

УДК 004.942

Исследование процесса упругого деформирования с использованием метода дискретных элементов

С.П. Бобков, И.В. Полищук
ФГБОУВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: ajto@mail.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Рассмотрение процессов в твердых телах в рамках классических подходов, использующих модели сплошной среды, не всегда удобно, а в ряде случаев недостаточно корректно. Одним из направлений моделирования таких процессов может быть использование дискретных динамических подходов.

Материалы и методы: Предлагаемый подход использует модель в виде системы взаимосвязанных дискретных элементов. Модель получена в предположении о выполнении закона Гука для упругого тела и использует алгоритм численного интегрирования Рунге-Кутты-Фельберга.

Результаты: Получены данные о протекании процесса упругого деформирования твердых тел различной формы, в том числе и с дефектами структуры.

Выводы: Предложенный подход позволяет моделировать процесс деформирования твердых тел и исследовать их напряженное состояние при динамическом воздействии.

Ключевые слова: упругое деформирование, метод дискретных элементов, алгоритм численного интегрирования, твердое тело, дефект структуры, динамическое воздействие.

Investigation of elastic deformation by the discrete elements method

S.P. Bobkov, I.V. Polishchuk
Ivanovo State University of Chemistry and Technology, Ivanovo, Russian Federation
E-mail: ajto@mail.ru

Abstract

Background: Conventional approaches to studying processes in solids based on the continuum model are not always convenient and in some cases not consistent enough. One direction in simulation of such processes can be using discrete dynamic approaches.

Materials and methods: The proposed approach uses the model as a system of interconnected discrete elements. The model is obtained based on the assumption of Hooke's law validity for elastic bodies and uses the Runge- Kutta - Fehlbberg algorithm of numerical integration.

Results: Data was obtained about elastic deformation of solids of various shapes, including those with structural defects.

Conclusions: The suggested approach enables us to simulate the process of solids deformation and to investigate their state of stress under dynamic loads.

Key words: elastic deformation, discrete elements method, algorithm of numerical integration, solid, structural defect, dynamic load.

Вопросы анализа и моделирования процессов, протекающих в твердых телах при их деформации, являются основными при исследовании проблем прочности, надежности и долговечности оборудования. Этот аспект делает их очень важными для энергетических отраслей науки. Кроме того, в энергетике широко используются процессы измельчения твердых видов топлива, что также делает актуальными исследования в области механического нагружения и разрушения частиц.

Механическое поведение материалов обычно моделируется с помощью континуальных подходов, использующих уравнения механики сплошной среды. Однако при моделировании некоторых явлений, таких, например, как деформация и разрушение тел с неоднородной внутренней структурой, использование классических методов чрезвычайно затрудни-

тельно. В этих случаях хорошей альтернативой континуальным моделям могут быть дискретные динамические методы [1]. Одним из таких подходов является метод дискретных элементов, являющийся частным случаем моделей в виде систем клеточных автоматов [2]. Метод дискретных элементов рассматривает моделируемое твердое тело как совокупность связанных взаимодействующих локальных точек (элементов), в которых сосредоточена вся масса тела [3]. Каждый такой элемент определяется следующими параметрами:

- координаты $\vec{p}_i = \{p_x \ p_y\}$;
- скорость $\vec{v}_i = \{v_x \ v_y\}$;
- масса m_i ;
- перечень соседних элементов.

Поскольку при внешних воздействиях на тело оно деформируется, то элементы изменяют свое положение. При этом задача моделирования процесса деформирования сводится к вычислению новых координат и скоростей элементов тела на каждом дискретном шаге моделирования [4].

Рассмотрим процесс упругого деформирования твердого тела в двумерной постановке. Представим твердое тело как совокупность элементов, соединенных друг с другом посредством невесомых идеально упругих пружин (рис. 1).

