УДК 536. 2 (075)

**Константин Викторович Трубицын**
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», кандидат экономических наук, доцент кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики, Россия, Самара, телефон +7(846) 3324235,
e-mail: totig@yandex.ru

**Татьяна Евгеньевна Гаврилова**
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», старший преподаватель кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики, Россия, Самара, телефон +7(846) 3324235

**Евгения Валериевна Котова**
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», кандидат технических наук, доцент кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики, Россия, Самара, e-mail: larginaevgenya@mail.ru

**Ксения Владимировна Колотилкина**
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», аспирант кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики, Россия, Самара, телефон +7(846) 3324235

**Сергей Владимирович Зайцев**
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», аспирант кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики, Россия, Самара, телефон +7(846) 3324235

**Василий Александрович Кудинов**
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретических основ теплотехники и гидромеханики, Россия, Самара, телефон +7 (846) 3324235

# Дополнительные граничные условия в задачах теплопроводности с переменным по координате начальным условием[1]

**Авторское резюме**

**Состояние вопроса.** Получение точных аналитических решений задач теплопроводности с переменным начальным условием представляет большие математические трудности. Известные решения выражаются громоздкими функциональными рядами, плохо сходящимися в области малых значений временной и пространственной переменных. В связи с этим получение более простых и эффективных решений указанных задач является актуальной проблемой.

**Материалы и методы.** Для получения решений использована дополнительная искомая функция и дополнительные граничные условия. Дополнительная искомая функция позволяет сводить исходное дифференциальное уравнение в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение получаемым решением было эквивалентно выполнению уравнения в граничных точках.

**Результаты.** Разработана методика получения аналитического решения задачи теплопроводности при линейном изменении начального условия, основанная на определении дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий. Из решения обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной искомой функции определяются собственные числа, которые в классических методах находится из решения краевой задачи Штурма–Лиувилля. Предлагается другое, более простое направление определения собственных чисел. Получено точное аналитическое решение задачи теплопроводности для неограниченной пластины с переменным по координате начальным условием.

**Выводы.** Научная и практическая ценность предложенного аналитического решения состоит в разработке нового подхода к определению собственных чисел, а также в исключении процесса определения сложных интегралов при выполнении уравнения и начальных условий краевой задачи, что позволяет упростить использование полученного решения в инженерных приложениях.

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2023-0003) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета.
The project is carried out with the support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. FSSE-2023-0003) within the framework of the state assignment of the Samara State Technical University


Вестник ИГЭУ, 2023, вып. 6, с. 88–94.

**Ключевые слова:** нестационарная теплопроводность, дополнительные граничные условия, дополнительная искомая функция, дифференциальное уравнение, аналитическое решение, метод наименьших квадратов

**Konstantin Viktorovich Trubitsyn**
Samara State Technical University, Candidate of Economic Sciences, (PhD), Associate Professor of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics Department, Russia, Samara, telephone +7 (846) 3324235,
e-mail: totig@yandex.ru

**Tatyana Evgenievna Gavrilova**
Samara State Technical University, Senior Lecturer of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics Department, Russia, Samara, telephone +7 (846) 3324235

**Evgenia Valerievna Kotova**
Samara State Technical University, Candidate of Engineering Sciences, (PhD), Associate Professor of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics Department, Russia, Samara, e-mail: larginaevgenya@mail.ru

**Ksenia Vladimirovna Kolotilkina**
Samara State Technical University, Postgraduate Student of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics Department, Russia, Samara, telephone +7 (846) 3324235

**Sergei Vladimirovich Zaitsev**
Samara State Technical University, Postgraduate Student of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics Department, Russia, Samara, telephone +7 (846) 3324235

**Vasily Alexandrovich Kudinov**
Samara State Technical University, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, (Post-doctoral degree), Professor, Head of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics Department Russia, Samara,
telephone +7 (846) 3324235

