

Применение теории цепей Маркова к моделированию кинетики виброгрохочения в слое переменной высоты¹

А.П. Алешина¹, В.А. Огурцов¹, В.Е. Мизонов², А.В. Митрофанов²

¹ФГБОУВПО «Ивановский государственный политехнический университет», г. Иваново, Российская Федерация

²ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,

г. Иваново, Российская Федерация

E-mail: mizonov46@mail.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Грохочение угля в системах подготовки к сжиганию твердого топлива является важной составляющей процесса пылеприготовления на тепловых электростанциях. Для выбора рациональных грохотов и режимов их эксплуатации необходимо знание их кинетических характеристик, связывающих производительность и степень извлечения мелкой фракции. Построение этих характеристик на эмпирической основе трудоемко и требует больших затрат времени. Здесь значительную помощь могут оказать математические модели процесса, если они достаточно адекватно описывают его. В настоящее время основную роль играют стохастические модели, использующие теорию цепей Маркова. Однако известные работы не учитывают одну важную особенность процесса: убывание высоты слоя материала по мере извлечения мелкой фракции, которое замедляет кинетику процесса при высокой степени извлечения. В связи с этим возникает необходимость восполнить этот пробел.

Материалы и методы: Для решения поставленной задачи использована теория цепей Маркова, где число ячеек, соответствующее высоте слоя, меняется по мере выхода мелкой фракции. Для описания конвективной миграции частиц к поверхности сита использована нелинейная модель, в которой доли конвективного переноса зависят от содержания мелкой фракции в следующих ячейках цепи.

Результаты: Показано, что введение зависимости интенсивности извлечения от высоты слоя, меняющейся с уходом мелкой фракции, оказывает значительное влияние на распределение содержания мелкой фракции по высоте слоя и ее извлечение в мелкий продукт.

Выводы: Учет изменения высоты слоя при грохочении позволяет более адекватно описывать кинетику грохочения и достоверно прогнозировать характеристики вибрационного грохота при проектировании систем пылеприготовления на тепловых электростанциях.

Ключевые слова: вибрационное грохочение, кинетика, цепь Маркова, переходная матрица, вектор состояния, высота слоя, скорость извлечения.

Application of the theory of Markov chains to model kinetics of vibration screening in a layer of variable height

A.P. Aleshina¹, V.A. Ogurtsov¹, V.E. Mizonov², A.V. Mitrofanov²

¹ Ivanovo State Polytechnic University, Ivanovo, Russian Federation

² Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation

E-mail: mizonov46@mail.ru

Abstract

Background: Separation of by screening coal in systems of hard fuel preparation for combustion is an important component of the coal fuel preparation at thermal power plants. In order to choose the rational screening apparatus and its operating regime, it is necessary to know its kinetic characteristics that connect the throughput and degree of extraction of fine fraction. Empirical obtaining of the characteristics is very labor and time consuming. The considerable aid can be reached by using mathematical models if they provide an adequate description of the process. At present, the basic role belongs to the stochastic models that use the theory of Markov chains. However, the known work in the field does not take into account the important feature of the process: decreasing of the material layer height as the fine fraction is being extracted, which decelerates the process kinetics at high degree of extraction. The present paper is supposed to make up the deficiency.

Materials and methods: In order to solve the problem in question, the theory of Markov chains is used where the number of cells varies as the fine fraction is being extracted. In order to describe the convection migration of fine particles to the screen surface the non-linear model is used, in which the parts of convection transitions depend on the fraction content in the neighboring cell.

Results: It is shown that introduction of dependence of extraction intensity on layer height due to output of the fine fraction leads to the considerable influence on the fine fraction distribution over the layer height and on its extraction into the fine product. Particularly it becomes apparent at high degree of extraction that corresponds to the known experimental data.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №14-01-31177 мол_а.

Conclusions: Taking into account the variation of the layer height in screening allows mode adequate describing of the screening kinetics and reliable predicting the characteristics of a vibration screen for designing of the coal dust-preparation systems at thermal power plants.

