

Численно-аналитический метод расчета температурного поля полуограниченного тела, аппроксимированного степенными функциями

А.К. Соколов^{1,2}, Е.В. Сергашов², О.А. Якубина³

¹ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», г. Иваново, Российская Федерация

²ФГБОУВПО «Ивановский институт ГПС МЧС России», г. Иваново, Российская Федерация

³ОАО «Зарубежэнергопроект», г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: sokolov@bjd.ispu.ru, sergashov2015@mail.ru, os_flora@mail.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: В начальной стадии нагрева твердые тела, участвующие в теплообмене с газовой или жидкой средой, рассматриваются как полуограниченные тела, в которых температура изменяется только в поверхностном слое. Расчет температурных полей этих тел численными методами представляет определенные трудности, так как толщина этого слоя изменяется во времени. Представляется актуальной разработка простых в использовании численно-аналитических методов.

Материалы и методы: Для решения дифференциального уравнения теплопроводности используется численный метод конечных разностей и численно-аналитический метод.

Результаты: Показана методика замены решения дифференциального уравнения теплопроводности с частными производными численным решением обыкновенного дифференциального уравнения. При этом значительно упрощается процедура расчета за счет использования полученного аналитического решения для расчетного интервала времени. Получены формулы для расчета температур прогретого слоя в конце интервала времени в зависимости от граничных условий теплообмена. Разработана оригинальная методика решения обыкновенного дифференциального уравнения при высоких скоростях роста температуры обогреваемой поверхности для материалов с низкой теплопроводностью. Проведены расчеты для оценки эффективности метода расчета. Предложен сравнительно простой численно-аналитический метод расчета температурных полей полуограниченных тел.

Выводы: Проведенное исследование показывает, что температуры, рассчитанные этим методом для принятых условий теплообмена, практически не отличаются от температур, найденных более трудоемким методом конечных разностей.

Ключевые слова: температурное поле, теплообмен, полуограниченное тело, численно-аналитический метод.

Numerical and analytical method of semi-limited body temperature field calculation approximated by power functions

A.K. Sokolov^{1,2}, E.V. Sergashov², O.A. Yakubina³

¹ Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation

² Ivanovo institute of the state fire service, Ivanovo, Russian Federation

³ОАО «Zarubegenergoproekt», Ivanovo, Russian Federation
E-mail: sokolov@bjd.ispu.ru, sergashov2015@mail.ru, os_flora@mail.ru

Abstract

Background: At the initial heating stage, solid bodies participating in heat exchange with the gas or liquid environment are considered to be semi-limited bodies in which only the blanket temperature changes. Calculation of temperature fields of these bodies by numerical methods presents certain difficulties as the thickness of this layer changes with time. Therefore, an urgent task is to develop easy to use numerical and analytical methods.

Materials and methods: The heat conductivity differential equation is solved by numerical finite-difference and numerical and analytical methods.

Results: The paper describes a calculation method that allowed us to use a numerical solution to an ordinary differential equation instead of solving a heat conductivity differential equation. This makes the calculation procedure much simpler by using the obtained analytical solution to calculate the time interval. We have derived formulae to calculate heated-up layer temperatures at the end of the time interval depending on boundary conditions of heat exchange. We have also developed an original technique of solving ordinary differential equation at fast heated surface temperature growth for low conductivity materials and estimated the calculation method efficiency. A rather simple numerical and analytical method has been suggested to calculate temperature fields of semi-limited bodies.

Conclusions: The research has shown that temperatures calculated by this method for the accepted heat exchange conditions are practically equal to those determined by a more labor-consuming finite-difference method.

Key words: temperature field, heat exchange, semi-limited body, numerical and analytical method.