# Additional boundary conditions in heat conduction problems with coordinate variable initial condition

**Abstract**

**Background.** It is exceedingly difficult to obtain mathematically accurate analytical solutions of heat conduction problems with a variable initial condition. Known solutions of these problems are expressed by cumbersome functional series that converge poorly in the range of small values of time and space variables. Thus, to obtain simpler and more effective solutions of these problems is an urgent issue.
**Materials and methods.** The authors have used an additional required function and additional boundary conditions to obtain solutions of the problem. Application of the additional required function allows us to reduce the original partial differential equation to the integration of an ordinary differential equation. Additional boundary conditions are in such a form that their fulfillment using the resulting solution is equivalent to the fulfillment of the equation at the boundary points.
**Results.** The authors have developed a technique to obtain an analytical solution of the heat conduction problem under a linear change of the initial condition, based on an additional required function and additional boundary conditions. Solution of an ordinary differential equation with respect to the additional required function determines the eigenvalues. In classical methods these eigenvalues are found in the solution of the Sturm–Liouville boundary value problem. The authors have proposed another, simpler solution to determine eigenvalues. An accurate analytical solution of the heat conduction problem for an unbounded plate with a coordinate-variable initial condition is obtained.
**Conclusions.** The scientific and practical value of the proposed analytical solution is the development of an innovative approach to determine eigenvalues, as well as elimination of complex integrals when we solve the equation and initial conditions of the boundary value problem. It makes possible to simplify the use of the solution obtained in engineering applications.

**Key words:** non-stationary heat conduction, additional boundary conditions, additional required function, differential equation, analytical solution, least squares method

**DOI:** 10.17588/2072-2672.2023.6.088-094

**Состояние вопроса.** Переменные по координате начальные условия в краевых задачах возникают в случаях, когда при работе в стационарном режиме с температурным перепадом по толщине неограниченной пластины на одной из ее стенок происходит смена режима теплообмена. Требуется определить распределение температуры по толщине пластины во времени до наступления нового стационарного режима. Известны точные аналитические решения подобных задач, полученные классическими аналитическими методами, однако процесс их получения является сложным и трудоемким [1, 2].

В теории теплопроводности используются методы, основанные на интеграле теплового баланса [3–11]. Они приводят к простым по форме приближенным решениям многих задач, включая и нелинейные. Их недостаток – малая точность, объясняемая тем, что дифференциальное уравнение удовлетворяется в среднем. Для повышения точности [5–11] вводятся дополнительные граничные условия (ДГУ). Их назначение – выполнение уравнения на границах. В работах [11, 12] доказано, что граничное выполнение уравнения приводит к его выполнению и внутри пространства. Совместное использование ДГУ и дополнительной искомой функции (ДИФ) позволяет выполнить исходное уравнение, не прибегая к его интегрированию по пространственной переменной, ограничившись его выполнением лишь на границах.

Целью исследования является разработка метода получения точного аналитического решения краевой задачи теплопроводности для неограниченной пластины с переменным по координате начальным условием, существенно отличающегося от известных решений.

Задачи исследований: 1) разработка метода решения, позволяющего избежать интегрирования исходного дифференциального уравнения по пространственной переменой; 2) получение таких дополнительных граничных условий, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению дифференциального уравнения краевой задачи в граничных точках, что приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области, минуя непосредственное интегрирование по пространственной переменной; 3) разработка метода выполнения начального условия, позволяющего избежать определения сложных интегралов, заменив его решением систем алгебраических линейных уравнений, получаемых при использовании метода наименьших квадратов. Отметим, что этот метод может быть применен при любом законе изменения начального условия от пространственной переменной.

