УДК 519.6

Разработка метода численного моделирования магнитного поля на основе классических положений электромагнетизма

А.И. Тихонов, А.С. Шмелев, Е.Г. Розин
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: ait@dsn.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Большинство современных систем численного моделирования физических полей основаны на методах, сводящих задачу к решению системы алгебраических уравнений. В то же время растет популярность имитационных методов моделирования, легко адаптируемых к развивающимся технологиям параллельных вычислений. В частности, в классической теории электромагнетизма рассматривается закон Био–Савара–Лапласа, который редко используется в численных расчетах.
Материалы и методы: Разработанный метод основан на законе Био–Савара–Лапласа. При разработке использованы эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода, теория рядов, методы численной математики.
Результаты: Разработан математический аппарат оригинальной версии метода моделирования магнитного поля на основе закона Био–Савара–Лапласа, позволяющего рассчитывать трехмерное стационарное магнитное поле с учетом нелинейности магнитных характеристик ферромагнитных сред.
Выводы: Разработанная модель отличается от традиционных методов расчета магнитного поля своей простотой и легкостью реализации в технологии параллельных вычислений. Имеются резервы в плане ускорения расчетов, связанные с отсутствием необходимости в ряде задач рассчитывать поле во всех точках расчетной области. Модель может использоваться при решении открытых полевых задач без граничных условий.

Ключевые слова: закон Био–Савара–Лапласа, теория магнитного поля, численные методы расчета, имитационное моделирование, технология параллельных вычислений.

Development of a magnetic field numerical simulation method based on classical electromagnetism provisions

A.I. Tikhonov, A.S. Shmelev, E.G. Rozin
Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation
E-mail: ait@dsn.ru

Abstract

Background: Most modern systems of numerical modeling of physical fields are based on the methods that render the problem as solving a system of algebraic equations. At the same time, simulation modeling techniques adaptable to emerging technologies of parallel computing are gaining more and more popularity. In particular, the classical theory of electromagnetism considers the Biot-Savart-Laplace law, which is rarely used in numerical calculations.
Materials and methods: The developed method is based on the Biot-Savart-Laplace law. The development also employed the Legendre elliptic integrals of the first and second kind, the theory of series, methods of numerical mathematics.
Results: The authors have developed a mathematical tool of the original version of the magnetic field modeling method based on the Biot-Savart-Laplace law making it possible to calculate three-dimensional steady-state magnetic field taking into account the nonlinearity of ferromagnetic media magnetic characteristics.
Conclusions: The developed model differs from traditional methods of magnetic field calculation by its simplicity and ease of implementation in parallel computing technology. There is a scope to accelerate the calculations as in a number of tasks it is not necessary to calculate the field at all points in the computational domain. The model can be used in solving open field problems without boundary conditions.

Key words: Biot-Savart-Laplace law, magnetic field theory, numerical methods of calculation, simulation modeling, parallel computing technology.

Большинство современных систем инженерных расчетов (численного моделирования физических полей) основаны либо на методе конечных элементов, либо на методе конечных разностей [1, 2]. Данные методы сводят решение задачи к системе нелинейных алгебраических уравнений, что сопряжено с определенными проблемами при адаптации данных методов к технологии параллельных вычислений. Поэтому поиск новых решений в плане моделирования физических полей нельзя считать завершенным. Особенно интересные перспективы возникают в связи с развитием имитационных методов моделирования физических полей, основанных на методе Монте-Карло, которые распараллеливаются достаточно просто и естественно [3]. Однако возможности персональной вычислительной техники пока еще не позволяют в полной мере реализовать достоинст-

© ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»

ва метода Монте-Карло, требующего значительных вычислительных ресурсов.

В то же время идея имитационного моделирования может быть реализована не только на основе метода Монте-Карло, но и на основе классических моделей. Так, в классической теории электромагнетизма для расчета магнитного поля от проводника с током часто используется закон Био–Савара–Лапласа, играющий в магнитостатике такую же роль, что и закон Кулона в электростатике [4].

Согласно данному закону, элемент проводника $d\vec{l}$, по которому протекает ток I, создает в пространстве вокруг себя магнитное поле с индукцией

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I\left[d\vec{l}\times\vec{r}\right]}{4\pi r^3} \quad (1)$$

или

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\left[\vec{j}\times\vec{r}\right]}{4\pi r^3}dV. \quad (2)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения; μ_0 – магнитная постоянная; dV – элемент объема, занятого проводником с током; $\vec{j}$ – плотность тока в элемента dV.