Key words: vibration screening, kinetics, Markov chain, transition matrix, state vector, layer height, rate of extraction.

Грохочение, т. е. разделение сыпучего материала на крупную и мелкую фракции на перфорированной поверхности, широко используется при переработке горно-рудного сырья в энергетической, строительной, химической и других отраслях промышленности. В частности, грохочение используется в системах пылеприготовления на угольных электростанциях при предварительной подготовке к размолу угольного сырья. От эффективности и производительности грохота во многом зависит качество получаемых на нем полуфабрикатов и эффективность технологических линий с его участием. В настоящее время известен широкий спектр конструкций грохотов [1]. Для более или менее тонкого грохочения широкое распространение получили вибрационные грохоты, где разделение материала происходит на колеблющемся сите. Необходимость сочетать высокую производительность грохота с разумными габаритами сита приводит к тому, что исходный материал подается на грохот достаточно высоким слоем, вмещающим по высоте большое число частиц различного размера. Наложение вибрационного воздействия приводит к псевдооживлению материала, когда его частицы могут легко мигрировать друг относительно друга. Таким образом, сам процесс грохочения складывается из трех составляющих: стохастическое (диффузионное) движение частиц мелкой фракции по высоте слоя, их миграция к поверхности сита и прохождение мелких частиц сквозь отверстия сита в мелкий продукт. Технологическая эффективность грохочения зависит от всех трех составляющих, и нахождение этой зависимости является довольно сложной задачей математического моделирования процесса.

По-видимому, впервые применение стохастических методов к моделированию кинетики грохочения было описано в [2], а дальнейшее развитие в трудах сотрудников «Механобр» [3–6]. Среди зарубежных работ по этому вопросу можно отметить статью [7] и ряд других. Все эти работы, так или иначе, базируются на теории марковских процессов и ориентированы на получение аналитических расчетных зависимостей для эффективности грохочения, для чего вводятся специальные допущения, зачастую весьма далеко идущие. Развитие средств компьютерной поддержки инженерных расчетов выдвинуло на передний план стохастические модели, основанные на теории цепей Маркова. Теоретические основы применения теории цепей Маркова к моделированию процессов в дисперсных средах описаны в обзорной работе [8]. Детальное описание приложения этого подхода к моделированию и расчету

процессов в кипящем слое с экспериментальной проверкой расчетных результатов [9] подтвердило его прогностические возможности. Наконец, в [10] предложено описание кинетики грохочения на основе теории цепей Маркова. Рассчитанная на его основе кинетика грохочения хорошо соответствовала экспериментальным данным до степени извлечения мелкой фракции на 70–80 %, но при больших степенях извлечения давала завышенные результаты. На наш взгляд, это было вызвано тем, что модель не учитывала нелинейность конвективной миграции частиц в слое, а главное, отсутствием изменения высоты слоя по мере извлечения мелкой фракции и связанным с ним изменением характеристик составляющих процесса. Ниже предлагается ячеечная модель процесса, свободная от этих допущений.

Расчетная схема процесса показана на рис. 1,а. Смесь мелкой и крупной фракции, представляющая исходный материал, расположена слоем высотой h на вибрирующем сите. В результате наложения вибрации мелкая фракция мигрирует вниз к поверхности сита, причем этот процесс сопровождается диффузионным перемешиванием частиц фракции. Достигнув поверхности сита, частицы мелкой фракции, преодолев препятствие к прохождению ячейками сита, выводятся в подрешетный продукт. В пределе в подрешетный продукт уходит вся мелкая фракция, но этот процесс может занимать длительное время. По мере ухода мелкой фракции меняется и высота ее слоя над ситом.