**Материалы и методы.** В качестве примера рассмотрим задачу теплопроводности для неограниченной пластины с линейным изменением начального условия:

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}; \quad (1)$$

$(\tau > 0; \quad 0 < x < \delta)$

$$T(x,0) = T_0 - (x/\delta)(T_0 - T_{ст}); \quad (2)$$

$$T(0,\tau) = T_{ст}; \quad (3)$$

$$T(\delta,\tau) = T_{ст}, \quad (4)$$

где $T$ – температура; $x$ – координата; $\tau$ – время; $T_0$ − начальная температура; $T_{ст}$ − температура при $x = \delta$; $a$ – температуропроводность; $\delta$ – толщина пластины.

Введем обозначения:

$$\Theta = (T - T_{ст})/(T_0 - T_{ст}); \quad \xi = x/\delta; \quad \mathrm{Fo} = a\tau/\delta^2, \quad (5)$$

где $\Theta$, $\xi$, Fo – безразмерные температура, координата, время.

Подставляя (5) в (1)–(4), находим (рис. 1):

$$\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo} = \partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})/\partial\xi^2; \quad (6)$$

$(\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1)$

$$\Theta(\xi,0) = 1 - \xi; \quad (7)$$

$$\Theta(0,\mathrm{Fo}) = 0; \quad (8)$$

$$\Theta(1,\mathrm{Fo}) = 0. \quad (9)$$

Введем метод решения ДИФ:

$$q(\mathrm{Fo}) = -\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi = tg\,\alpha, \quad (10)$$

где $\alpha$ – угол между осью $\xi$ и касательной к температурной кривой в точке $\xi = 1$.

Функция (10) представляет изменение градиента температуры в точке $\xi = 1$. Очевидно, что при $\mathrm{Fo} = 0$ $\alpha = 45°$; при $\mathrm{Fo} \to \infty$ $\alpha \to 0$.

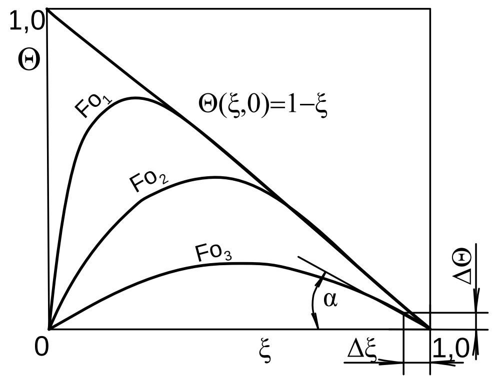


Рис. 1. Схема теплообмена $(\mathrm{Fo}_1 < \mathrm{Fo}_2 < \mathrm{Fo}_3)$

Примем решение задачи (6)–(9) в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{n} b_k(q)\varphi_k(\xi), \quad (11)$$

где $b_k(q)$ – неизвестные функции; $\varphi_k(\xi) = \sin(k\pi\xi)$ $(r = 2k - 1)$.

Соотношение (11) удовлетворяет условиям (8), (9). Коэффициенты $b_k(q)$ будем находить из (10) и ДГУ, общие формулы для которых имеют вид [7]:

$$\partial^i\Theta(\xi,\mathrm{Fo})/\partial\xi^i\Big|_{\xi=0} = 0; \quad (12)$$

$$\partial^i\Theta(\xi,\mathrm{Fo})/\partial\xi^i\Big|_{\xi=1} = 0, \quad (i = 2, 4, 6, \ldots); \quad (13)$$

$$\partial^{2i+1}\Theta(\xi,\mathrm{Fo})/\partial\xi^{2i+1}\Big|_{\xi=1} = \partial^i q(\mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo}^i, \quad (14)$$

$(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Выполнение ДГУ (12)–(14) эквивалентно выполнению уравнения (6) в точках границы $\xi$ = 0 и $\xi$ = 1. Очевидно, что соотношение (11) удовлетворяет ДГУ (12), (13).

Таким образом, из основных (8), (9) и ДГУ (12)–(14) невыполненными соотношением (11) будут лишь ДГУ (14), которые совместно с условием (10) будут использованы для определения неизвестных $b_k(q)$ соотношения (11).

