\alpha_0(x) = -9w(x)$ ;

$$V_1(p, x) = [1 \ 0 \ 0] \text{adj}(pE - A(x)) b(x) = 2p;$$

$$V_2(p, x) = [0 \ 1 \ 0] \text{adj}(pE - A(x)) b(x) = 2p^2;$$

$$\begin{aligned} V_3(p, x) &= [0 \ 0 \ 1] \text{adj}(pE - A(x)) b(x) = \\ &= p^2 + 9w(x_1). \end{aligned}$$

Пусть желаемый гурвицевый полином  $D^*(p) = p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0$  (10). Тогда

$$\begin{aligned} R(p, x) &= D^*(p) - A(p, x) = (\delta_2 + 1)p^2 + \\ &+ (\delta_1 + 5w(x_1))p + \delta_0 + 9w(x_1). \end{aligned}$$

Найденные полиномы  $V_i(p, x)$  и  $R(p, x)$  позволяют составить алгебраическую систему (11):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 9w(x_1) \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1(x) \\ k_2(x) \\ k_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0 + 9w(x_1) \\ \delta_1 + 5w(x_1) \\ \delta_2 + 1 \end{bmatrix}, \quad |x_1| < \pi. \quad (21)$$

На основе решения этой системы и выражения (4) записывается искомое управление:

$$\begin{aligned} u_1(x) = & -[0,5\delta_1 + 2,5w(x_1)]x_1 - \\ & -[0,5\delta_2 - \delta_0 / 18w(x_1)]x_2 - \\ & -[1 + \delta_0 / 9w(x_1)]x_3, \quad \text{при } |x_1| < \pi. \end{aligned} \quad (22)$$

Если это управление подставить в равенство (6) с учетом (19), а полученную матрицу  $D(x)$  – в (5), то получим нелинейное уравнение замкнутой системы управления, синтезированной АПМ методом. Легко убедиться, что характеристический полином  $D(p, x) = p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0$  матрицы  $D(x)$  этой системы равен желаемому полиному  $D^*(p, x)$  (10) при  $n = 3$ . Так как этот полином по условию является гурвицевым, а его корни вещественные и различные, то, как показано в [9], положение равновесия  $x = 0$  замкнутой системы (19), (22) при  $u = u_1$  асимптотически устойчиво, но только пока  $|x_1(t)| < \pi$ .

**Синтез методом линеаризации обратной связи.** В соответствии с этим методом, уравнения заданного нелинейного объекта (19) преобразовываются к виду (2), в котором нелинейная вектор-функция  $\psi(x)$  и вектор  $b(x)$  принимают вид

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 5 \sin x_1 + 2x_3 \\ 7 \sin x_1 + x_3 \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Для определения матрицы управляемости  $U_2$  (13) заданного нелинейного объекта (19) сначала найдем матрицы Якоби вектор-функций  $\psi(x)$  и  $b(x)$  (23):

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 \cos x_1 & 0 & 2 \\ 7 \cos x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial b(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Порядок объекта в данном случае  $n = 3$ , поэтому матрица управляемости  $U_2$  имеет вид  $U_2 = [b(x) \quad ad_{\psi(x)}^1 b(x) \quad ad_{\psi(x)}^2 b(x)]$ .

С учетом (14), (16) и (24) при  $n = 3$  находим

$$\begin{aligned} [ad_{\psi(x)}^1 b(x)] &= \frac{\partial b(x)}{\partial x} \psi(x) - \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} b(x) = \\ &= [-2 \quad -2 \quad -1]^T, \\ [ad_{\psi(x)}^2 b(x)] &= [2 \quad 10 \cos x_1 + 2 \quad 14 \cos x_1 + 1]^T. \end{aligned}$$

Следовательно, матрица управляемости

$$U_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 10 \cos x_1 + 2 \\ 1 & -1 & 14 \cos x_1 + 1 \end{bmatrix}.$$

Ее определитель

$$\det U_2 = \zeta(x) = 36 \cos x_1$$

отличен от нуля, если только  $|x_1(t)| < \pi/2$ , т.е. задача синтеза имеет решение методом линеаризации обратной связью, если только  $|x_1(t)| < \pi/2$ .

