

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕХНИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

УДК 621.311.22

Владимир Павлович Жуков

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45,
e-mail: zhukov-home@yandex.ru

Антон Николаевич Беляков

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45,
e-mail: ab_pm@mail.ru

Сергей Дмитриевич Горшенин

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», кандидат технических наук, заведующий кафедрой тепловых электрических станций, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-99-34,
e-mail: admin@tes.ispu.ru

Сергей Андреевич Смирнов

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», аспирант кафедры прикладной математики, Россия, Иваново, телефон (4932) 26-97-45,

Моделирование колебательного движения пузырька газа в слое жидкости

Авторское резюме

Состояние вопроса. Тепловые и химические процессы в газожидкостных реакторах часто реализуются при сложном характере движения компонентов, который во многом определяет время процесса, площадь контакта фаз и, соответственно, эффективность и скорость протекания тепловых и химических процессов в технологических установках. Особый интерес у исследователей вызывают наблюдаемые в опытах колебания скорости движения пузырьков газа в газожидкостных реакторах, которые существенным образом влияют на эффективность и продолжительность анализируемых процессов. В связи с этим разработка моделей движения пузырьков газа в слое жидкости, учитывающих колебания скорости, представляется актуальной задачей с точки зрения совершенствования анализируемых процессов.

Материалы и методы. Постановка и решение задачи динамики движения выполнены на основе дифференциальных уравнений движения пузырьков и методов решения этих уравнений.

Результаты. Построена модель движения пузырьков газа в слое жидкости, в которой пузырек пара представлен совокупностью двух подсистем, одна из которых совершает поступательное, а вторая – колебательное движение. В результате решения дифференциальных уравнений движения подсистем получены и исследованы зависимости скорости движения пузырьков газа от времени в активной зоне реактора. На базе полученных решений разработаны рекомендации для повышения эффективности тепломассообменных процессов в газожидкостных реакторах.

Выводы. Для тестирования, совершенствования и практического использования полученных результатов необходима организация обмена актуальными данными измерительных приборов автоматической системы управления технологическими процессами реального объекта с предложенной компьютерной системой.

Ключевые слова: газожидкостный реактор, уравнение движения, межфазная поверхность, теплообмен, массообмен, математическая модель движения пузырьков газа

Vladimir Pavlovich Zhukov

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences, (Post-doctoral degree), Professor of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45, e-mail: zhukov-home@yandex.ru

Anton Nikolaevich Belyakov

Ivanovo State Power Engineering University, Doctor of Engineering Sciences, (Post-doctoral degree), Head of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45, e-mail: ab_pm@mail.ru

Sergei Dmitrievich Gorshenin

Ivanovo State Power Engineering University, Candidate of Engineering Sciences, (PhD), Head of Thermal Power Plants Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-99-34, e-mail: admin@tes.ispu.ru

Sergey Andreevich Smirnov

Ivanovo State Power Engineering University, Postgraduate Student of Applied Mathematics Department, Russia, Ivanovo, telephone (4932) 26-97-45

Modeling the oscillatory motion of a gas bubble in a liquid layer

Abstract

Background. Thermal and chemical processes in gas-liquid reactors often involve complex nature of the movement of components, which largely determines the process time, the contact area of the phases and, consequently, the efficiency and speed of thermal and chemical processes in processing installations. Special attention should be paid to the fluctuation in the velocity of gas bubbles in gas-liquid reactors observed in experiments, which significantly affect the efficiency and duration of the analyzed processes. In this regard, the development of models of the movement of gas bubbles in a liquid layer, taking into account velocity fluctuations is an urgent task from the point of view of improving the analyzed processes.

Materials and methods. The formulation and solution of the problem of dynamics of oscillatory motion are based on differential equations of bubbles motion and methods for their solution.