Полуограниченными телами, в которых температура при теплообмене с внешней средой изменяется только в поверхностном слое, счита-

ются твердые тела в начальной стадии нагрева или охлаждения. Толщина слоя, в котором температуры отличаются от начальных значений,

изменяется во времени. Такие поля наблюдаются в материалах энергетического оборудования, в ограждениях помещений при изменении условий теплообмена на границах тел. Распределение температур при существенных изменениях интенсивности теплообмена характеризуется большими градиентами температур, которые вызывают термические напряжения, приводящие к разрушению материалов.

Расчеты температурных полей в полуограниченных телах необходимы при разработке безопасных режимов разогрева конструкций и при определении теплоты аккумулированной ограждениями при изменении режима отопления помещений или смене погодных условий.

Аналитические решения для расчета температурных полей даны в [1, 2]. Номограммы, построенные на основе аналитических решений, приведены в [3]. Имеющиеся в литературе аналитические решения имеют ограниченную область применения, так как не позволяют учесть реальные условия теплообмена: зависимость теплофизических характеристик от температуры, радиационный перенос и др. Численные методы расчета температурных полей более универсальны, но требуют весьма трудоемких вычислений. Для снижения трудоемкости расчетов весьма актуально создание и исследование численно-аналитических методов [4–9].

Ниже предлагается развитие метода [8, 9] для расчета температурного поля полуограниченного тела. Применение сравнительно простого математического описания и алгоритма расчета численно-аналитическим методом значительно упростит решение дифференциального уравнения теплопроводности полуограниченного тела в сопряженных задачах теплообмена.

Математическое описание температурного поля основывается на подходе, предложенном в [8, 9 и др.]. Достоинства метода описаны в [8], среди них простота и наглядность, возможность учета тепловыделений, нелинейности граничных условий (радиационно-конвективного теплообмена), переменности теплофизических свойств, изменения размеров тел, а также возможность дальнейшего развития.

Суть метода состоит в следующем. Распределение температур по сечению тела в конце расчетного интервала времени $\Delta\tau$ аппроксимируется показательной функцией, параметры которой выражаются аналитически в зависимости от начальных и граничных условий температурного поля. Благодаря заранее полученным приближенным аналитическим решениям для расчетного интервала времени $\Delta\tau$, решение дифференциального уравнения теплопроводности с частными производными сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения численными методами.

Рассмотрим математическое описание одномерного температурного поля ограждения в виде

неограниченной пластины толщиной R_n , которая нагревается только с одной стороны $x = R_n$.

Запишем начальное

$$T(x, 0) = T_n, \quad 0 \leq x \leq R_n, \quad (1)$$

и граничные условия на поверхностях пластины:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, \tau) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x = R_n, \tau) \cdot \lambda = q, \quad (3)$$

где T_n – температура ограждения до начала нагрева, К; λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); q – удельный поток теплоты на поверхность ($x = R$); R_n – толщина пластины, м; τ – текущее время, с.

Примем, что распределение температур в момент времени τ_{i+1} аппроксимируется функцией [8, 9]

$$T(X) = a_0 + a_1 \cdot X^n, \quad 0 \leq X \leq 1, \quad (4)$$

где $X = x_t/R$, $0 \leq x_t \leq R$, x_t – текущее значение координаты, изменяющееся от $x_t = 0$ при $x = (R_n - R)$ до $x_t = R$ при $x = R_n$; R – наименьшая глубина поверхностного слоя ($R < R_n$), на которой температура остается практически неизменной и равной T_n пока R не достигнет величины R_n .

Принятая система с двумя координатами x и x_t , где $0 \leq x \leq R_n$ и $0 \leq x_t \leq R$, отличается от той, которая обычно применяется при описании температурного поля полуограниченного тела. Для полуограниченного тела обычно используется одна координата $0 \leq x < \infty$, где $x = 0$ на поверхности теплообмена.

Выбранная система координат позволит, не изменяя расчетные формулы, использовать их для описания температурного поля пластины, когда тело прогреется на всю толщину пластины (до $x = 0$) и учесть теплообмен с другой стороны пластины.