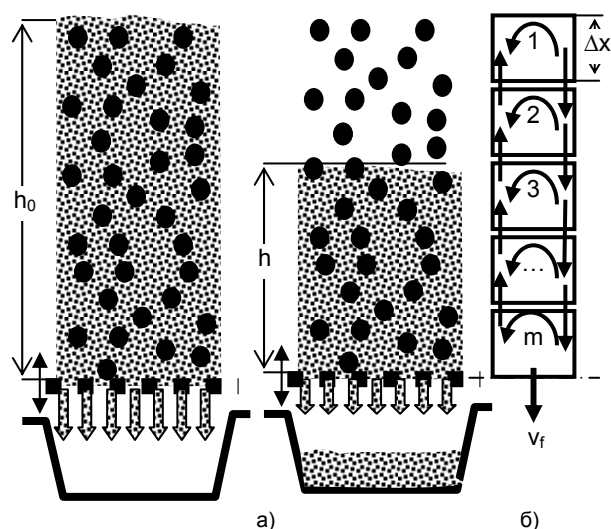


Рис. 1. Расчетная схема процесса (а) и его ячейчная модель (б)

На рис. 1,б показана ячеечная модель процесса, в которой высота слоя разбита на m ячеек идеального перемешивания высотой $\Delta x = h/m$. Считается, что каждая ячейка вмещает единичную объемную порцию компонентов или смеси независимо от ее состава. Процесс наблюдается в дискретные моменты времени $t_k = (k-1)\Delta t$, где Δt – продолжительность; k – номер временного перехода (дискретный аналог времени). В течение времени перехода частицы могут перейти в соседние ячейки, т. е. вверх или вниз, и остаться в ячейке. Направления возможных переходов показаны на рис. 1,б стрелками. Для мелкой фракции доли частиц, переносимых из ячеек вниз, больше, чем доли частиц переносимых вверх, что вызвано конвективным переносом мелкой фракции к поверхности сита. Из этих долей можно выделить симметричную (чисто диффузионную) составляющую d и несимметричную составляющую v , обусловленную конвективным переносом. Эти составляющие связаны с натуральными характеристиками процесса соотношениями $d = D\Delta t/\Delta x^2$ и $v = V\Delta t/\Delta x$, где D – коэффициент макродиффузии; V – размерная скорость сегрегации, т. е. конвективного переноса.

Из нижней ячейки частицы мелкой фракции могут уйти в подрешетный продукт и навсегда покинуть процесс, в результате чего высота слоя мелкой фракции убывает с течением времени, что не может не отразиться на самой скорости выхода мелкой фракции под сито.

В каждый момент времени распределение содержания мелкой фракции по ячейкам характеризуется вектором-столбцом $\mathbf{S}^k$ размера $m \times 1$. Эволюция этого вектора с течением времени (от перехода к переходу) описывается рекуррентным матричным равенством

$$\mathbf{S}^{k+1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}^k, \quad (1)$$

где $\mathbf{P}$ – переходная матрица (матрица переходных вероятностей), которая для закрытого сита имеет вид [10]

$$\mathbf{P}^k = \begin{bmatrix} p_{s1}^k & p_{u2}^k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_{d1}^k & p_{s2}^k & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_{d2}^k & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & p_{s(m-1)}^k & p_{u1}^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{d(m-1)}^k & p_{sm}^k \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где p_u^k – вероятности перейти в течение Δt в верхнюю соседнюю ячейку; p_d^k – вероятности перейти в течение Δt в нижнюю соседнюю ячейку; p_s^k – вероятности в течение Δt остаться в данной ячейке.

В соответствии с принимаемыми допущениями, эти вероятности рассчитываются по следующим формулам:

$$p_{uj}^k = d = \text{const}; \quad (3)$$

$$p_{dj}^k = d + v_0(1 - S_{j+1}^k); \quad (4)$$

$$p_{sj}^k = 1 - p_{uj}^k - p_{dj}^k, \quad (5)$$

где v_0 – интенсивность сегрегации мелкой фракции в ячейку без мелкой фракции; множитель $(1 - S_{j+1}^k)$ учитывает замедление сегрегации по мере заполнения следующей ячейки мелкой фракцией. Равенство (5) следует из условия нормировки.