Results. A model of the movement of gas bubbles in a liquid layer has been developed, in which a vapor bubble is represented by a set of two subsystems, one of which performs translational motion, and the other – oscillatory motion. As a result of solving the differential equations of motion of subsystems, the dependences of the velocity of gas bubbles on time in the reactor core have been obtained and studied. Based on the obtained solutions, recommendations have been developed to improve the efficiency of heat and mass transfer processes in gas-liquid reactors.

Conclusions. To test, improve and practically use the obtained results, it is necessary to organize the exchange of up-to-date data of measuring devices of the automated control system of a real object with the proposed computer system.

Key words: gas-liquid reactor, equation of motion, interfacial surface, heat exchange, mass transfer, mathematical model of gas bubble motion

DOI: 10.17588/2072-2672.2025.6.079-085

Введение. Анализ процессов совместного движения потоков газа и жидкости в технологическом оборудовании привлекает внимание исследователей как с научной [1–3], так и с практической [4–7] точки зрения. Это связано в первую очередь с реализацией этих процессов как в различных энергетических установках, так и в оборудовании смежных отраслей промышленности. Исследования данных процессов во многом сдерживаются сложным характером совместного движения фаз: движением пузырьков газа в жидкости. Возможный фазовый переход в потоках теплоносителей, обусловленный испарением жидкости или конденсацией пара, существенно усложняет описание движения компонентов. В первую очередь это связано с тем, что фазовый переход существенным образом (на два–три порядка) изменяет объем теплоносителей, следовательно, скорости их движения и

время пребывания компонентов в активной зоне реактора. Для обеспечения эффективного управления процессом и для оптимизации режимов работы технологических систем исследование совместного движения многофазных сред является, безусловно, актуальной задачей.

Одним из наиболее типичных примеров совместного движения многофазных потоков в энергетических установках является процесс всплытия пузырьков пара или газа в слое жидкости. Данный процесс реализуется в экранных трубах и барабанах паровых котлов, в барботажных ступенях деаэраторов и смешивающих подогревателях. Вопросам аналитического и численного моделирования свободного всплытия пузырьков газа посвящены многочисленные исследования отечественных и зарубежных авторов [1, 2, 8, 9]. Следует отметить, что при всплытии пузырьков малого диаметра сохраняется их

сферическая форма, в то время как большие пузырьки могут приобретать эллипсоидальную или более сложную форму. По мере того как пузырек деформируется, начинает появляться неустойчивость, выражающаяся в зигзагообразной или спиралеобразной траектории движения пузырька. В области построения численных методов описания движения пузырьков достигнуты существенные успехи, что позволяет моделировать определенный класс таких течений. Однако до сих пор универсальной вычислительной методологии моделирования не выработано. Это во многом связано с различными методиками проведения экспериментальных исследований и с определением границ применения допущений, используемых при теоретических выводах.

Следует отметить, что численные методы часто требуют определенного программного обеспечения, к которому в последнее время доступ ограничен. В связи с этим задачи построения отечественных моделей и разработки доступных программных средств приобретают особую актуальность. Важно отметить, что сложность описания и численного решения представленных моделей должна обеспечивать получение решения с заданной точностью за приемлемое время.

Наряду с задачами прямого расчета технологических систем особую актуальность в последнее время приобретает обратные задачи диагностики [10], позволяющие оперативно определять отклонения в работе оборудования от номинальных режимов.

Методы исследования. Для разработки, описания и диагностики анализируемой системы предлагается в качестве рабочего инструмента использовать постановку и решение прямых и обратных задач диагностики [10]. Под прямыми задачами в общем случае понимаются задачи, для которых заданы причины, а искомыми величинами являются следствия. Обратными будут задачи, в которых известны следствия, а неизвестными выступают причины. Под прямыми задачами динамики движения пузырьков в нашем случае понимается определение скорости движения и времени всплытия этих пузырьков в слое жидкости, а под обратными задачами – определение параметров модели или диагностика возможных неисправностей системы при заданных параметрах теплоносителей на входе и выходе. Следует отметить, что набор заданных параметров для каждой конкретной установки может различаться, что обуславливает возможные вариации в постановке обратной задачи.