Значение R для конца расчетного интервала предлагается определять по числу Фурье $Fo_\tau = a \cdot \tau / R^2$:

$$R = \sqrt{a \cdot \tau / Fo_\tau}. \quad (5)$$

Число Фурье можно принимать постоянным для всех расчетных моментов времени, пока $R < R_n$, где a – температуропроводность, м²/с²; τ – текущее время, с, для конца интервала $i+1$ $\tau = \tau_{i+1}$.

Величина Fo_τ будет зависеть от динамики потока теплоты на поверхность тела q . Значение Fo_τ должно соответствовать условию $Fo_\tau \equiv \min(R)$, при котором $T(x_t = 0, \tau) \approx T_n$.

Приближенно величину Fo_τ можно определить по точному решению дифференциального уравнения теплопроводности для полуограниченного тела. При $q = \text{const}$ можно принять по номограмме [3] $Fo_\tau \approx 0,04$. В инженерных расчетах принято считать, что $Fo_\tau \approx 0,05$.

Для расчета температурного поля по (4) необходимо определить коэффициенты a_0 , a_1 и показатель степени n для $\tau_i = i \cdot \Delta\tau$ ($i = 1, 2, 3, \dots$).

Для определения a_0 , a_1 и n используем следующие уравнения.

1. Граничное условие в виде выражения (3), которое при $x = R$ и $X = 1$ с учетом функции (4) примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial X}(X = R_{i+1}, \tau) \cdot \lambda = \frac{\partial T}{\partial X}(X = 1, \tau) \cdot \lambda = \\ = n \cdot a_1 \cdot \lambda / R = q.$$

Из него можно выразить коэффициент a_1 для момента времени τ_{i+1} :

$$a_1 = q R_{i+1} / (\lambda n). \quad (6)$$

2. Уравнение баланса теплоты для прогретого слоя, которое запишем в следующем виде:

$$(T_{ср, i+1} - T_{ср, ни}) c \cdot R_{i+1} = q \cdot \Delta \tau, \quad (7)$$

где c – объемная теплоемкость, Дж/(м³·К); $T_{ср, ни}$ и $T_{ср, i+1}$ – среднемассовые температуры в начале и конце интервала времени $\Delta \tau$ для слоя толщиной R_{i+1} . Величина $T_{ср, ни}$ должна определяться по температуре $T_{ср, i}$ по формуле

$$T_{ср, ни} = T_{ср, i} R_i / R_{i+1} + T_n (R_{i+1} - R_i) / R_{i+1}. \quad (8)$$

Обратим внимание, что $T_{ср, i}$ (среднемассовая температура) в конце i -го интервала времени не равна среднемассовой температуре в начале $i+1$ интервала времени $T_{ср, ни}$, так как она относится к слою R_i , а среднемассовая температура в начале $i+1$ интервала времени $T_{ср, ни}$ – к расчетному слою R_{i+1} . Поэтому на $i+1$ интервале времени значение среднемассовой температуры в начале $i+1$ интервала времени должно определяться с учетом температуры T_n непрогретой части слоя ($R_{i+1} - R_i$).

Выражение для расчета среднемассовой температуры в конце интервала $T_{ср, i+1}$ можно получить интегрированием (4) [9]

$$T_{ср} = \int_0^1 T(X) dX = \int_0^1 (a_0 + a_1 \cdot X^n) dX = a_0 + a_1 / (n+1). \quad (9)$$

С учетом (9) уравнение баланса теплоты (8) запишется в виде

$$[a_0 + a_1 / (n+1) - T_{ср, ни}] c \cdot R_{i+1} = q \cdot \Delta \tau. \quad (10)$$