Изменение высоты слоя учитывается в матрице $\mathbf{P}$ следующим образом. Убывание мелкой фракции происходит более интенсивно в верхних ячейках цепи. Если в какой-то ячейке с номером i содержание мелкой фракции S_i^k становится меньше некоторого наперед заданного малого значения β , то содержание S_i^k переносится в следующую ячейку $i+1$, содержание фракции в ячейке i приравнивается к нулю, приравнивается к нулю и вероятность перехода из этой ячейки вверх ($p_{ui}^k = 0$), что запирает i верхних ячеек цепи, а оставшиеся внизу ячейки составляют новую высоту слоя.

Выход мелкой фракции в подрешетный продукт может быть описан за пределами матрицы $\mathbf{P}$ следующим образом. Пусть на каждом временном переходе после воздействия на вектор состояния $\mathbf{S}^k$ матрицей $\mathbf{P}$ из нижней ячейки цепи выводится доля v_f^k содержащейся в ней мелкой фракции, т. е. ее выход составляет

$$q^{k+1} = S_m^{k+1} v_f^k, \quad (6)$$

а оставшаяся в ней доля мелкой фракции равна

$$S_m^{k+1} := S_m^{k+1} (1 - v_f^k), \quad (7)$$

где $:=$ – оператор присваивания.

Полный выход мелкой фракции за $(k+1)$ переход рассчитывается по формуле

$$Q^{k+1} = \sum_0^{k+1} q^{k+1}, \quad (8)$$

а его относительное значение по отношению к первоначальному содержанию этой фракции, являющееся искомой степенью извлечения ε , вычисляется как

$$\varepsilon^{k+1} = \frac{Q^{k+1}}{S_0 m}, \quad (9)$$

где S_0 – относительное содержание мелкой фракции в сырье при ее равномерном распределении по высоте слоя.

Принципиальным вопросом рассматриваемого моделирования является вопрос о том, как зависит величина v_f^k от высоты слоя. Если считать $v_f^k = \text{const}$, то учет переменности высоты слоя практически ничего не дает, поскольку от него отсекаются верхние ячейки, уже содержащие очень малое количество мелкой фракции. Однако если считать, что материал находится в виброоживленном состоянии, то его по-

ведение аналогично поведению капельной жидкости, а скорость прохода мелкой фракции сквозь сито может рассматриваться как скорость ее истечения под напором, определяемым высотой слоя h (рис. 1,а) или числом работающих ячеек $m-i$. Поэтому в первом приближении можно принять, что

$$v_f^k = v_{f0} \sqrt{\frac{m-i(k)}{m}}, \quad (10)$$

где $(m-i(k))$ – выраженная через число ячеек переменная высота слоя; v_{f0} – скорость истечения при начальной высоте слоя m .

Равенства (1)–(10) полностью описывают кинетику нелинейного процесса грохочения при слое материала переменной высоты на сите грохота. Рассмотрим некоторые результаты численных экспериментов с этой моделью. На рис. 2 показано сравнение эволюции распределения содержания мелкой фракции по высоте слоя при постоянной ($v_f = \text{const}$) и переменной (10) скорости извлечения при $d = 0,05$; $v_0 = 0,5$; $v_{f0} = 0,05$; $S_0 = 0,8$.