Результаты исследования. Целью настоящего исследования является описание в одномерной постановке прямой и обратной задач колебательного движения пузырька газа при всплытии в неподвижном слое жидкости применительно к энергетическим теплообменным аппаратам. Для достижения цели предполагается решение следующих задач:

1. Выбор системы моделирования в виде пузырька газа и представление этого пузырька совокупностью двух подсистем: одна из которых совершает колебательное движение, обусловленное поверхностными натяжениями оболочки и возможным изменением формы пузырька при всплытии; другая подсистема совершает поступательное движение, характерное для пузырьков правильной формы.

2. Построение моделей скоростей движения для двух выбранных подсистем и вычисление скорости системы через скорости ее подсистем.

3. Разработка алгоритма и программного модуля для решения прямой задачи динамики движения пузырька в слое жидкости. Идентификация и верификация модели посредством сравнения результатов расчета с данными других авторов и данными экспериментальных исследований.

4. Формулировка обратной задачи диагностики состояния системы по известным динамическим характеристикам ее подсистем.

Объект исследования и алгоритм его представления в виде двух подсистем с указанием действующих на подсистемы сил показан на рис. 1. Моделируемый пузырек газа (а) представляется в виде двух подсистем (б): подсистемой массой m_1 , совершающей колебательное движение (в), и подсистемой массой m_2 , совершающей поступательное движение (г).

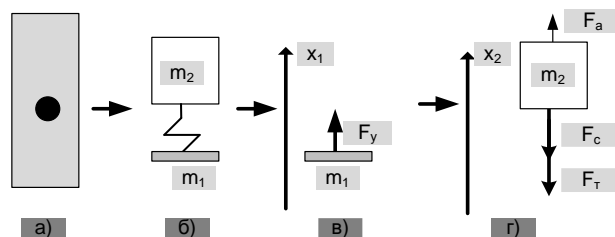


Рис. 1. Схема системы моделирования пузырька

Модель предлагаемой системы представлена совокупностью двух моделей ее подсистем: модель подсистемы, совершающей колебательное движение массой m_1 (первый пузырек), и модель подсистемы, совершающей поступательное движение массой m_2 (второй пузырек).

При построении модели движения для первой колебательной подсистемы считается, что тело массой m_1 находится в положении равновесия, а отклонение от этого положения равновесия сопровождается возникновением силы упругости, которая обуславливается деформацией оболочки и которая стремится вернуть этот пузырек в положение равновесия:

$$F_y = -k_1 x_1.$$

Физическая природа силы упругости обуславливается деформацией оболочки пузырька при движении. В первом приближении при построении модели считается, что сила упругости

линейно зависит от смещения из положения равновесия и определяется деформацией оболочки пузырька при движении. При этом сам механизм деформации и изменение формы пузырька подробно не рассматривается, а описывается интегральной линейной силой упругости. Для описания одномерного движения подсистемы первого пузырька выбрана вертикальная ось координат x_1 , направление которой показано на рис. 1. На пузырек действует сила упругости, направленная к положению равновесия или к точке, в которой сила упругости равна нулю. Движение подсистемы в этом случае описывается дифференциальным уравнением вида [11]

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{k_1 x_1}{m_1}, \quad (1)$$

где x_1 – координата первого пузырька; t – время процесса; m_1 – масса пузырька; k_1 – коэффициент эффективной жесткости, которая определяется упругостью оболочки пузырька.

Решение (1) записывается в виде [11]

$$x_1 = A_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

где $\omega = \sqrt{k_1 / m_1}$ – частота колебаний; A_0 , φ – амплитуда колебаний и начальная фаза, которые определяются из начальных условий $t = 0$, $x = x_0$, $v = v_0$:

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}};$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\omega x_0}{v_0}.$$

Скорость первого пузырька выражается через первую производную координаты по времени:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = A_0 \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi). \quad (3)$$

При описании динамики второй подсистемы, участвующей в поступательном движении, считается, что на тело действуют сила Архимеда, сила сопротивления и сила тяжести. Сила Архимеда (F_A), равная весу вытесненной жидкости, записывается в виде

$$F_A = V_2 \rho_{\text{ж}} g,$$

где V_2 – объем пузырька; g – ускорение свободного падения; $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости.