Разбивая проводники с током на элементарные объемы ΔV_i с заданной плотностью тока $\vec{j}_i$, можно рассчитать по методу суперпозиции величину индукции в любой точке пространства, заданной радиус-вектором $\vec{r}_i$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_V \frac{\mu_0\left[\vec{j}\times\vec{r}\right]}{4\pi r^3}dV \approx \sum_{i=1}^{N}\frac{\mu_0\left[\vec{j}_i\times\vec{r}_i\right]}{4\pi r_i^3}\Delta V_i, \quad (3)$$

где N – количество элементарных объемов с заданной плотностью тока.

Проблема возникает при решении задач расчета магнитного поля в неоднородной среде, особенно если имеются ферромагнитные подобласти с нелинейными магнитными характеристиками. В классической электродинамике данная проблема решается с использованием вектора намагниченности [4]

$$\vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}, \quad (4)$$

вследствие чего закон полного тока при наличии ферромагнитных сред принимает вид

$$\oint_L\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}\right)d\vec{L} = \int_S \vec{j}d\vec{S}, \quad (5)$$

где $\vec{B}$ – индукция магнитного поля, создаваемого в элементе dV внешними источниками; $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля, создаваемого внешними источниками, величина которой определяется по кривой намагничивания $H = f(B)$ для данного ферромагнитного материала; направление векторов $\vec{H}$ и $\vec{J}$ совпадает с направлением вектора $\vec{B}$; $d\vec{S}$ – вектор нормали к элементарному сечению проводника dS.

Для учета ферромагнитных сред можно имитировать магнитные домены, аналогично тому, как это было предложено в [3]. Для этого подобласть, заполненная ферромагнитной средой, разбивается на кубические ячейки, внутри которых помещается круглый контур с током, способный вращаться в трех степенях свободы вокруг центральной точки ячейки. Диаметр контура равен линейному размеру ячейки h. Контур поворачивается так, чтобы вектор нормали к его плоскости был всегда направлен вдоль вектора $\vec{B}$ магнитной индукции, создаваемого внешним полем по отношению к данной ячейке. Направление наведенного тока в контуре определяется из условия, что данный ток усиливает внешнее поле. Величина наведенного тока рассчитывается по вектору намагниченности как

$$i_0 = JdI \approx Jh, \quad (6)$$

где dl – длина силовой линии внешнего поля в пределах ячейки.

Наведенные токи в контурах в ферромагнитных ячейках становятся дополнительными источниками магнитного поля. Составляющие индукции магнитного поля от контура с током в любой точке пространства в локальной цилиндрической системе координат (r,z), связанной с центром контура и осью z, совпадающей с осью контура, находятся по следующим формулам [5]:

$$B_z(r,z) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left(K(k) + \frac{a^2-r^2-z^2}{(a-r)^2+z^2}E(k)\right); \quad (7)$$

$$B_r(r,z) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi}\frac{z}{r\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left(-K(k) + \frac{a^2+r^2+z^2}{(a-r)^2+z^2}E(k)\right); \quad (8)$$

$$\mathrm{B(r,z)} = \sqrt{\mathrm{B_z^2(r,z)} + \mathrm{B_r^2(r,z)}}, \quad (9)$$

где k – модуль эллиптического интеграла:

$$k = \sqrt{\frac{4ar}{(a+r)^2+z^2}}; \quad (10)$$

$K(k)$ – полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода [6]:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}; \quad (11)$$

$E(k)$ – полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра 2-го рода [6]:

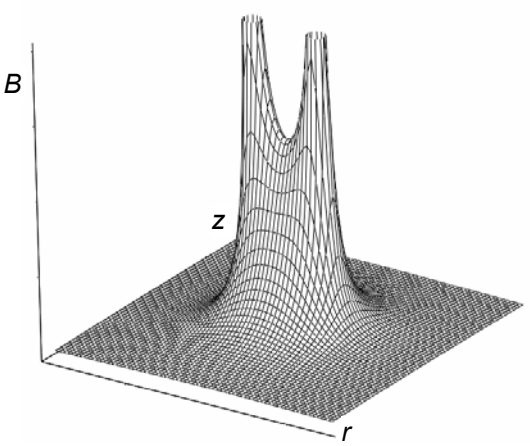
$$E(k) = \int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\right)d\psi; \quad (12)$$

a – радиус рамки с током

$$a = \frac{h}{2}. \quad (13)$$

На рисунке представлена картина магнитного поля, созданного круговым током в сечении, проходящем через ось рамки z и произвольно выбранный радиус r.

© ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»



Распределение магнитной индукции от рамки с током

Формулы (7), (8) можно использовать, только если расчетная точка с координатами (*r,z*) находится достаточно далеко от оси контура, т. е. при $r > \varepsilon$, где ε – заданное достаточно малое расстояние. При $r \le \varepsilon$ можно воспользоваться формулой для расчета магнитной индукции на оси круглого контура с током [4]:

$$B(r,z) = B_z(r,z) = \frac{\mu_0 i_0 a^2}{2\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}}. \qquad (14)$$

Расчет по (7), (8) требует расчета эллиптических интегралов Лежандра первого и второго рода (11), (12), что в циклических алгоритмах сопряжено с относительно большими временными затратами. Расчет можно ускорить, если использовать для вычисления эллиптических интегралов Лежандра формулы разложения в ряд [6]:

$$K(k) \approx \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{N}\left(\left[\frac{1}{2^n n!}\prod_{i=1}^{n}(2i-1)\right]^2 k^{2n}\right)\right]; \qquad (15)$$

$$E(k) \approx \frac{\pi}{2}\left[1 - \sum_{n=1}^{N}\left(\left[\frac{1}{2^n n!}\prod_{i=1}^{n}(2i-1)\right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}\right)\right], \qquad (16)$$

где N – количество элементов ряда, которое для достижения точности, достаточной в инженерных задачах, можно принять равным 5.

Формулы (7), (8) можно использовать только для расчета индукции в ячейках, которые расположены в непосредственной близости от рамки с током, т. е. когда $r = (1 \div 10)h$. Если же $r >> h$, то для ускорения расчета можно воспользоваться формулой, аналогичной формуле напряженности электрического диполя [7]:

$$\vec{B}(r,z) = \frac{\mu_0}{4}\frac{i_0 a^2}{r^3}\left[3\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\cos\left(\vec{z}\,\hat{}\,\vec{r}\right) - \vec{z}\right], \qquad (17)$$

где $\vec{z} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси рамки с током. При этом потери точности составляют не более 1,5 %.

Для пересчета величины $\vec{B}(r,z)$ из локальной цилиндрической в глобальную декартову систему координат (*X,Y,Z*) используются следующие соотношения:

$$\begin{cases} B_x(X,Y,Z) = B_z(r,z)\cos\alpha_z + B_r(r,z)\cos\alpha_r, \\ B_y(X,Y,Z) = B_z(r,z)\cos\beta_z + B_r(r,z)\cos\beta_r, \\ B_z(X,Y,Z) = B_z(r,z)\cos\gamma_z + B_r(r,z)\cos\gamma_r; \end{cases} \qquad (18)$$

$$B(X,Y,Z) = \sqrt{B_x^2(X,Y,Z) + B_y^2(X,Y,Z) + B_z^2(X,Y,Z)}, \qquad (19)$$

где $\alpha_z, \beta_z, \gamma_z$ – углы между осью рамки *z* и осями *X,Y,Z* декартовой системы координат; $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ – углы между осью *r* и осями *X,Y,Z* (ось *r* выбирается таким образом, чтобы точка с координатами *X,Y,Z* в декартовой системе координат лежала в плоскости, образованной осями *z* и *r* локальной цилиндрической системы координат).

Для расчета магнитной индукции поля, созданного контуром с током в точке (*X,Y,Z*), необходимо сначала рассчитать ее координаты в локальной цилиндрической системе координат, связанной с данным контуром:

$$z = (X - X_0)\cos\alpha_z + (Y - Y_0)\cos\beta_z + (Z - Z_0)\cos\gamma_z; \qquad (20)$$

$$r = \sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 - z^2}; \qquad (21)$$

где (X_0, Y_0, Z_0) – координаты центра рамки в глобальной системе координат (*X,Y,Z*).

После этого рассчитываются составляющие магнитной индукции $B_z(r,z)$ и $B_r(r,z)$. Затем по (18), (19) рассчитываются составляющие магнитной индукции в глобальной системе координат (*X,Y,Z*).

С учетом наведенных токов в ячейках с ферромагнитной средой формула для расчета индукции в каждой *k*-й ячейке принимает вид

$$\vec{B}_k = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left[\vec{j}_i \times \vec{r}_{ki}\right]}{r_{ki}^3} + \sum_{i=1}^{N_f}\vec{B}_{ki}, \qquad (22)$$

где первая сумма, аналогично (3), определяет вклад в магнитную индукцию в *i*-й точке от токов в проводниках, а вторая сумма, слагаемые которой рассчитываются по (9), определяет вклад в магнитную индукцию в *k*-й точке от наведенных токов в каждой из N_f ячеек, занятых ферромагнитной средой.