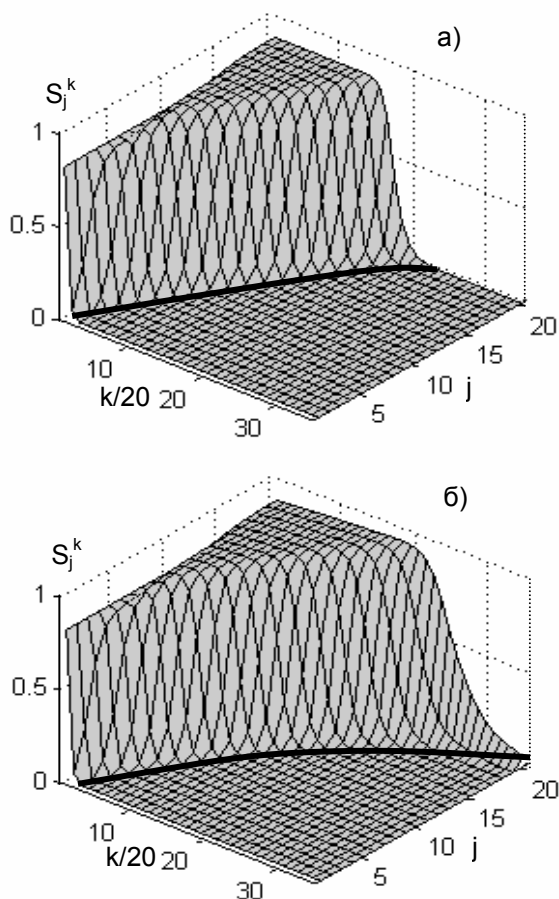


Рис. 2. Эволюция распределения содержания мелкой фракции по высоте слоя при постоянной (а) и переменной (б) скорости извлечения (жирная линия – изменение высоты слоя)

Очевидно, что модель с постоянной скоростью извлечения дает заметно более быстрое убывание высоты слоя и в конечном сче-

те более быстрое полное извлечение мелкой фракции, причем высота слоя меняется практически по линейному закону, что не согласуется с известными опытными данными [7]. При скорости извлечения, зависящей от высоты слоя мелкой фракции, на начальной стадии кинетика распределения в обоих случаях почти одинакова, однако с дальнейшим убыванием скорости извлечения в случае (б) процесс заметно замедляется. Это же можно наблюдать и на рис. 3, где нанесены графики кинетики извлечения, рассчитанные по обеим моделям.

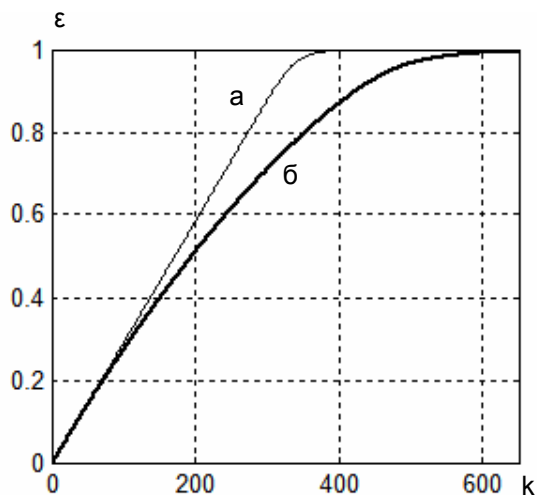


Рис. 3. Кинетика извлечения мелкой фракции при постоянной (а) и переменной (б) скорости извлечения

По модели (б) извлечение мелкой фракции значительно замедляется после примерно половины ее извлечения, особенно при высоких степенях извлечения (больших 70 %). Это качественно соответствует многочисленным опытными данным, то есть обеспечивает более адекватное описание процесса. Последнее позволяет положить эту модель в основу инженерного метода расчета процесса и повысить его прогностическую ценность.

Список литературы

1. **Техника** и технология обогащения углей / В.В. Беловолов, Ю.Н. Бочков, М.В. Давыдов и др.; под ред. В.А. Чантурия, А.Р. Молявко. – М.: Наука, 1995. – 622 с.
2. **Непомнящий Е.А.** Кинетика некоторых процессов переработки дисперсных материалов // Теоретические основы химических технологий. – 1973. – Т. 7, № 5. – С. 754–763.
3. **Вайсберг Л.А., Рубисов Д.Г.** Вибрационное грохочение сыпучих материалов: моделирование процесса и технологический расчет грохотов. – СПб.: Институт «Механобр», 1994. – 47 с.
4. **Вайсберг Л.А.** Теоретические основы грохочения: учеб. пособие. – СПб.: СПбГИ (технический университет), 2003. – 61 с.
5. **Вайсберг Л.А.** Проектирование и расчет вибрационных грохотов. – М.: Недра, 1986. – 144 с.
6. **Vaisberg L.A., Rubisov D.N.** Mathematische Beschreibung der Vibrationssiebung // Aufbereitungs Technik. – 1990. – № 3. – S. 378–386.