Линейная сила сопротивления (F_C), действующая на пузырек со стороны жидкости, направленная в противоположную сторону от направления движения, представляется в виде [12]

$$F_C = -S k_2 v_2,$$

где v_2 – скорость пузырька; S – поперечное сечение пузырька; k_2 – коэффициент сопротивления.

Сила тяжести (F_T) в выбранной системе координат описывается следующим образом:

$$F_T = -g m_2.$$

Уравнение второго закона Ньютона после его деления на массу записывается в виде

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{F_A}{m_2} - \frac{F_C}{m_2} - g, \quad (4)$$

где x_2 – координата второй подсистемы, или пузырька массой m_2 .

Уравнение (4) после замены второй производной координаты по времени на первую производную скорости по времени преобразуется к виду

$$\frac{dv_2}{dt} = a - b v_2, \quad (5)$$

где постоянные коэффициенты a и b вычисляются по выражениям:

$$a = \frac{\rho_{\text{ж}} g}{\rho_r} - g;$$

$$b = \frac{k_2 S}{m_2},$$

где ρ_r – плотность газа.

Решение уравнения (5) при начальных условиях

$$v_2|_{t=0} = v_{20}$$

записывается в виде

$$v_2(t) = \frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b} - v_{20} \right) \exp(-bt). \quad (6)$$

Зная скорость движения и массу каждой подсистемы, скорость системы находится с учетом скорости движения первой подсистемы относительно второй подсистемы по формуле [13]

$$v = \frac{(v_1 + v_2) m_1 + v_2 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (7)$$

Координата центра масс системы определяется по известным координатам подсистем [13]:

$$x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (8)$$

На основании разработанной математической модели движения (3), (6)–(8) для расчета скорости и координаты пузырька в слое жидкости предложен специальный алгоритм (рис. 2). Представленный алгоритм реализован в программном пакете на языке Matlab. Расчетный пример по предложенной модели скорости движения пузырька выполнен для следующих исходных данных: плотность жидкости $\rho_{\text{ж}} = 1000 \text{ кг/м}^3$; плотность пара $\rho_r = 1 \text{ кг/м}^3$; ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Ввод исходных данных
Расчет скорости колебательного движения (3)
Расчет скорости поступательного движения (6)
Расчет скорости (7) и координаты (8) пузырька
Вывод результатов расчета

Рис. 2. Алгоритм расчета скорости движения и координаты пузырька в слое жидкости

Результаты расчетных исследований, проведенных согласно представленному на рис. 2 алгоритму, приведены на рис. 3 в виде зависимости скорости движения пузырька при всплытии от времени.

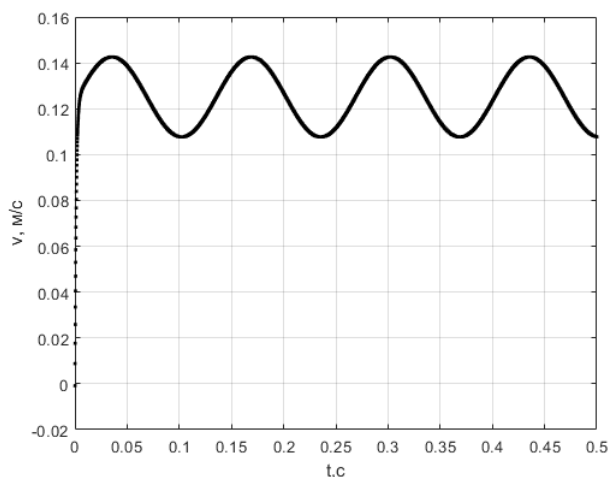


Рис. 3. Расчетная зависимость скорости движения пузырька при всплытии от времени

Анализ полученных результатов (рис. 3) показывает, что разработанная модель позволяет описывать колебание скорости пузырька в слое жидкости. Следует отметить, что предложенная модель позволила определить частоту колебания скорости пузырька, которая совпала с опубликованными результатами других авторов [1], что является подтверждением правильности заложенных в представленную модель допущений.