В первом приближении, подставляя (11) в (10), находим

$$b_1(q) = -q(\mathrm{Fo})/\pi. \tag{15}$$

Соотношение (11) принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = -\frac{1}{\pi} + q(\mathrm{Fo})\sin(\pi\xi). \tag{16}$$

Функция $q(\mathrm{Fo})$ находится из уравнения (6). Так как в граничных точках $\xi$ = 0 и $\xi$ = 1 соотношение (16) удовлетворяет уравнению (6) (в предельном смысле – правая и левая его части равны нулю), то нахождение функции $q(\mathrm{Fo})$ в этих точках не представляется возможным. В связи с этим потребуем выполнения уравнения (6) в любой другой точке, исключая граничные. Подставляя (16) в (6), получаем

$$q'(\mathrm{Fo}) + \pi^2 q(\mathrm{Fo}) = 0, \tag{17}$$

где $q'(\mathrm{Fo}) = dq(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}$.

Интегрируя уравнение (17), имеем

$$q(\mathrm{Fo}) = C_1\exp(-\nu_1\mathrm{Fo}), \tag{18}$$

где $C_1$ – постоянная интегрирования; $\nu_1 = -\pi^2$ – первое собственное число, равное его точному значению [2].

Отметим, что в классических методах собственные значения находятся из краевой задачи Штурма–Лиувилля, сформулированной в пространственных переменных. Следовательно, в данном случае рассматривается другое направление их определения – через решение временно́го уравнения относительно ДИФ.

Подставим (18) в (16):

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = -C_1\exp(-\nu_1\mathrm{Fo})\sin(\pi\xi)/\pi. \tag{19}$$

Формула (19) удовлетворяет уравнению (6) во всем диапазоне $\xi$ ($0 \le \xi \le 1$) независимо от значения $C_1$. Причем уравнение (6) оказалось выполненным, минуя процедуру его интегрирования по переменной $\xi$, что связано с его выполнением в граничных точках $\xi$ = 0 и $\xi$ = 1 путем выполнения ДГУ (12)–(14).

Постоянная $C_1$ находится из условия (7). Потребуем его выполнения в 10 точках области ($\xi$ = 1,0; 0,2; 0,3;…, 0,9; 0,95, $i = \overline{1,10}$). Точки $\xi$ = 0 и $\xi$ = 1,0 исключаются ввиду того, что при $\xi$ = 1,0 начальное условие (7) выполняется соотношением (19) при любом $C_1$, а при $\xi$ = 0 невозможно одновременное выполнение условий (7) и (8) в начальный момент времени ($\mathrm{Fo} = 0$). Положив $\mathrm{Fo} = 0$ и применяя полученное соотношение в указанных точках переменной $\xi$, относительно $C_1$ будем иметь переопределенную систему 10 алгебраических линейных уравнений. Найдем решение этих уравнений путем определения минимума суммы квадратов их невязок, т.е. найдем минимум следующего функционала:

$$I = \sum_{i=1}^{10}[\Theta(\xi_i,0) - 1 + \xi_i]^2. \tag{20}$$

Подставляя (19) в (20), находим

$$I = \sum_{i=1}^{10}\left[\frac{C_1}{\pi}\sin(\pi\xi) - 1 + \xi_i\right]^2. \tag{21}$$

Для нахождения минимума функционала (21) необходимо определить производную от $I$ по $C_1$ и приравнять полученное соотношение к нулю. Для $C_1$ имеем алгебраическое уравнение, из которого находим

$$C_1 = \sum_{i=1}^{10}\frac{\pi(\xi_i - 1)}{\sin(\pi\xi_i)}. \tag{22}$$

Из (22) находим $C_1 = -1{,}978753$. Его точное значение $C_1$ = –2 [2]. Полученное $C_1$ отличается от точного в первом знаке после запятой. Для решения в первом приближении полученная точность определения $C_1$ вполне достаточна. Применение метода наименьших квадратов позволяет максимально арифметизировать выполнение начального условия, исключив определение сложных интегралов по координате.