Условия (15) в данном случае принимают вид:

$$\frac{dT_1(x)}{dx} b(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} & \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0; \quad (25)$$

$$\frac{dT_1}{dx} [ad_{\psi(x)}^1 b(x)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} & \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0; \quad (26)$$

$$\frac{dT_1}{dx} ad_{\psi(x)}^2 B = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} & \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \cos x_1 + 2 \\ 14 \cos x_1 + 1 \end{bmatrix} \neq 0. \quad (27)$$

Из условия (25) следует, что функция  $T_1(x)$  зависит только от  $x_2$  и  $x_3$ . При этом целесообразно принять функцию  $T_1(x) = x_2 - 2x_3$ , как простейшую, при которой удовлетворяются условия (25)–(27).

Тогда  $z_1 = x_2 - 2x_3$  и, согласно (16), при  $n = 3$   $z_2 = T_2(x) = -9 \sin x_1$ ,  $z_3 = T_3(x) = -9x_2 \cos x_1$ . Преобразованием

$$z(x) = T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ T_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - 2x_3 \\ -9 \sin x_1 \\ -9x_2 \cos x_1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

уравнения (2), (23) приводятся к канонической форме Бруновского при  $n = 3$ :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v, \quad (29)$$

где функция  $v$  с учетом полученных выражений для  $z_i$  (28) имеет вид

$$v = 9x_2^2 \sin x_1 - 45(\cos x_1) \times \\ \times (\sin x_1) - 18x_3 \cos x_1 - 18u_2 \cos x_1.$$

Отсюда следует управление, при котором преобразование (28) линеаризует уравнения (2), (23):

$$u_2 = 2,5 \sin x_1 - 0,5x_2^2 \operatorname{tg} x_1 + x_3 + v / 18 \cos x_1. \quad (30)$$

Отметим, что  $18 \cos x_1 = 0,5 \det U_2(x)$ . Это равенство подтверждает необходимость условия  $\det U_2(x) \neq 0$  в случае метода ЛОС. Как видно, управление (30), при котором возможна линеаризация уравнения объекта (2), (23), представляет собой совокупность нелинейных обратных связей по переменным состояния.

Для получения устойчивой системы управления положим  $v = -\delta_0 z_1 - \delta_1 z_2 - \delta_2 z_3$ , где постоянные коэффициенты  $\delta_i$  выбираются в соответствии с желаемым характером переходного процесса системы управления. Подставив приведенное выражение для  $v$  в уравнение (30), получим стабилизирующее управление, имеющее вид

$$u_2(z, x) = 2,5 \sin x_1 - 0,5x_2^2 \operatorname{tg} x_1 + x_3 - \\ - (\delta_0 z_1 + \delta_1 z_2 + \delta_2 z_3) / 18 \cos x_1.$$

Наконец, заменяя  $z_i$  в соответствии с выражением (28), получим искомое стабилизирующее управление при  $|x_1(t)| < \pi / 2$ :

$$u_2(x) = 2,5 \sin x_1 - 0,5x_2^2 \operatorname{tg} x_1 + x_3 - (2\delta_0 x_3 - \\ - \delta_0 x_2 - 9\delta_1 \sin x_1 - 9\delta_2 x_2 \cos x_1) / 18 \cos x_1. \quad (31)$$

В данном случае определитель Якобиана функции  $z(x)$  (28) равен  $-162(\cos x_1)^2$ , т.е. при всех  $x_2, x_3$  и  $|x_1| < \pi / 2$  преобразование  $z(x)$  обратимо. Другими словами, существует невырожденное обратное преобразование  $x(z)$ , поэтому из асимптотической устойчивости линейной системы (29) при  $v = -\delta_0 z_1 - \delta_1 z_2 - \delta_2 z_3$  и всех  $z \in R^3$  следует асимптотическая устойчивость положения равновесия  $x = 0$  системы (19), (31),

синтезированной методом ЛОС, но лишь при всех  $x_2(t), x_3(t)$  и  $|x_1(t)| < \pi / 2$ .

Для оценки качества синтезированной системы проведено их моделирование в MATLAB. При этом коэффициенты  $\delta_0, \delta_1$  и  $\delta_2$  в обоих случаях взяты одинаковыми. На рис. 1 показан переходный процесс системы (19), (22), синтезированной АПМ методом.

