УДК 621.321

Анализ моделей для электромагнитного расчета силовых трансформаторов

И.А. Пайков, А.И. Тихонов
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
г. Иваново, Российская Федерация,
E-mail: komned37@yandex.ru, ait@dsn.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Одним из наиболее важных расчетов трансформатора, требующих высокой точности, является расчет магнитного поля. Поэтому современное проектирование немыслимо без CAE-систем. Особенность конструкции трансформатора ставит под сомнение возможность сведения полевой задачи к двухмерной постановке. Однако расчет трехмерных физических полей требует значительного расчетного времени. В связи с этим необходима разработка моделей для электромагнитного расчета силовых трансформаторов, позволяющих достигать точности, соизмеримой с точностью 3D-моделей, но обладающих в то же время повышенным быстродействием, что позволило бы использовать их при оптимизации трансформатора и расчете его работы в динамических режимах.
Материалы и методы: Для расчета магнитного поля использован численный метод конечных элементов, а также аналитические методы расчета индуктивности рассеяния обмоток трансформатора, в частности методы на основе полных эллиптических интегралов Лежандра 1-го и 2-го рода.
Результаты: Проведен анализ нескольких математических моделей, которые могут быть использованы для электромагнитного расчета силового трансформатора. Отмечены недостатки трехмерных полевых моделей, ограничивающих сферу применения современных CAE-систем в САПР трансформаторов. Проведен сравнительный анализ результатов расчета индуктивности рассеяния на разных моделях. Разработан метод, позволяющий осуществлять электромагнитный расчет трансформатора без потери точности на двухмерных моделях магнитного поля.
Выводы: Результаты проведенного анализа моделей, используемых для электромагнитного расчета силового трансформатора, позволяют оптимизировать структуру САПР путем отказа от трудоемкого моделирования магнитного поля на 3D-моделях. Предложенный метод расчета, основанный на использовании осесимметричнной модели магнитного поля, позволяет существенно ускорить расчеты без существенной потери точности, по сравнению с трехмерными моделями.

Ключевые слова: силовой трансформатор, моделирование магнитного поля, метод конечных элементов, расчет индуктивности рассеяния обмоток трансформатора.

Analysis of power transformer electromagnetic calculation models

I.A. Paikov, A.I. Tikhonov
Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation,
E-mail: komned37@yandex.ru, ait@dsn.ru

Abstract

Background: One of the most important transformer calculations, requiring high accuracy, is that of magnetic field. Therefore, modern design is unthinkable without CAE-systems. The transformer design features call into question the possibility of reducing a field problem to a two-dimensional one. However, the calculation of three-dimensional physical fields takes a lot of time. Therefore, the aim of this study is to develop models of power transformer electromagnetic field calculation enabling the accuracy comparable to that of 3D-models, but with a higher speed. Such models could be used for transformer parameter calculation and optimization in dynamic operation modes.
Materials and methods: The magnetic field was calculated based on the numerical finite element method, as well as analytical methods of transformer winding leakage inductance calculation, in particular, methods based on complete Legendre elliptic integrals of the 1st and 2nd kinds.
Results: Several mathematical models that can be used to calculate the power of the electromagnetic transformer have been analyzed. The study has revealed some drawbacks of three-dimensional field models, limiting the application scope of modern CAE-systems in transformer CAD. The results of leakage inductance calculation on different models have been compared with each other. A method has been developed for calculation of electromagnetic transformers without a loss of accuracy on two-dimensional magnetic field models.
Conclusions: The results of analysis of the models used to calculate the electromagnetic power transformer have shown that it is possible to optimize the CAD structure without labour-consuming 3D modeling of magnetic field. The proposed calculation method based on the use of axially symmetric model of magnetic field, can significantly speed up the calculations without a significant loss of accuracy in comparison with three-dimensional models.

Key words: power transformer, magnetic field modelling, finite element method, transformer winding leakage inductance calculation.

DOI: 10.17588/2072-2672.2015.3.038-043

© ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»

В связи с ростом конкуренции на рынке электротехнической продукции в настоящее время новый акцент приобретает проблема снижения себестоимости производства силовых трансформаторов. Одним из главных путей снижения себестоимости состоит в уменьшении стоимости активных материалов. В связи с этим необходимым этапом проектирования силовых трансформаторов является этап оптимизации проекта. Полученное оптимальное решение оказывается, как правило, в предельно допустимой зоне по электромагнитным нагрузкам, что предъявляет повышенные требования к точности моделей, используемых при поверочном расчете. Поэтому современное проектирование немыслимо без использования CAE-систем, позволяющих рассчитывать физические поля численными методами (как правило, методом конечных элементов).