С учетом $C_1$ формула (19) будет иметь вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \frac{1{,}978}{\pi}\exp(-\nu_1\mathrm{Fo})\sin(\pi\xi). \tag{23}$$

Анализ расчетов по (23) позволяет заключить, что в области $0{,}1 \le \mathrm{Fo} < \infty$ расхождение с точным решением не превышает 4 % [1, 2].

Во втором приближении, подставляя (11) в (10), (14) ($i = 1$), из решения системы двух алгебраических уравнений находим: $b_1(q) = -(4\pi^2 q + q')/(3\pi^3)$; $b_2(q) = -(\pi^2 q + q')/(6\pi^3)$, $q' = dq/d\mathrm{Fo}$.

Соотношение (11) принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = -\frac{1}{3\pi^3}\left[(4\pi^2 q + q')\sin(\pi\xi) + \frac{1}{2}(\pi^2 q + q')\sin(2\pi\xi)\right]. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (6), применительно к любой точке переменной $\xi$ ($\xi \ne 0$ и $\xi \ne 1$) получаем

$$q'' + 5\pi^2 q' + 4\pi^4 q = 0, \tag{25}$$

где $q'' = d^2q/d\mathrm{Fo}^2$.

Интегрируя уравнения (25), находим

$$q(\mathrm{Fo}) = C_1 \exp(-\nu_1 \mathrm{Fo}) + C_2 \exp(-\nu_2 \mathrm{Fo}), \qquad (26)$$

где $C_1$, $C_2$ – постоянные интегрирования; $\nu_1 = \pi$, $\nu_2 = 4\pi^2$ – собственные числа, равные точным их значениям [2].

Подставим (26) в (24):

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \frac{1}{2\pi}\left[-2C_1 \exp(-\nu_1 \mathrm{Fo})\sin(\pi\xi) + \right.$$
$$\left. + C_2 \exp(-\nu_2 \mathrm{Fo})\sin(2\pi\xi)\right]. \qquad (27)$$

Постоянные интегрирования $C_1$ и $C_2$ находятся из выполнения начального условия (7) с использованием метода наименьших квадратов. Требуя выполнения начального условия (7) в 10 точках области ($\xi$ = 0,1; 0,2; 0,3;…, 0,9; 0,95, $i = 1, 2, 3, \ldots, 10$), относительно $C_1$ и $C_2$ получаем систему 10 алгебраических уравнений. Применяя метод наименьших квадратов, получаем функционал вида (20). Подставим (27) в (20):

$$I = \sum_{i=1}^{10}\left[\xi_i - 1 + \frac{C_2 \sin(2\pi\xi_i) - 2C_1 \sin(\pi\xi_i)}{2\pi}\right]^2. \qquad (28)$$

Определяя производные от $I$ по $C_1$ и $C_2$ и приравнивая полученные соотношения к нулю, для $C_1$ и $C_2$ имеем систему двух алгебраических уравнений. Ее решение: $C_1 = -1{,}978753$; $C_2 = 1{,}916193$. Точные их значения [2]: $C_1 = -2$; $C_2 = 2$. Выполняя начальное условие в 100 точках области (исключая точки $\xi$ = 0 и $\xi$ = 1), будем иметь: $C_1 = -1{,}999835$; $C_2 = 1{,}999341$. Как видно, произошло существенное уточнение постоянных интегрирования. Таким путем, увеличивая число точек аппроксимации начального условия, можно получить значения $C_1$ и $C_2$ с заданной степенью точности, т. е. практически точные их значения.

Формула (27) с учетом $C_1$ и $C_2$ будет иметь вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \frac{1}{\pi}\left[2\exp(-\nu_1 \mathrm{Fo})\sin(\pi\xi) + \right.$$
$$\left. + \exp(-\nu_2 \mathrm{Fo})\sin(2\pi\xi)\right]. \qquad (29)$$

Решение (29) точно удовлетворяет уравнению (6) и граничным условиям (8), (9) и приближенно – начальному условию (7). Причина точного выполнения уравнения (6) объясняется выполнением ДГУ (12)–(14), что эквивалентно его выполнению на границах области (в предельном смысле – правая и левая части уравнения при подстановке в него решения (29) равны нулю).