7. Ferrara G. Modelling of screening operations // Intern. J. of Mineral Processsing. – 1988. – V. 22, № 1. – P. 193–222.
8. Berthiaux H., Mizonov V. Applications of Markov Chains in Particulate Process Engineering: A Review // The Canadian Journal of Chemical Engineering. – 2004. – V. 85, № 6. – P. 1143–1168.
9. Mizonov V., Mitrofanov A., Ogurtsov A., Tannous K. Modeling of Particle Concentration Distribution in a Fluidized Bed by Means of the Theory of Markov Chains // Particulate Science and Technology: An International Journal. – 2014. – V. 32, issue 2. – P. 171–178.
10. Огурцов В.А. Стохастическая модель распределения проходных частиц в слое сыпучего материала при виброгрохочении // Строительные материалы. – 2007. – №11. – С. 38–39.

References

1. Belovolov, V.V., Bochkov, Yu.N., Davydov, M.V. *Tekhnika i tekhnologiya obogashcheniya ugley* [Techniques and technology of coal preparation]. Moscow, Nauka, 1995. 622 p.
2. Nepomnyashchii, E.A. Kinetika nekotorykh protsessov pererabotki dispersnykh materialov [Kinetics of some particulate treatment processes]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskikh tekhnologiy*, 1973, vol. 7, no. 5, pp. 754–763.
3. Vaysberg, L.A., Rubisov, D.G. *Vibratsionnoe grokhochenie sypanykh materialov: modelirovanie protsessa i*

tekhnologicheskii raschet grokhotov [Vibration screening of bulk materials: process modeling and screen process design]. Saint-Petersburg, Institut « Mekhanobr», 1994. 47 p.

4. Vaysberg, L.A. *Teoreticheskie osnovy grokhocheniya* [Screening theory: study guide]. Saint-Petersburg, SPbGGI (tekhnicheskii universitet), 2003. 61 p.

5. Vaysberg, L.A. *Proektirovanie i raschet vibratsionnykh grokhotov* [Design and calculation of vibration screens]. Moscow, Nedra, 1986. 144 p.

6. Vaisberg, L.A., Rubisov, D.N. *Mathematische Beschreibung der Vibrationssiebung. Aufbereitungs Technik*, 1990, no. 3, pp. 378–386.

7. Ferrara, G. Modelling of screening operations. Intern. J. of Mineral Processsing, 1988, vol. 22, no. 1, pp.193– 222.

8. Berthiaux, H., Mizonov, V. Applications of Markov Chains in Particulate Process Engineering: A Review. The Canadian Journal of Chemical Engineering, 2004, vol. 85, no. 6, pp.1143–1168.

9. Mizonov, V., Mitrofanov, A., Ogurtsov, A., Tannous, K. Modeling of Particle Concentration Distribution in a Fluidized Bed by Means of the Theory of Markov Chains. Particulate Science and Technology: An International Journal, 2014, vol. 32, issue 2, pp. 171–178.

10. Ogurtsov, V.A. *Stokhasticheskaya model' raspredeleniya prokhodovykh chastits v sloe sypanyego materiala pri vibrogrokhochenii* [Stochastic model of fine particle distribution in a bulk material layer in the process of vibration screening]. *Stroitel'nye materialy*, 2007, no. 11, pp. 38–39.

Алешина Анна Павловна,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный политехнический университет»,
аспирант кафедры технологии строительного производства,
телефон (4932) 38-01-45,
e-mail: annaricci89@mail.ru

Огурцов Валерий Альбертович,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный политехнический университет»,
доктор технических наук, зав. кафедрой технологии строительного производства,
телефон (4932) 38-01-45,
e-mail:ogurtzovvawork@mail.ru

Мизонов Вадим Евгеньевич,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой прикладной математики,
e-mail: mizonov46@mail.ru

Митрофанов Андрей Васильевич,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики,
e-mail: and2mit@mail.ru