Одним из наиболее важных расчетов трансформатора, от которого требуется высокая точность, является расчет магнитного поля, что позволяет, в частности, смоделировать работу трансформатора в динамических режимах. При этом большое значение имеет точность расчета потоков рассеяния.

Особенность конструкции трансформатора ставит под сомнение возможность сведения полевой задачи к двухмерной постановке. В то же время для расчета трехмерных физических полей в нелинейной постановке задачи в некоторых случаях может потребоваться до нескольких часов, что в условиях сжатых сроков проектирования недопустимо, особенно в мелкосерийном и штучном производстве.

Таким образом, была поставлена задача анализа возможностей использования двухмерных моделей для расчета магнитного поля силовых трансформаторов без потери точности, достигаемой в трехмерных моделях.

Для решения задачи был взят трансформатор ТМГ–1000–10/0,4. 3D- и 2D-модели данного трансформатора представлены на рис. 1, 2. Расчет магнитного поля осуществлялся при амплитудном значении тока холостого хода, протекающего в обмотке высшего напряжения (ВН), расположенной на втором (среднем) стержне. По результатам расчета определялся основной магнитный поток

$$\Phi_0 = \Phi_1 + \Phi_3, \quad (1)$$

и поток рассеяния

$$\Phi_\sigma = \Phi_2 - \Phi_0, \quad (2)$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 – значения магнитного потока, пронизывающего срединные сечения 1, 2 и 3-го стержней.

Результаты расчета представлены в табл. 1.

Таблица 1. **Результаты расчета потоков трансформатора ТМГ-1000-10/0,4**

Поток	3D-модель	2D-модель, приведенная к 3D	Расхождение, %
Основной, Вб	0,0473645	0,04843813	2,26
Рассеяние, Вб	0,0004402	0,0000116	97

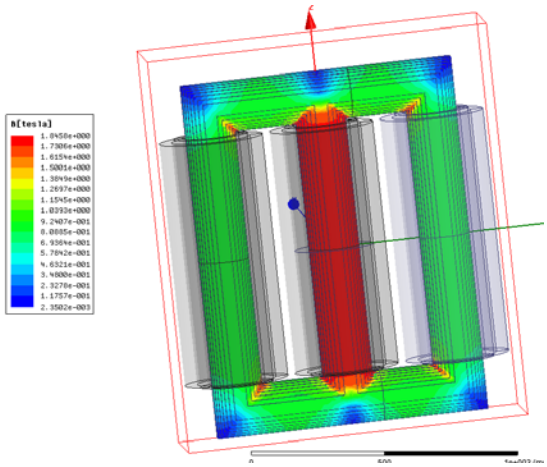

Рис. 1. 3D-модель трансформатора ТМГ-1000-10/0,4

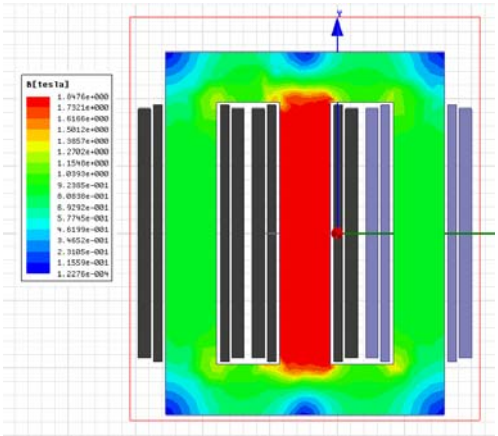

Рис. 2. 2D-модель трансформатора ТМГ-1000-10/0,4

При двухмерной постановке задачи величина магнитного потока в *i*-м стержне рассчитывалась по формуле

$$\Phi_i = \left(A_{i+} - A_{i-}\right) d\, k_{\text{пр}}, \quad (3)$$

где A_{i+}, A_{i-} – значения векторного магнитного потенциала в точках, расположенных на концах отрезка, проведенного вдоль срединного сечения *i*-го стрежня; *d* – диаметр стержня; $k_{\text{пр}}$ – коэффициент приведения трехмерной модели к двухмерной.