Анализ расчетов по формуле (29) показал, что при $0{,}1 \le \mathrm{Fo} < \infty$ их расхождение с точным решением [2] не превышает $2\,\%$.

В третьем приближении, подставляя (11) в (10) и (14) (при $i = 1, 2$), получаем:

$$b_1(q) = -\frac{1}{24\pi^5}(q'' + 13\pi^2 q' + 36\pi^4 q);$$
$$b_2(q) = -\frac{1}{30\pi^5}(q'' + 10\pi^2 q' + 9\pi^4 q); \qquad (30)$$
$$b_3(q) = -\frac{1}{120\pi^5}(q'' + 5\pi^2 q' + 4\pi^4 q).$$

Уравнение для $q(\mathrm{Fo})$ будет иметь вид

$$q''' + 14\pi^2 q'' - 49\pi^4 q' + 36\pi^6 q = 0, \qquad (31)$$

где $q''' = d^3 q / d\mathrm{Fo}^3$.

Находим решение уравнения (31):

$$q(\mathrm{Fo}) = C_1 \exp(-\nu_1 \mathrm{Fo}) +$$
$$+ C_2 \exp(-\nu_2 \mathrm{Fo}) + C_3 \exp(-\nu_3 \mathrm{Fo}), \qquad (32)$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ – постоянные интегрирования; $\nu_k = k^2\pi^2$, ($k$ = 1,2,3) – собственные числа, равные точным их значениям [2].

Соотношение (11) в третьем приближении принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = -\frac{1}{6\pi}\left[6C_1 e^{-\pi^2 Fo}\sin(\pi\xi) + \right.$$
$$\left. + 3C_2 e^{-4\pi^2 Fo}\sin(2\pi\xi) - 2C_3\, e^{-9\pi^2 Fo}\sin(3\pi\xi)\right]. \qquad (33)$$

Постоянные интегрирования, определяемые методом наименьших квадратов для 100 точек области, до третьего знака после запятой совпадают с точными значениями [2], определяемыми по соотношению

$$C_k = 2(-1)^k, \quad (k = 1, 2, 3). \qquad (34)$$

С учетом $C_k$ решение задачи в третьем приближении будет иметь вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 2\left[\frac{1}{\pi}e^{-\pi^2 \mathrm{Fo}}\sin(\pi\xi) + \frac{1}{2\pi}e^{-4\pi^2 \mathrm{Fo}}\sin(2\pi\xi) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3\pi}e^{-9\pi^2 \mathrm{Fo}}\sin(3\pi\xi)\right]. \qquad (35)$$

Отметим, что в диапазоне $0{,}05 \le \mathrm{Fo} < \infty$ температуры, определяемые по (35), практически совпадают с точными их значениями [2].

Аналогично было получено решение в четвертом приближении:

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \frac{2}{\pi}\left[e^{-\pi^2 \mathrm{Fo}}\sin(\pi\xi) + \frac{1}{2}e^{-4\pi^2 \mathrm{Fo}}\sin(2\pi\xi) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}e^{-9\pi^2 \mathrm{Fo}}\sin(3\pi\xi) + \frac{1}{4}e^{-16\pi^2 \mathrm{Fo}}\sin(4\pi\xi)\right]. \qquad (36)$$

Анализируя формулы (23), (28), (35), (36), можно отметить, что формирование их членов подчиняется закономерности, позволяющей записать общую формулу:

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{4}\frac{2}{k\pi}\exp(-k^2\pi^2 \mathrm{Fo})\sin(k\pi\xi). \qquad (37)$$

Формула (37) при $n \to \infty$ совпадает с классическим точным аналитическим решением задачи (6)–(9) [2]:

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(-\nu_k^2 \mathrm{Fo}) \sin(\nu_k \xi), \qquad (38)$$

где

$$\nu_k = k\pi; \ A_k = 2/\nu_k. \qquad (39)$$

Приближение к точным значениям коэффициентов $A_k$ связано с числом точек аппроксимации начального условия методом наименьших квадратов.