Для демонстрации прогностических возможностей разработанной модели на рис. 4, 5 представлены результаты расчетных исследований.

На рис. 4 представлена расчетная зависимость максимальной скорости движения пузырька 1 и амплитуды колебания его скорости 2 от соотношения масс пузырьков рассматриваемых подсистем. Следует отметить, что увеличение массы пузырька, согласно полученным результатам, приводит к увеличению скорости пу-

зырька при всплытии, что согласуется с многочисленными данными экспериментальных исследований, приведенными на рис. 6. При этом найденная по результатам расчетов амплитуда колебания скорости с ростом массы пузырька уменьшается.

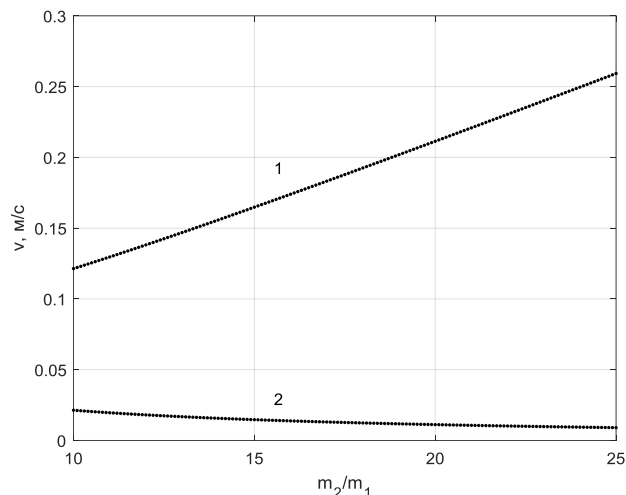


Рис. 4. Расчетные зависимости максимальной скорости движения (1) и амплитуды колебания скорости A_0 (2) пузырька от соотношения масс пузырьков рассматриваемых подсистем

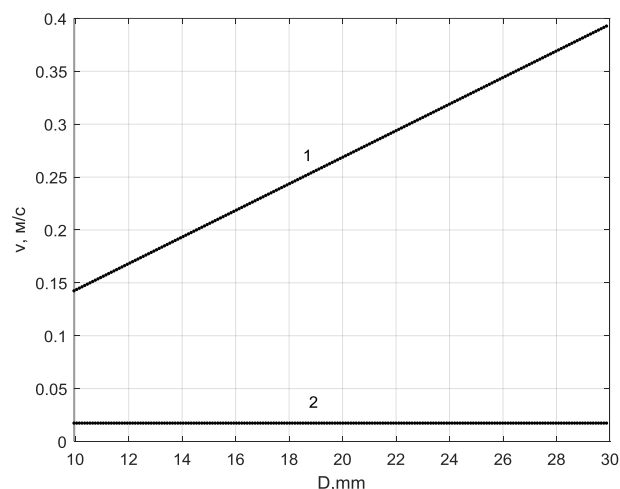


Рис. 5. Расчетная зависимость максимальной скорости движения пузырька (1) и амплитуды колебания скорости A_0 (2) от диаметра пузырька

На рис. 5 представлена расчетная зависимость максимальной скорости движения пузырька 1 и амплитуды колебания скорости 2 от диаметра пузырька. Следует отметить, что увеличение размера пузырька также приводит к увеличению скорости всплытия, однако амплитуда колебания скорости, в отличие результатов, приведенных на рис. 4, практически не меняется.