Так как сечение стержня трансформатора представляет собой ступенчатую фигуру, вписанную в окружность, то двухмерная постановка полевой задачи, строго говоря, некорректна. Поэтому в формулу (3) введен коэффициент приведения $k_{\text{пр}}$, вычисляемый из условия равенства активного сечения стержня S_{3D} приведенному сечению прямоугольного стержня S_{2D}, реализованного в 2D-модели, т. е.

$$k_{\text{пр}} S_{2D} = S_{3D}, \quad (4)$$

© ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»

при этом

$$k_{\text{пр}} = \frac{S_{3D}}{S_{2D}} = \frac{\pi d^2 k_{\text{кр}} k_{\text{с}}}{4 d b_1} = \frac{\pi d k_{\text{кр}} k_{\text{с}}}{4 b_1}, \quad (5)$$

где b_1 – ширина первого пакета стержня; $k_{\text{кр}}$ – коэффициент заполнения круга сталью; $k_{\text{с}}$ – коэффициент заполнения стали.

Рассчитанное таким образом значение основного потока дает хорошее совпадение (расхождение 2,26 %) со значением, полученным из расчета 3D-модели (см. табл. 1). Для инженерных расчетов с использованием конечно-элементных моделей допустимым можно считать погрешность в 5 %.

Что касается потока рассеяния, то расхождение в результатах, вычисленных по двум моделям, приближается к 100 %. В то же время можно отметить, что значение потока рассеяния, полученное из 3D модели, приблизительно в 100 раз меньше значения основного потока, т. е. находится в зоне погрешности конечно-элементной модели. В связи с этим определение такой малой величины не совсем корректно при данной постановке конечно-элементной задачи, как в трехмерной модели, так и в двухмерной. То есть поток рассеяния, а следовательно, и индуктивность рассеяния обмоток трансформатора следует осуществлять по другим методикам.

Для расчета индуктивности рассеяния можно воспользоваться формулой, приведенной в [1]:

$$L_\sigma = \frac{1{,}256 k_{\text{р}} w l_{\text{ср}}}{10^8 h_{\text{н}}} \left(\frac{\delta_u}{2} + \frac{A}{3} \right), \quad (6)$$

где w – число витков обмотки; $h_{\text{н}}$ – длина обмотки вдоль направления потока рассеяния; δ_u – расстояние между обмотками; A – толщина обмотки; $l_{\text{ср}}$ – средняя длина витка обмотки; k_p – опытный коэффициент, зависящий от типа намотки и данных сердечника.

Так же в работе [2] представлена более простая формула для расчета индуктивности рассеяния:

$$L_\sigma = \mu_0 w^2 \frac{S_{a/3}}{l} (1 + k_a), \quad (7)$$

где $S_{a/3}$ – площадь витка, находящегося на расстоянии $a/3$ от внутреннего витка; a – радиальный размер обмотки;

$$k_a = \frac{1}{6} \left(\frac{a}{R_{a/3}} \right)^2, \quad (8)$$

где $R_{a/3}$ – средний (по площади) радиус этого витка. При $R_{a/3}/a = 2$ имеем $k_a = 0{,}04$; при $R_{a/3}/a = 3$ – $k_a = 0{,}02$; при $R_{a/3}/a = 4$ – $k_a = 0{,}01$.

Индуктивность рассеяния также можно рассчитать через энергию магнитного поля рассеяния:

$$L_\sigma = \frac{2W_\sigma}{i^2}. \quad (9)$$

Энергию рассеяния W_σ можно определить по результатам расчета магнитного поля. Для этого нужно из всей энергии W поля вычесть энергию, запасаемую в сердечнике W_c:

$$W_\sigma = W - W_c. \quad (10)$$

Для сравнения результатов расчета индуктивности рассеяния была проведена серия расчетов как для двухмерных, так и для трехмерных задач. Результаты одной из серий расчета для трехмерной модели трансформатора приведены в табл. 2. Расчеты выполнялись с учетом наличия бака из стали 1010.