Алгоритм расчета магнитного поля состоит в вычислении значений магнитной индукции по (22) в центрах всех ячеек, интересных с точки зрения решения прикладной задачи. Для учета нелинейности расчет осуществляется в ходе ряда итераций, в каждой из которых уточняются величины наведенных круговых токов, имитирующих домены ферромагнитных областей.

Приведенный математический аппарат имеет ряд достоинств по сравнению с традиционными методами расчета:

1) простота алгоритма расчета;

2) простота реализации данного алгоритма в технологии параллельных вычислений, в частности в технологии CUDA, с использованием многопроцессорных графических ускорителей;

3) возможность вести расчет только в интересующих нас точках (учитывается только

© ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»

вклад в совокупное поле ячеек с током и с ферромагнитной средой, что позволяет уменьшить расчетное время);

4) отсутствие граничных условий Дирихле или Неймана, необходимость задания которых в традиционных методах решения краевых задач может привести к существенным погрешностям вблизи границ расчетной области.

Разработанный метод планируется использовать при расчете магнитного поля сухого трансформатора, где преимущества данного метода оказываются наиболее явными.

Список литературы

1. **Басов К.А.** ANSYS в примерах и задачах. – М.: КомпьютерПресс, 2002. – 224 с.
2. **ELCUT:** Моделирование двумерных полей методом конечных элементов. Версия 5.4: руководство пользователя. – СПб.: Производственный кооператив ТОР, 2007. – 297 с.
3. **Тихонов А.И., Севрюгов Д.М.** Разработка имитационной модели магнитного поля на основе теории подобия и метода Монте-Карло // Вестник ИГЭУ. – 2014. – Вып. 2. – С. 31–36.
4. **Савельев И.В.** Курс общей физики. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – 2-е изд. перераб. – М.: Наука, 1982. – 496 с.
5. **Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.** Сборник задач по электродинамике / под ред. М.М. Бредова. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 480 с.
6. **Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.** Специальные функции. Формулы, графики, таблицы: пер. с нем. – 6-е изд. перераб. / под ред. Л.И. Седова. – М.: Наука, 1977. – 342 с.
7. **Матвеев А.Н.** Электричество и магнетизм: учеб. пособ. – М.: Высш. шк., 1983. – 463 с.

References

1. Basov, K.A. *ANSYS v primerakh i zadachakh* [ANSYS examples and problems]. Moscow, Komp'yuterPress, 2002. 224 p.
2. *ELCUT: Modelirovanie dvumernykh poley metodom konechnykh elementov. Versiya 5.4: rukovodstvo pol'zovatelya* [Two-dimensional field modeling by the finite-element method. Version 5.4: user manual]. Saint-Petersburg, Proizvodstvennyy kooperativ TOR, 2007. 297 p.
3. Tikhonov, A.I., Sevryugov, D.M. Razrabotka imitatsionnoy modeli magnitnogo polya na osnove teorii podobiya i metoda Monte-Karlo [Magnetic field simulation model development based on similarity theory and Monte-Carlo method]. *Vestnik IGEU*, 2014, issue 2, pp. 31–36.
4. Savel'ev, I.V. *Kurs obshchey fiziki. Elektrichestvo i magnetizm. Volny. Optika* [General physics course. Electricity and magnetism. Waves. Optics]. Moscow, Nauka, 1982. 496 p.
5. Batygin, V.V., Toptygin, I.N. *Sbornik zadach po elektrodinamike* [A collection of electrodynamics problems]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1962. 480 p.
6. Yanke, E., Emde, F., Lesh, F. *Spetsial'nye funktsii. Formuly, gafiki, tablitsy* [Special functions. Formulae, graphs, tables]. Moscow, Nauka, 1977. 342 p.
7. Matveev, A.N. *Elektrichestvo i magnetizm* [Electricity and magnetism]. Moscow, Vysshaya shkola, 1983. 463 p.

Тихонов Андрей Ильич,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, доцент, зав. кафедрой физики,
e-mail: ait@dsn.ru

Шмелев Александр Сергеевич,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
аспирант,
e-mail: schmeloff@yandex.ru

Розин Евгений Геннадьевич,
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор физико-математических наук, доцент кафедры физики,
e-mail: admin@fizika.ispu.ru

© ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»