3. Величину показателя степени n при $Fo < 0,3$ можно оценить по функции $n(Fo)$, которая рассчитана и приведена в [8]. Зависимость $n(Fo)$ в диапазоне $0,025 < Fo < 0,2$ с погрешностью около 1,6 % аппроксимирована нами степенной функцией

$$n = 0,9299 \cdot Fo^{-0,4974}. \quad (11)$$

Поскольку коэффициент a_1 можно определить по (6), а n по (11), для получения приближенного аналитического решения для температурного поля в пределах расчетного интервала времени в виде (4) необходимо найти выражение для коэффициента a_0 . Получим его из уравнения (10), подставив в него (6):

$$[a_0 + q R_{i+1} / (\lambda n (n+1)) - T_{ср, ни}] c \cdot R_{i+1} = q \cdot \Delta \tau.$$

Тогда

$$a_0 = T_{ср, ни} + q \cdot \Delta \tau / (c \cdot R_{i+1}) - q R_{i+1} / [\lambda n (n+1)]. \quad (12)$$

Для первого интервала среднемассовая температура в начале интервала $T_{ср, ни}$, по которой ведется расчет коэффициентов a_0 , a_1 известна из начальных условий $T_{ср, ни} = T_{ср, i=0} = T_n$, а для последующих интервалов ее значение рассчитывается с учетом изменения размера прогретого слоя по формуле (8).

Если Fo_T принять постоянной величиной, показатель степени n также не будет изменяться при переходе к последующему интервалу времени. Тогда расчет температур поверхности $T_{1, i+1} = T(X = 1, \tau_{i+1})$ и среднемассовой температуры в конце интервала времени можно выполнять по формулам

$$T_{ср, i+1} = T_{ср, ни} + q \cdot \Delta \tau / (c \cdot R_{i+1}), \quad (13)$$

$$T_{1, i+1} = T_{ср, ни} + q \cdot \Delta \tau / (c \cdot R_{i+1}) - q R_{i+1} / [\lambda n (n+1)] + \\ + q R_{i+1} / (\lambda n)$$

$$\text{или } T_{1, i+1} = T_{ср, i+1} + q R_{i+1} / [\lambda (n+1)], \quad (14)$$

которые получены из (4) при $X = 1$ и из (9) с учетом выражений (6) и (12).

Расчет распределений температур в последующие моменты времени $\tau_{i+1} = \tau_i + \Delta \tau$ можно выполнять с помощью известных процедур решения обыкновенных дифференциальных уравнений, например методов Эйлера, Эйлера-Коши, Рунге-Кутты, ломаных и др.

Однако при использовании типовых процедур для расчета температурных полей предложенным методом в начале нагрева возникли серьезные вычислительные проблемы. Высокая скорость роста температуры обогреваемой поверхности материалов с низкой теплопроводностью (кирпича, тепловой изоляции) приводила к резкому изменению потока теплоты в пределах расчетного интервала времени.

На рис. 1 приведена зависимость потока теплоты q от времени τ , с. На интервале в 200 с величина q , Вт/м², снижается почти в 6 раз (исходные данные для расчета даны ниже).

Обратим внимание, что в уравнение баланса теплоты (7) входит величина среднеинтегрального потока теплоты $q_{ср, i+1}$. В начале расчета температур на интервале $\Delta \tau_{i+1}$ имеются известные данные только для вычисления потока теплоты в начале интервала $q_{н, i+1}$ по известной температуре поверхности $T_{1, i}$. При нагреве металлов вместо потока теплоты $q_{ср, i+1}$ допустимо использование $q_{н, i+1}$ [9], поскольку они различаются незначительно. Для материалов с низкой теплопроводностью замена $q_{ср, i+1}$ на $q_{н, i+1}$ может привести к абсурдным результатам.

Для решения этой проблемы (предварительной оценки величины потока теплоты в конце интервала $q_{к, i+1}$) используем оригинальную методику, предложенную в [8], модифицировав ее для данного математического описа-

ния. Идея расчетного приема заключается в том, что в пределах $\Delta\tau_{i+1}$ для первого приближения принимается постоянным не поток теплоты $q_{ср,i+1} = q_{н,i+1}$, а приведенный коэффициент теплообмена, вычисленный по температуре поверхности $T_{1,i}$ в начале интервала.