Результаты расчетов по формуле (37) приведены на рис. 2. Их анализ позволяет заключить, что при $n = 1000$ полученные результаты практически совпадают с точным решением [2] в диапазоне $10^{-6} < \mathrm{Fo} < \infty$.

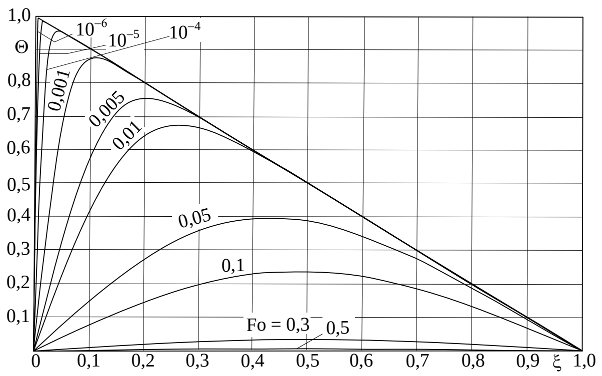


Рис. 2. Распределение температуры. Расчет по формуле (37) при $n$ = 1000

**Результаты.** Разработана методика нахождения аналитического решения задачи теплопроводности при линейном изменении начального условия, основанная на введении ДГУ и ДИФ. ДГУ приводят к удовлетворению уравнения на границах, что позволяет выполнить его и внутри области, исключив интегрирование по декартовой переменной. Использование ДИФ позволяет свести уравнение в частных производных к обыкновенному уравнению относительно временно́й переменной, из решения которого находятся собственные числа краевой задачи.

Постоянные интегрирования находятся путем выполнения начального условия методом наименьших квадратов, позволяющим находить их значения с заданной точностью. Преимущество такого способа их определения заключается в отсутствии необходимости нахождения интегралов в пределах $0 \le \xi \le 1$ в целях выполнения начального условия. Другим важным преимуществом этого способа является простота выполнения начального условия при любом законе его изменения по координате.

Рассмотренный метод позволяет избежать определения сложных интегралов при выполнении дифференциального уравнения и начального условия, максимально арифметизируя процессы их выполнения при сохранении аналитической формы решения.

Достоверность результатов обосновывается сравнением с известным точным аналитическим решением, которое показало их полное совпадение.

Новизна состоит в разработке метода решения краевой задачи теплопроводности для пластины с переменным начальным условием, эквивалентного точному. Метод отличается простотой реализации и особенно при нахождении собственных чисел и выполнении начальных условий.

**Выводы.** Совокупность полученных результатов обеспечивает достижение цели исследований, заключающейся в разработке нового метода получения точного аналитического решения задачи теплопроводности для неограниченной пластины с переменным по координате начальным условием.

Научная ценность исследований состоит в разработке нового подхода к определению собственных чисел, являющегося более простым по сравнению с классическими методами их нахождения при одинаковой точности.

Практическая ценность состоит в исключении процессов определения сложных интегралов при выполнении уравнения и начального условия краевой задачи, что позволяет существенно упростить использование полученного решения в инженерных приложениях.

### Список литературы

1. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. шк., 2001. – 550 с.

2. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.

3. **Беляев Н.М., Рядно А.А.** Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1978. – 328 с.

4. **Био М.** Вариационные принципы в теории теплообмена. – М.: Энергия, 1975. – 208 с.

5. **Глазунов Ю.Т.** Вариационные методы. – М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 470 с.

6. **Гудмен Т.** Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена: сб. науч. тр. – М.: Атомиздат, 1967. – С. 41–96.