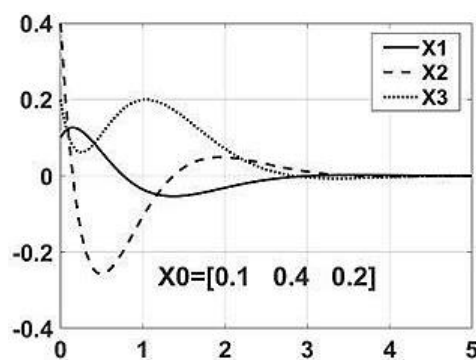


Рис. 1. Переходной процесс системы, синтезированной АПМ методом

Результат моделирования системы управления, полученной методом ЛОС для того же объекта, приведен на рис. 2. На рис. 1, 2 указаны и начальные условия  $X_0 = x(0)$ .

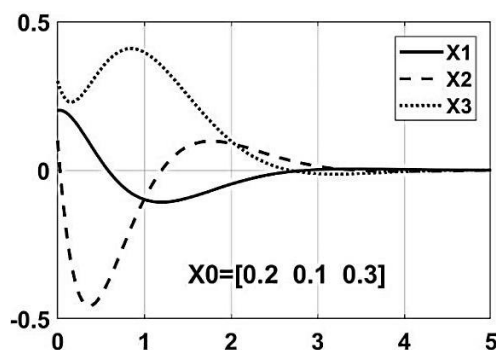


Рис. 2. Переходной процесс системы, синтезированной методом ЛОС

Анализ графиков (рис. 1, 2) показывает, что оба управления обеспечивают асимптотическую устойчивость положения равновесия системы. При этом длительность переходных процессов в обоих случаях практически одинакова и составляет около 3 с. Это объясняется тем, что корни характеристических полиномов в обоих случаях взяты одинаковыми. Путем моделирования установлено также, что, изменяя значения корней или коэффициентов  $\delta_i$  и в том, и в другом случае можно изменять характер и длительность переходных

процессов. Однако, в отличие от линейных систем, зависимость длительности переходных процессов от корней полиномов, соответствующих назначенным коэффициентам  $\delta_i$ , является нелинейной.

Отметим также, что области притяжения положений равновесия систем в обоих случаях ограничены, что обусловлено ограниченной областью управляемости объекта (19). Поэтому синтезированные системы могут работать только при ограниченных начальных условиях.

**Выводы.** Проведенные исследования показали, что алгебраический полиномиально-матричный метод является значительно более простым, по сравнению с методом линеаризации обратной связи. При этом в рассмотренном примере область притяжения положения равновесия  $x = 0$  системы, синтезированной АПМ методом, в два раза больше, чем область притяжения положения равновесия системы, синтезированной методом ЛОС. Поэтому если нелинейности объекта управления дифференцируемы по всем аргументам, то рекомендуется использовать АПМ метод.

Подчеркнем также, что при цифровой реализации управлений АПМ метод может быть распространен и на случай неаддитивных по управлению нелинейных объектов управления. Если объект является управляемым в ограниченной области своего пространства состояний, то положение равновесия систем управления, синтезированных как АПМ методом, так и методом ЛОС, имеет ограниченную область притяжения.

#### Список литературы

1. **Isidori A.** Lectures in Feedback Design for multivariable Systems // *Advanced Textbook in Control and Signal Processing*. – London, Springer, 2016. – 414 p.
2. **Tuan H.T., Trinh H.** A Linearized Stability Theorem for Nonlinear Delay Fractional Differential Equations // *IEEE Trans. Automat. Control*. – 2018. – Vol. 63, No. 9. – P. 3180–3186.
3. **Воевода А.А., Филюшов В.Ю.** Линеаризация обратной связью // *Сборник научных трудов НГТУ*. – 2016. – № 2(84). – С. 68–76.
4. **Лукьянов А.Г., Уткин В.И.** Методы сведения уравнений динамических систем к регулярной форме // *Автоматика и телемеханика*. – 1981. – № 4. – С. 5–13.
5. **Madeira D. de S., Adamy J.** Feedback Control of Nonlinear Systems Using Passivity

indices // *Proc. IEEE Conference on Control Applications*. – Sydney, Australia, 2015. – P. 263–268.

6. **Ascencio P., T. Astolfi T., T. Parisini T.** Backstepping PDE Design: A Convex Optimization Approach // *IEEE Trans. Automat. Control*. – 2018. – Vol. 63, No. 7. – P. 1943–1958.

7. **Гайдук А.Р.** Синтез нелинейных систем на основе управляемой формы Жордана // *Автоматика и телемеханика*. – 2006. – № 7. – С. 3–13.

8. **Gaiduk A.R.** Nonlinear Control Systems Design by Transformation Method // *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. – 2018. – Vol. 19, No. 12. – P. 755–761.