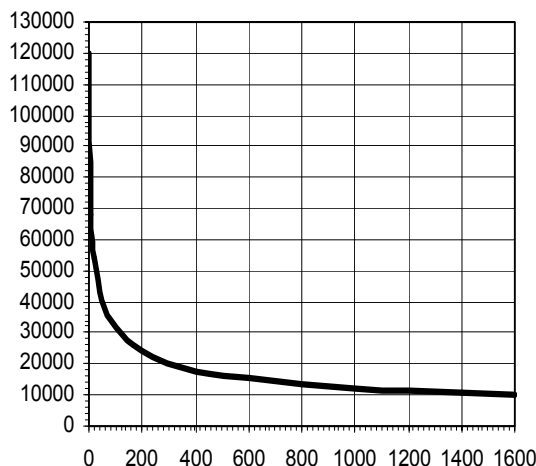


Рис. 1. Зависимость потока теплоты q , Вт/м², от τ , с, рассчитанная численно-аналитическим (Ч-А) методом

Поток теплоты на поверхности q в расчетные моменты времени в общем случае может зависеть от температур газов $T_r(\tau)$, коэффициентов радиационного σ , Вт/(м²·К⁴), и конвективного α , Вт/(м²·К), теплообмена.

Запишем выражение для приведенного коэффициента теплообмена в *начале* расчетного интервала:

$$\alpha_{пр} = q_{н,i+1} / (T_{г,н,i} - T_{1,н,i+1}), \quad (15)$$

где $q_{н,i+1}$ – радиационно-конвективный поток теплоты, Вт/м², вычисленный по известной температуре поверхности $T_{1,н,i+1}$ в *начале* $i+1$ интервала, равной $T_{1,i}$:

$$q_{н,i+1} = \sigma [T_r^4(\tau_i) - T_{1,i}^4] + \alpha [T_r(\tau_i) - T_{1,i}]. \quad (16)$$

Выразим поток теплоты в *конце* $i+1$ интервала через приведенный коэффициент теплообмена $\alpha_{пр}$ и неизвестную пока температуру поверхности в *конце* интервала $T_{1,i+1}$:

$$q_{к,i+1} = \alpha_{пр} (T_{г,к,i+1} - T_{1,i+1}), \quad (17)$$

подставим его в (14):

$$T_{1,i+1} = T_{ср,ни} + \alpha_{пр} (T_{г,к,i} - T_{1,i+1}) \times \{ \Delta\tau / (c \cdot R_{i+1}) + R_{i+1} / [\lambda (n+1)] \},$$

и получим приближенное выражение для расчета $T_{1,i+1}^n$:

$$T_{1,i+1}^n = [T_{ср,ни} + \alpha_{пр} \cdot T_{г,к,i} \cdot \Delta T] / [1 + \alpha_{пр} \cdot \Delta T], \quad (18)$$

где

$$\Delta T = \Delta\tau / (c \cdot R_{i+1}) + R_{i+1} / [\lambda (n+1)]. \quad (19)$$

По известной температуре $T_{1,i+1}^n$ можно рассчитать приближенное значение потока теплоты в *конце* интервала $q_{к,i+1}$ по формуле (17), используя $T_{1,i+1}^n$ и другие параметры теплообмена, соответствующие τ_{i+1} . По $q_{н,i+1}$ и $q_{к,i+1}$ можно вычислить средний для интервала времени поток теплоты $q_{ср,i+1}$:

$$q_{ср,i+1} = (q_{н,i+1} + q_{к,i+1})/2. \quad (19)$$

Принятое различие между потоками теплоты следует использовать в формулах для расчета температуры поверхности $T_{1,i+1}$ и среднемассовой температуры в *конце* интервала $T_{ср,i+1}$ с учетом того, что градиент температур в (3) и (6) определяет $q_{к,i+1}$, а баланс теплоты в (10) и других выражениях – $q_{ср,i+1}$. Тогда формулы (13), (14) примут следующий вид:

$$T_{ср,i+1} = T_{ср,ни} + q_{ср,i+1} \Delta\tau / c \cdot R_{i+1}, \quad (20)$$

$$T_{1,i+1} = T_{ср,i+1} + q_{к,i+1} R_{i+1} / [\lambda (n+1)]. \quad (21)$$

В некоторых случаях значение $T_{1,i+1}$ можно уточнять простыми итерациями, используя его в качестве следующего приближения вместо $T_{1,н,i+1}$ при расчете $\alpha_{пр}$ по (15).

Для снижения трудоемкости расчета от расчета $T_{1,i+1}^n$ можно отказаться, когда потоки теплоты незначительно различаются в пределах $\Delta\tau$, т. е. $q_{ср,i+1} \approx q_{н,i+1} \approx q_{к,i+1}$. Это возможно для металлов или для тел с низкой теплопроводностью, когда слабо изменяется интенсивность теплообмена.

Тестирование численно-аналитического (Ч-А) метода выполнено путем сравнения его с методом конечных разностей (МКР). Для оценки погрешности метода специально были выбраны «жесткие» условия теплообмена с резким изменением потока теплоты в начале нагрева. Расчеты выполнены для кирпичной стены, нагреваемой с одной стороны в среде с температурой $T_r = 900$ К при следующих исходных данных: $T_n = 300$ К; $a = 0,54 \cdot 10^{-6}$ м/с²; $c = 1,5 \cdot 10^6$ Дж/м³; $\lambda = 0,81$ Вт/(м·К); $\alpha = 200$ Вт/(м²·К); $\sigma = 0$; $R_n = 0,36$ м; $\tau_k = 1600$ с.

На рис. 2, 3 приведены температуры поверхности, рассчитанные методом конечных разностей и численно-аналитическим методом. Расчеты выполнены для моментов времени $\tau_i = 10; 20; 50; 100; 200; 400; 600; 800; 1000; 1200; 1400; 1600$ с.

Согласно полученным данным, температуры практически совпали, за исключением момента $\tau_1 = 10$ с. При этом нельзя однозначно сказать, какой из методов более точен. Для расчета МКР пластина разбивалась на постоянное число слоев $k = 40$, что указывает на более высокую трудоемкость расчета. (Температуры T_1 при $k = 20$ и при $k = 40$ (МКР) различались на 60 и 2 К. Естественно, значения T_1 при $k = 40$ были точнее и ближе к T_1 , полученным предложенным Ч-А методом.)

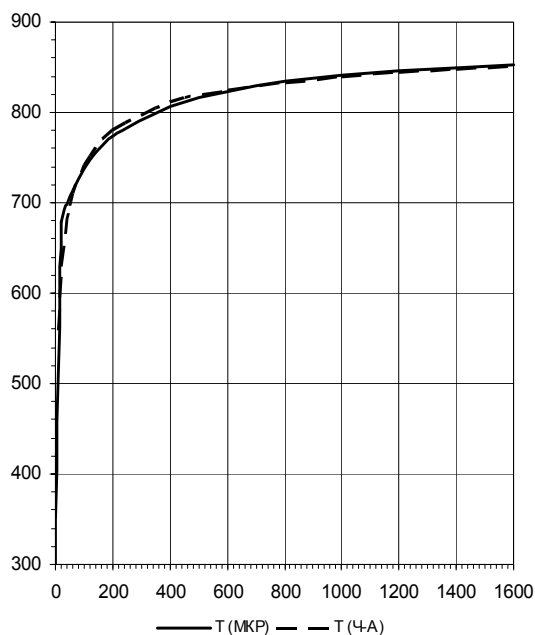


Рис. 2. Температуры поверхности T_1 , К, рассчитанные методом конечных разностей (МКР) и численно-аналитическим (Ч-А) методом ($0 \leq \tau \leq 1600$ с)