Идентификация и верификация модели проведены косвенно, посредством сравнения полученных результатов с результатами экспериментальных данных, представленными на

рис. 6. Результаты экспериментальных исследований по определению зависимости установившейся скорости всплытия пузырьков от их размера получены разными авторами [8, 9]. Анализ приведенных данных свидетельствует о существенном разбросе результатов и, следовательно, о наличии возможных неучтенных факторов при проведении экспериментов. Следует отметить, что рассчитанные значения, полученные в рамках предложенной одномерной модели (3)–(7), находятся в интервале варьирования приведенных экспериментальных данных, что является подтверждением адекватного описания моделью экспериментальных результатов, а также свидетельствует о необходимости дальнейшего проведения расчетных и экспериментальных исследований с уточнением факторов и условий проведения испытаний.

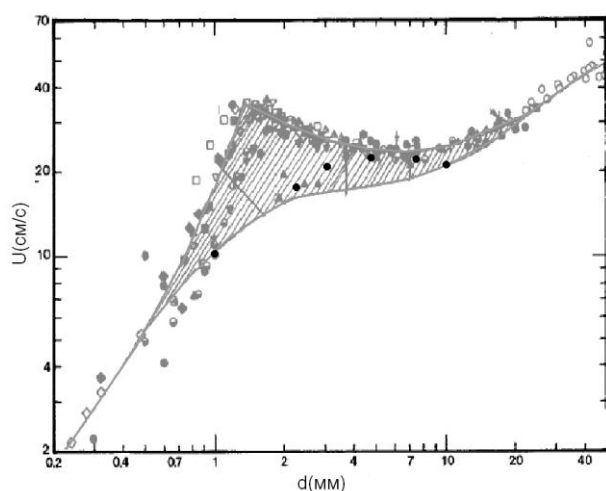


Рис. 6. Результаты экспериментальных исследований по определению установившейся скорости всплытия пузырьков в зависимости от размера пузырьков [8, 9]

Найденное решение прямой задачи колебательного движения пузырька в слое жидкости позволяет перейти к постановке и решению обратной задачи диагностики состояния теплообменных систем с двухфазным течением потоков. В данном случае предлагается в качестве диагностического признака использовать частоту колебаний скорости пузырька. При этом причины отклонения значений частоты от нормативных планируется диагностировать с использованием представленного математического описания.

Выводы. Разработанная одномерная математическая модель движения пузырьков газа в неподвижном слое жидкости, описывающая колебание скорости пузырька при всплытии, и полученные в результате ее решения характеристики движения пузырьков газа в реакторе позволяют управлять эффективностью основных процессов в установке.

Проведенная проверка адекватности модели показала качественно верное описание

характера движения пузырьков в рассмотренном диапазоне варьирования параметров.

Для тестирования, совершенствования и практического использования полученных результатов необходима организация обмена актуальными данными измерительных приборов автоматической системы управления технологическими процессами (АСУТП) реального объекта с предложенной компьютерной системой.

Предложенный подход к решению прямой задачи описания колебательного движения пузырька в слое жидкости позволяет ставить и решать обратные задачи диагностики состояния теплообменных систем с двухфазными потоками.