9. **Гайдук А.Р.** К синтезу квазилинейных гурвицевых систем управления // *Труды СПИИРАН*. – 2019. – Т. 18(3). – С. 678–705.

10. **Pshikhov V., Medvedev M.** Position Control of Vehicles with Multi-Contour Adaptation // *Journal of Engineering and Applied Sciences*. – 2018. – Vol. 13. – С. 8921–8928.

11. **Капустян С.Г., Орда-Жигулина М.В., Орда-Жигулина Д.В.** Метод робастно устойчивого управления движением группы мобильных роботов с «лидером» для систем мониторинга и прогнозирования опасных процессов и обеспечения безопасности населения и береговой инфраструктуры // *Наука Юга России*. – 2021. – Т. 17, № 2. – С. 66–73.

12. **Синтез управления для неустойчивого объекта. Перевернутый маятник / А.А. Гришин, А.В. Ленский, Д.Е. Охоцимский и др.** // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2002. – Т. 5. – С. 14–24.

13. **Гайдук А.Р.** Непрерывные и дискретные динамические системы. – М.: УМиИЦ «Учебная литература», 2004. – 252 с.

#### References

1. Isidori, A. Lectures in Feedback Design for Multivariable Systems. *Advanced Textbook in Control and Signal Processing*. London, Springer, 2016. 414 p.
2. Tuan, H.T., Trinh, H.A. Linearized Stability Theorem for Nonlinear Delay Fractional Differential Equations. *IEEE Trans. Automat. Control*, 2018, vol. 63, no. 9, pp. 3180–3186.
3. Voevoda, A.A., Filyushov, V.Yu. Linearizatsiya obratnoy svyaz'yu [Feedback Linearization]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2016, no. 2(84), pp. 68–76.
4. Luk'yanov, A.G., Utkin, V.I. Metody svedeniya uravneniy dinamicheskikh sistem k regul'arnoy forme [Methods for Reducing Equations of Dynamical Systems to a Regular Form]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1981, no. 4, pp. 5–13.
5. Madeira D. de S., Adamy, J. Feedback Control of Nonlinear Systems Using Passivity indices. *Proc. IEEE Conference on Control Applications*. Sydney, Australia, 2015, pp. 263–268.

6. Ascencio, P., T. Astolfi, T., T. Parisini, T. Backstepping PDE Design: A Convex Optimization Approach. *IEEE Trans. Automat. Control*, 2018, vol. 63, no. 7, pp. 1943–1958.

7. Gaiduk, A.R. Sintez nelineynykh sistem na osnove upravlyaemoy formy Zhordana [Synthesis of Nonlinear Systems Based on Controlled Jordan Form]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2006, no. 7, pp. 3–13.

8. Gaiduk, A.R. Nonlinear Control Systems Design by Transformation Method. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 12, pp. 755–761.

9. Gaiduk, A.R. K sintezu kvazilineynykh gurvitsevykh sistem upravleniya [On Synthesis of Quasilinear Hurwitz Control Systems]. *Trudy of SPIIRAN*, 2019, vol. 18(3), pp. 678–705.

10. Pshikhopov, V., Medvedev, M. Position Control of Vehicles with Multi-Contour Adaptation. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2018, vol. 13, pp. 8921–8928.

11. Kapustyan, S.G., Orda-Zhigulina, M.V., Orda-Zhigulina, D.V. Metod robustno ustoychivogo

upravleniya dvizheniem gruppy mobil'nykh robotov s «liderom» dlya sistem monitoringa i prognozirovaniya opasnykh protsessov i obespecheniya bezopasnosti naseleniya i beregovoy infrastruktury [Method of robustness stable control of the movement of a mobile robots group with “leader” for monitoring and forecasting systems of hazardous processes and ensuring the safety of the population and coastal infrastructure]. *Nauka Yuga Rossii*, 2021, vol. 17, no. 2, pp. 66–73.

12. Grishin, A.A., Lenskiy, A.V., Okhotsimskiy, D.E., Panin, D.A. Formal'skiy, A.M. Sintez upravleniya dlya neustoychivogo ob"ekta. Perevernutyy mayatnik [A Control Synthesis for an Unstable Object. An Inverted Pendulum]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2002, vol. 5, pp.14–24.

13. Gaiduk, A.R. *Nepreryvnye i diskretnye dinamicheskie sistemy* [Continuous and discrete dynamic systems]. Moscow: UMilTs «Uchebnaya literatura», 2004. 252 p.