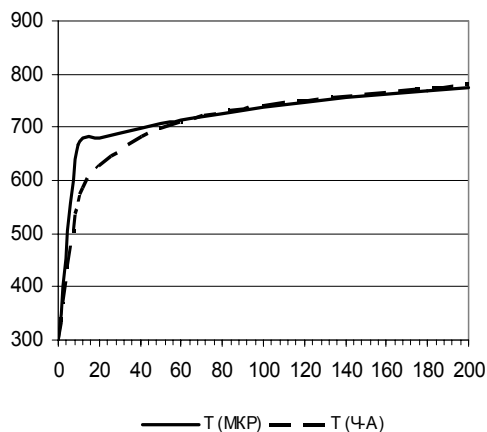


Рис. 3. Температуры поверхности T_1 , К, рассчитанные методом конечных разностей и численно-аналитическим методом, в первые 200 с нагрева

На рис. 4 показано изменение во времени примерной глубины прогрева стены. За 1600 с кирпичная кладка прогрелась лишь наполовину – до $R = 0,186$ м. Отметим, что величина R рассчитана приближенно, так как условие $T(R) = T_n$ не входит в исходную систему уравнений.

Для исследования метода проведены расчеты при различных данных, которые необходимо принимать до начала вычислений.

В данном примере расчета величина n подбиралась и была принята равной $n = 4$.

Величина числа Fo_τ в данном примере была принята равной $Fo_\tau = 0,025$.

Неравномерный шаг по времени тоже был принят для повышения точности расчета. При $\Delta\tau = 200$ с = const погрешность расчета была несколько выше.

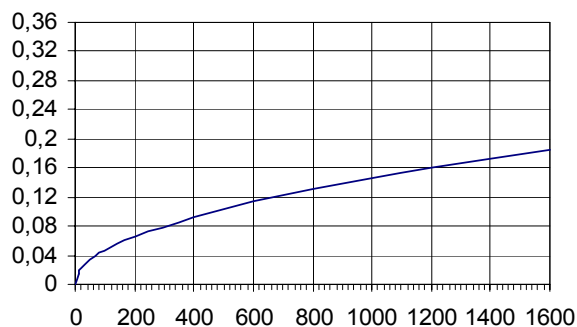


Рис. 4. Примерная глубина прогрева стены R , м, рассчитанная численно-аналитическим методом, в зависимости от времени нагрева ($0 \leq \tau \leq 1600$ с)

Расчеты, проведенные для $3 \leq n \leq 6$ и $0,025 \leq Fo \leq 0,07$, показали, что для принятых условий теплообмена относительные погрешности расчета T_1 в некоторых случаях были несколько выше, показанных на рис. 2, 3. Однако в целом при $\tau > 400$ с они не превышали 2–3 %.

Важно подчеркнуть простоту реализации метода. Все расчеты Ч-А методом выполнены с помощью Microsoft Excel.

При дальнейшем развитии метода возможны задание условия $T(R) = T_n$ и получение формулы для расчета показателя степени n в уравнении (4). Незначительное усложнение математического описания, на наш взгляд, позволит повысить устойчивость расчета, по крайней мере, избавиться от выбора величины показателя степени n .