Список литературы

1. **Численное** моделирование свободного всплытия пузырька воздуха/ А.С. Козелков, А.А. Куркин, В.В. Курулин и др. // Изв. РАН. МЖГ. – 2016. – № 6. – С. 3–14.
2. **Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С.** Экспериментальное исследование нестационарных режимов всплытия одиночного пузырька // Инж.-физ. журн. – 2013. – Т. 86, № 5. – С. 1097–1106.
3. **Жуков В.П., Барочкин Е.В.** Системный анализ энергетических теплообменных установок. – Иваново, 2009. – 176 с.
4. **Справочник по теплообменникам:** в 2 т. Т. 1: пер. с англ. / под ред. О.Г. Мартыненко и др. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 560 с.
5. **Исаченко В.П.** Теплообмен при конденсации. – М.: Энергия, 1977. – 240 с.
6. **Рыжкин В.Я.** Тепловые электрические станции. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 328 с.
7. **Калатузов В.А., Павлов В.А.** Расчет ограничений электрической мощности ТЭЦ, связанного с работой систем циркуляционного водоснабжения // Электрические станции. – 1987. – № 4. – С. 18–22.
8. **Talaia M.A.R.** Terminal velocity of a bubble rise in a liquid column // International Journal of Mathematical, Computational, Physical and Quantum Engineering. – 2007. – Vol. 1, No. 4.
9. **Clift R., Grace J.R., Weber M.E.** Bubbles, drops and particles. – 1 ed. – London: Academic Press, 1978.
10. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.
11. **Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.** Курс теоретической механики. Т. 2. – М.: Наука, 1983. – 640 с.
12. **Процессы и аппараты химической технологии.** Т. 2. Механические и гидромеханические процессы / под ред. А.М. Кутепова. – М.: Логос, 2001. – 600 с.
13. **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей. – М.: Высш. шк., 2006. – 575 с.

References

1. Kozelkov, A.S., Kurkin, A.A., Kurulin, V.V., Lashkin, S.V., Tarasova, N.V., Tyatyushkina, E.S. Chislennoe modelirovanie svobodnogo vsplytiya puzyr'ka vozdukh [Numerical modeling of free ascent of an air bubble]. *Izvestiya RAN. MZhG*, 2016, no. 6, pp. 3–14.
2. Arkhipov, V.A., Vasenin, I.M., Usanina, A.S. Experimental'noe issledovanie nestatsionarnykh rezhimov

vsplytiya odinochnogo puzyr'ka [Experimental investigation of unsteady modes of ascent of a single bubble]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2013, vol. 86, no. 5, pp. 1097–1106.

3. Zhukov, V.P., Barochkin, E.V. *Sistemnyy analiz energeticheskikh teplomassoobmennyykh ustanovok* [System analysis of energy heat and mass exchange plants]. Ivanovo, 2009. 176 p.

4. Martynenko, O.G. (ed.) *Spravochnik po teploobmennikam v 2 t., t. 1* [Handbook of heat exchangers: in 2 vols., vol. 1]. Moscow: Energoatomizdat, 1987. 560 p.

5. Isachenko, V.P. *Teploobmen pri kondensatsii* [Heat exchange during condensation]. Moscow: Energiya, 1977. 240 p.

6. Ryzhkin, V.Ya. *Teplovye elektricheskie stantsii* [Thermal power plants]. Moscow: Energoatomizdat, 1987. 328 p.

7. Kalatuzov, V.A., Pavlov, V.A. Raschet ogranicheniy elektricheskoy moshchnosti TETs, svyazannogo s rabotoy sistem tsirkulyatsionnogo vodosnabzheniya [Calculation of the limitations of the electric power of the CHP plant associated with the operation of circulating

water supply systems]. *Elektricheskie stantsii*, 1987, no. 4, pp. 18–22.

8. Talaia, M.A.R. Terminal velocity of a bubble rise in a liquid column. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical and Quantum Engineering*, 2007, vol. 1, no. 4.

9. Clift, R., Grace, J.R., Weber, M.E. Bubbles, drops and particles. London: Academic Press, 1978.

10. Samarskiy, A.A., Vabishchevich, P.N. *Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* [Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics]. Moscow: Izdatel'stvo LKI, 2009. 480 p.

11. Loytsyanskiy, L.G., Lur'e, A.I. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki. T. 2* [Course of theoretical mechanics. Vol. 2]. Moscow: Nauka, 1983. 640 p.

12. Kutepov, A.M. (ed.) *Protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii. T. 2. Mekhanicheskie i gidromekhanicheskie protsessy* [Processes and apparatuses of chemical technology. Vol. 2. Mechanical and hydromechanical processes]. Moscow: Logos, 2001. 600 p.

13. Venttsel', E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow: Vysshaya shkola, 2006. 575 p.