Таблица 2. **Результаты расчета индуктивности рассеяния обмотки ВН трансформатора ТМГ-1000-10/0,4**

Способ расчета	W, Дж	W_c, Дж	W_σ, Дж	L_σ, Гн
По расчету поля с учетом бака	2,292	2,289	0,00316	$3{,}04 \cdot 10^{-7}$
По расчету поля с условием Неймана	2,311	2,306	0,00431	$4{,}16 \cdot 10^{-7}$
По формуле (6)	–	–	–	$2{,}57 \cdot 10^{-7}$
По формуле (7)	–	–	–	$1{,}9 \cdot 10^{-7}$

Анализ результатов показывает, что полученные из полевой модели значения индуктивности рассеяния существенно отличаются от полученных по аналитическим формулам. При этом формула (7) дает, по-видимому, существенную погрешность. Какой расчет является более точным и правильным, сказать трудно, так как каждая из приведенных моделей опирается на свои специфические ограничений. Например, наличие стального бака можно учесть в модели либо введя в нее дополнительные стальные элементы, соответствующие стенкам бака, либо задав на внутренней поверхности бака граничные условия Неймана. В первом случае учитываются свойства стали, но ввиду малой толщины стенки бака возникают дополнительные погрешности, вызванные наличием в конечно-элементной сетке вытянутых (близких к вырожденным) треугольных элементов. Поэтому, на наш взгляд, большее доверие вызывает расчет с учетом условия Неймана.

Для более точного расчета индуктивности рассеяния по результатам конечно-элементного расчета магнитного поля была исследована модель уединенной обмотки с незамкнутым сердечником (рис. 3). Такая задача может быть решена в осесимметричной постановке. Так как сердечник не замкнут, то все магнитное поле, создаваемое обмоткой, является полем рассеяния, что позволяет избежать влияния на точность расчета основного магнитного потока. Так как поток рассеяния не способен насытить железо, то задача может быть решена в линей-

ной постановке, что существенно сокращает время расчета. Это позволяет использовать такую модель, например, в алгоритмах оптимизации. Для учета насыщения сердечника основным потоком расчет можно проводить при заданном значении магнитной проницаемости стали, соответствующем величине магнитной индукции основного магнитного потока. Значение индукции можно получить либо с использованием приближенных методов расчета магнитной системы, например, изложенных в [3], либо из модели рис. 2.

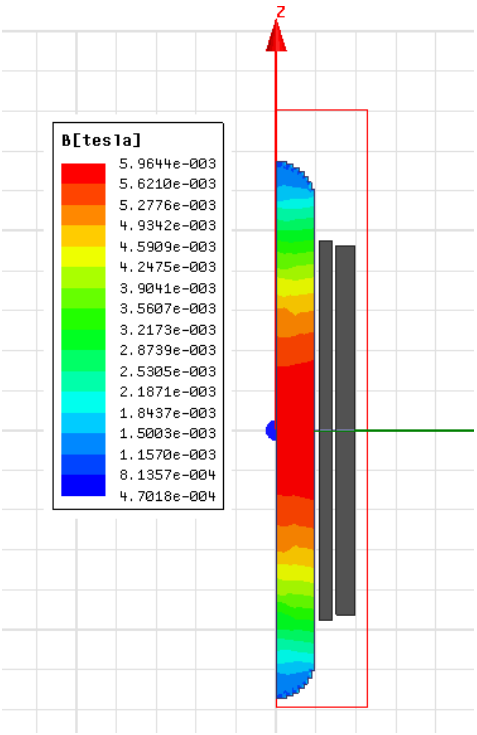

Рис. 3. Осесимметричная модель обмотки

Результаты расчета индуктивности рассеяния обмотки трансформатора на осесимметричной модели приведены в табл. 3.

Таблица 3. **Результаты расчета индуктивности рассеяния на осесимметричной модели**

Способ расчета	W_σ, Дж	L_σ, Гн	Δ,%
На нелинейной модели	0,005626	$5{,}429\cdot10^{-7}$	30,5
На линейной модели с μ = 1 (без сердечника)	0,000976	$9{,}414\cdot10^{-7}$	126
На линейной модели с μ = 80 (насыщенный сердечник)	0,005065	$4{,}885\cdot10^{-7}$	17,4
На линейной модели с μ = 100 (насыщенный сердечник)	0,005191	$5{,}007\cdot10^{-7}$	20,4
На линейной модели с μ = 8000 (ненасыщенный сердечник)	0,005623	$5{,}424\cdot10^{-7}$	30,4

В табл. 3 приведены отклонения Δ рассчитанного значения L_σ от величины, полученной из расчета трехмерного поля с условием Неймана (см. табл. 2). Наименьшее отклонение дает вариант расчета на линейной модели с μ = 80 (значение, соответствующее максимальному значению магнитной индукции в стержне трансформатора).