Список литературы

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
2. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций: учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2005. – 340 с.
3. Пехович А.И., Жидких В.М. Расчеты теплового режима твердых тел. – Л.: Энергия, 1968. – 304 с.
4. Лисиенко В.Г., Волков В.В., Маликов Ю.К. Улучшение топливоиспользования и управление теплообменом в металлургических печах. – М.: Металлургия, 1988. – 230 с.
5. Котенев В.И. Приближенный метод решения задач нестационарной теплопроводности // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1989. – № 3. – С. 111–116.
6. Губинский В.И. Развитие численно-аналитических методов решения задач теплообмена // Труды междунар. конф. «Экология и теплотехника – 1996». – Днепропетровск: Изд-во ГМАУ, 1996. – С. 76–78.
7. Кудинов В.А., Стефанюк Е.В. Задачи теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения // Известия АН. Энергетика. – 2008. – № 4. – С. 122–138.
8. Соколов А.К. Численно-аналитический метод расчета температурных полей многослойных пластин в начальной стадии нагрева // Известия АН. Энергетика. – 2009. – № 1. – С. 138–151.
9. Соколов А.К. Математическое моделирование нагрева металла в газовых печах / ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2011. – 396 с.

References

1. Lykov, A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Conductivity theory]. Moscow, Vysshaya shkola, 1967. 600 p.
2. Kudinov, V.A., Kartashov, E.M., Kalashnikov, V.V. *Analyticheskie resheniya zadach teploobmena i termoprugosti dlya mnogosloynnykh konstruksiy* [Analytical solutions to heat and mass transfer and thermoelasticity problems for multi-layer structures]. Moscow, Vysshaya shkola, 2005. 340 p.
3. Pekhovich, A.I., Zhidkikh, V.M. *Raschety teplovogo rezhima tverdykh tel* [Calculation of thermal behavior of solids]. Leningrad, Energiya, 1968. 304 p.
4. Lisienko, V.G., Volkov, V.V., Malikov, Yu.K. *Uluchshenie toplivoispol'zovaniya i upravlenie teploobmenom v metallurgicheskikh pechakh* [Improvement of fuel utilization and heat exchange control in metallurgical furnaces]. Moscow, Metallurgiya, 1988. 230 p.
5. Kotenev, V.I. *Priblizhennyy metod resheniya zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti* [Approximated method of solving transient heat conductivity problems]. *Izvestiya AN SSSR. Energetika i transport*, 1989, no. 3, pp. 111–116.
6. Gubinskiy, V.I. *Razvitie chislennno-analiticheskikh metodov resheniya zadach teploobmena* [Development of numerical and analytical methods of solving conductivity problems]. *Trudy mezhdunarodnoy konferentsii «Ekologiya i teplotekhnika – 1996»* [Works of the International Conference «Ecology and Heat Engineering»]. Dnepropetrovsk, Izdatel'stvo GMAU, 1996, pp. 76–78.
7. Kudinov, V.A., Stefanyuk, E.V. *Zadachi teploprovodnosti na osnove opredeleniya fronta temperaturnogo voz-mushcheniya* [Conductivity problems based on temperature perturbation front calculation]. *Izvestiya AN. Energetika*, 2008, no. 4, pp. 122–138.
8. Sokolov, A.K. *Chislennno-analiticheskiy metod rascheta temperaturnykh poley mnogosloynnykh plastin v nachal'noy stadii nagreva* [A numerical and analytical method of calculating temperature fields in multi-layer plates at the initial heating stage]. *Izvestiya AN Energetika*, 2009, no. 1, pp. 138–151.
9. Sokolov, A.K. *Matematicheskoe modelirovanie nagreva metalla v gazovykh pechakh* [Mathematical modeling of metal heating in gas furnaces]. Ivanovo, 2011. 396 p.

Соколов Анатолий Константинович,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор кафедры безопасности жизнедеятельности,
телефон (4932) 26-99-37,
e-mail: sokolov@bjd.ispu.ru

Сергашов Евгений Валерьевич,
ФГБОУВПО «Ивановский институт ГПС МЧС России»,
аспирант,
e-mail: sergashov2015@mail.ru

Якубина Ольга Анатольевна,
ОАО «Зарубежэнергопроект»,
инженер,
e-mail: os_flora@mail.ru