7. **Модели** термомеханики с конечной и бесконечной скоростью распространения теплоты / И.В. Кудинов, А.В. Еремин, К.В. Трубицын, Е.В. Стефанюк. – М.: Проспект, 2020. – 244 с.

8. **Аналитические** методы теплопроводности / В.А. Кудинов, Б.В. Аверин, Е.В. Стефанюк, С.А. Назаренко. – Самара: СамГТУ, 2004. – 209 с.

9. **Стефанюк Е.В., Кудинов В.А.** Получение приближенных аналитических решений при рассогласовании начальных и граничных условий в зада-

чах теории теплопроводности // Известия вузов. Математика. – 2010. – № 4. – С. 63–71.

10. **Кудряшов Л.И., Меньши́х Н.Л.** Приближенные решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Машиностроение, 1979. – 232 с.

11. **Кудинов И.В., Котова Е.В., Кудинов В.А.** Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2019. – Т. 22, № 2. – С. 153–165.

12. **Федоров Ф.М.** Граничный метод решения прикладных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 2000. – 220 с.

## References

1. Kartashov, E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001. 550 p.

2. Lykov, A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of thermal conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p.

3. Belyaev, N.M., Ryadno, A.A. *Metody nestatsionarnoy teploprovodnosti* [Methods of non-stationary heat conduction]. Moscow: Vysshaya shkola, 1978. 328 p.

4. Bio, M. *Variatsionnye printsipy v teorii teploobmena* [Variational principles in the theory of heat transfer]. Moscow: Energiya, 1975. 208 p.

5. Glazunov, Yu.T. *Variatsionnye metody* [Variational methods]. Moscow; Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika»; Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2006. 470 p.

6. Gudmen, T. Primenenie integral'nykh metodov v nelineynykh zadachakh nestatsionarnogo teploobmena [Application of integral methods in non-linear problems of non-stationary heat transfer]. *Sbornik nauchnykh trudov «Problemy teploobmena»* [Collection of scientific proceedings “Problems of heat transfer”]. Moscow: Atomizdat, 1967, pp. 41–96.

7. Kudinov, I.V., Eremin, A.V., Trubitsyn, K.V., Stefanyuk, E.V. *Modeli termomekhaniki s konechnoy i beskonechnoy skorost'yu rasprostraneniya teploty* [Models of thermomechanics with finite and infinite velocity of heat propagation]. Moscow: Prospekt, 2020. 244 p.

8. Kudinov, V.A., Averin, B.V., Stefanyuk, E.V., Nazarenko, S.A. *Analiticheskie metody teploprovodnosti* [Analytical methods of thermal conductivity]. Samara: SamGTU, 2004. 209 p.

9. Stefanyuk, E.V., Kudinov, V.A. Poluchenie priblizhennykh analiticheskikh resheniy pri rassoglasovanii nachal'nykh i granichnykh usloviy v zadachakh teorii teploprovodnosti [Obtaining approximate analytical solutions when the initial and boundary conditions are mismatched in problems of the theory of heat conduction]. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2010, no. 4, pp. 63–71.

10. Kudryashov, L.I., Men'shíkh, N.L. *Priblizhennye resheniya nelineynykh zadach teploprovodnosti* [Approximate solutions of nonlinear problems of heat conduction]. Moscow: Mashinostroenie, 1979. 232 p.

11. Kudinov, I.V., Kotova, E.V., Kudinov, V.A. Metod polucheniya analiticheskikh resheniy kraevykh zadach na osnove opredeleniya dopolnitel'nykh granichnykh usloviy i dopolnitel'nykh iskomykh funktsiy [A method for obtaining analytical solutions to boundary value problems based on the determination of additional boundary conditions and additional desired functions]. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki*, 2019, vol. 22, no. 2, pp. 153–165.

12. Fedorov, F.M. *Granichnyy metod resheniya prikladnykh zadach matematicheskoy fiziki* [Boundary method for solving applied problems of mathematical physics]. Novosibirsk: Nauka, 2000. 220 p.