Результаты расчета подтверждают эффективность выбранной модели. Следует отметить, что использование сложных дорогостоящих систем в САПР трансформаторов оказывается невозможным, особенно для малых предприятий. Гораздо дешевле оказывается вариант системы, построенной с использованием динамически подключаемой библиотеки конечно-элементного моделирования магнитного поля. Технология моделирования электротехнических устройств с использованием данной библиотеки уже оправдала себя в ряде конкретных приложений [4, 5, 6].

В настоящее время ведется работа по разработке алгоритмов расчета индуктивности рассеяния с использованием аналитических методов [7]. За основу берутся формулы для расчета магнитного поля кольцевого контура с током. В качестве кольцевых контуров в нашем случае выступают витки обмотки. Нормальная составляющая индукции магнитного поля от витка с током находятся по формулу [8]

$$B_n(r,z)=\frac{\mu_0 i_0}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left(K(k)+\frac{a^2-r^2-z^2}{(a-r)^2+z^2}E(k)\right), \quad (11)$$

где a – радиус рамки с током; r, z – координаты расчетной точки в локальной цилиндрической системе координат с центром, совпадающим с центром витка; k – модуль эллиптического интеграла:

$$k=\sqrt{\frac{4ar}{(a+r)^2+z^2}}; \quad (12)$$

$K(k)$, $E(k)$ – полные нормальные эллиптические интегралы Лежандра соответственно 1-го и 2-го рода [9]:

$$K(k)\approx\frac{\pi}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{N}\left(\left[\frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)}{2^n\cdot n!}\right]^2\cdot k^{2n}\right)\right]; \quad (13)$$

$$E(k)\approx\frac{\pi}{2}\left[1-\sum_{n=1}^{N}\left(\left[\frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)}{2^n\cdot n!}\right]^2\cdot\frac{k^{2n}}{2n-1}\right)\right]; \quad (14)$$

где N – количество элементов ряда (которое для достижения точности, достаточной в инженерных задачах, можно принять равным 5).

Магнитный поток, созданный током i-го витка, пронизывающий j-й виток радиуса r_j, удаленный от i-го витка по оси на расстояние z, определяется как

$$\Phi_{ji} = \int_0^{r_j} 2\pi r B_n(r,z)dr \approx \sum_{k=0}^{r_j/\Delta r-1} 2\pi B_n(r,z)(\Delta r)^2\left(\frac{1}{2}+k\right). \quad (15)$$

Индуктивность рассеяния обмотки без учета влияния стали магнитной системы и бака можно вычислить по формуле

$$L_\sigma = \frac{\Psi}{i} = \frac{\sum_{i=1}^{w}\sum_{j=1}^{w}\Phi_{ij}}{i}. \quad (16)$$

Формула (16) не может быть использована для расчета индуктивности рассеяния обмоток из ленты.

Для учета влияния стали можно использовать метод зеркальных изображений. При этом помимо собственно витков обмотки в модель необходимо ввести дополнительные фиктивные витки, расположенные зеркально по отношению к реальным виткам по другую сторону поверхности раздела воздуха и железа. Несмотря на некоторую архаичность такого метода расчета индуктивности рассеяния обмотки трансформатора, может быть достигнута точность, сопоставимая с точностью полевых расчетов, при более высоком быстродействии модели.

Заключение

В результате проведенного анализа моделей, используемых для электромагнитного расчета силового трансформатора, были выявлены направления, позволяющие оптимизировать структуру САПР путем отказа от трудоемкого моделирования магнитного поля на 3D-моделях. В частности, предложен вариант комбинирования двухмерных полевых моделей: плоскопараллельной – для расчета основного магнитного потока – и осесимметричной – для расчета потока рассеяния. Предложенная комбинация методов позволяет существенно ускорить расчеты без существенной потери точности, по сравнению с трехмерными моделями. Выявленные особенности магнитного поля трансформатора позволяют поставить задачу разработки новой методики расчета, основанной на использовании аналитических методов, что позволит еще значительнее ускорить процесс расчета.

Список литературы

1. **Цыкин Г.С.** Трансформаторы низкой частоты. Теория, расчет и конструирование. – М.: Связьиздат, 1955. – 424 с.
2. **Лейтес Л.В.** Электромагнитные расчеты трансформаторов и реакторов. – М.: Энергия, 1981. – 392 с.
3. **Тихомиров П.М.** Расчет трансформаторов: учеб. пособие для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 528 с.
4. **Шмелев А.С., Пайков И.А., Булатов Л.Н.** Методика организации численного исследования электротехнических устройств с использованием библиотеки конечно-элементного моделирования магнитного поля // Вестник ИГЭУ. – 2014. – Вып. 1. – С. 55–61.
5. **Стулов А.В.** Разработка уточненных математических моделей для создания подсистем САПР распределительных трансформаторов с обмотками из ленты / А.В. Стулов, А.С. Зайцев, И.А. Трофимович, В.И. Печенкин // Вестник ИГЭУ. – 2014. – Вып. 5. – С. 37–41.
6. **Булатов Л.Н.** Варианты модели расчета переходных процессов в асинхронной машине с обращением к расчету поля // Материалы междунар. науч.-техн. конф. (XVI Бенардосовские чтения) / Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2011. – Т. 3 – С. 148–151.
7. **Тихонов А.И., Шмелев А.И., Розин Е.Г.** Разработка метода численного моделирования магнитного поля на основе классических положений электромагнетизма // Вестник ИГЭУ. – 2014. – Вып. 4. – С. 45–48.
8. **Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.** Сборник задач по электродинамике / под ред. М.М. Бредова. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 480 с.
9. **Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.** Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / пер. с 6-го нем. перераб. изд.; под ред. Л.И. Седова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. – 342 с.

References

1. Tsykin, G.S. *Transformatory nizkoy chastoty. Teoriya, raschet i konstruirovanie* [Low frequency transformers. Theory, calculation and design]. Moscow, Svyaz'izdat, 1955. 424 p.
2. Leytes, L.V. *Elektromagnitnye raschety transformatorov i reaktorov* [Electromagnetic calculations of transformers and reactors]. Moscow, Energiya, 1981. 392 p.
3. Tikhomirov, P.M. *Raschet transformatorov* [Calculation of transformers]. Moscow, Energoatomizdat, 1986. 528 p.
4. Shmelev, A.S., Paykov, I.A., Bulatov, L.N. Metodika organizatsii chislennogo issledovaniya elektrotekhnicheskikh ustroystv s ispol'zovaniem biblioteki konechno-elementnogo modelirovaniya magnitnogo polya [Technique of organization of a numerical study of electrical devices using a library of magnetic field finite element modeling]. *Vestnik IGEU*, 2014, issue 1, pp. 55–61.
5. Stulov, A.V., Zaytsev, A.S., Trofimovich, I.A., Pechenkin, V.I. Razrabotka utochnennykh matematicheskikh modeley dlya sozdaniya podsistem SAPR raspredelitel'nykh transformatorov s obmotkami iz lenty [Development of updated mathematical models for creating CAD subsystems of distribution transformers with tape windings]. *Vestnik IGEU*, 2014, issue 5, pp. 37–41.
6. Bulatov, L.N. Varianty modeli rascheta perekhodnykh protsessov v asinkhronnoy mashine s obrashcheniem k raschetu polya [Variants of calculation models of transients in induction machines in terms of magnetic field calculation]. *Materialy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii (XVI Benardosovskie chteniya)* [Proceedings of the International scientific and technical conference (XVIth Benardos readings)]. Ivanovo, 2011, vol. 3, pp. 148–151.
7. Tikhonov, A.I., Shmelev, A.I., Rozin, E.G. Razrabotka metoda chislennogo modelirovaniya magnitnogo polya na osnove klassicheskikh polozheniy elektromagnetizma [Development of the method of numerical simulation of magnetic field based on the classical electromagnetism provisions]. *Vestnik IGEU*, 2014, issue 4, pp. 45–48.
8. Batygin, V.V., Toptygin, I.N. *Sbornik zadach po elektrodinamike* [Collection of electrodynamics problems]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1962. 480 p.
9. Yanke, E., Emde, F., Lesh, F. *Spetsial'nye funktsii. Formuly, grafiki, tablitsy* [Special functions. Formulas, graphs, tables]. Moscow, Nauka, 1977. 342 p.

© ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»

Пайков Игорь Александрович,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
аспирант,
e-mail: komned37@yandex.ru

Тихонов Андрей Ильич,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой физики,
e-mail: ait@dsn.ru

© ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»