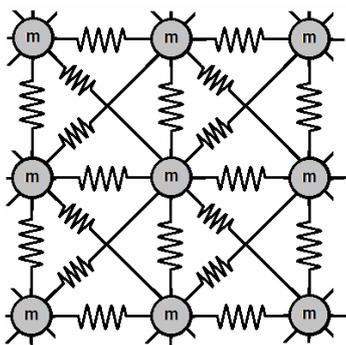


Рис. 1. Схема дискретной модели двумерного твердого тела

Отдельно рассмотрим изолированную пару взаимодействующих между собой элементов (рис. 2).

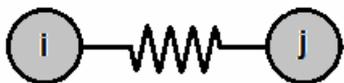


Рис. 2. Изолированная пара элементов

При моделировании упругого тела взаимодействие пар элементов должно подчиняться закону Гука:

$$F_{ij} = \frac{E_{ij}(d_{ij} - d_{ij}^0)}{d_{ij}^0}, \quad (1)$$

где E_{ij} – параметр жесткости связи между двумя соединенными элементами i и j ; d_{ij} – расстояние между элементами в текущем состоянии; d_{ij}^0 – расстояние между элементами в исходном (недеформированном) состоянии системы [5].

На элементы также может влиять сила тяжести:

$$P = m_i g, \quad (2)$$

где g – ускорение свободного падения.

Зная силы, действующие на элементы, определим их новые координаты и скорость, используя закон движения Ньютона:

$$m_i \vec{a}_i = F(\vec{p}, \vec{v}, t), \quad (3)$$

где \vec{a}_i – ускорение элемента.

Учитывая (1), (2) и (3), получим уравнение для суммы сил, действующих на произвольный элемент:

$$m_i a_i = m_i g + \sum_{j=1}^s \frac{E_{ij}(d_{ij} - d_{ij}^0)}{d_{ij}^0}. \quad (4)$$

Расстояния между элементами в уравнении (4) легко вычисляются из координат элементов. Учитывая тот факт, что ускорение есть первая производная скорости и вторая производная перемещения, получаем систему дифференциальных уравнений вида (4), решение которой позволяет вычислить скорости элементов и их новые координаты.

Таким образом, остается техническая проблема выбора подходящего метода численного решения системы уравнений, который обладал бы не только удовлетворительной точностью, но и достаточной скоростью. Последний параметр очень важен в силу значительной размерности получаемой системы уравнений (4).

В начале исследований в качестве численного метода решения системы нами был выбран широко используемый метод Верле (Verlet), привлекательный точностью и простотой вычислений:

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + a_n \Delta t^2. \quad (5)$$

Поскольку данный метод является явным, при его использовании шаг моделирования следует выбирать с учетом критерия Куранта-Фридрихса-Леви. Для двумерного случая он определяется следующим образом:

$$\frac{v_x \Delta t}{\Delta x} + \frac{v_y \Delta t}{\Delta y} < 1. \quad (6)$$

Метод Верле успешно использовался при моделировании достаточно простых случаев деформирования тел. Однако при усложнении задач выяснилось, что величина накапливаемой ошибки становится недопустимой. Было принято решение использовать методы из семейства прямых методов Рунге-Кутты, среди которых наибольшую популярность получил метод Рунге-Кутты 4 порядка.

Тем не менее численные эксперименты показали, что и этот алгоритм не всегда гарантирует сходимость решения. В первую очередь это вызвано тем, что моделируемое тело представляет собой систему осцилляторов, а уравнения, описывающие такие системы, относятся к жестким типам уравнений. Поэтому для дальнейших исследований нами был выбран метод Рунге-Кутты-Фельберга [6], являющийся, по сути, методом Рунге-Кутты 4 и 5 порядков. Его основной особенностью является возможность определять уровень ошибки и динамически менять шаг интегрирования по времени.

При численном моделировании процесса деформирования в качестве внешнего воздействия был выбран удар падающего тела о не-

подвижное препятствие. При этом возникла проблема обнаружения (локализации) столкновений элементов тела с препятствием. Для ее решения был использован алгоритм априорного определения. В общем случае он работает следующим образом: сначала определяется пересечение вектора движения элемента с отрезком-препятствием (рис. 3). Если такое пересечение имеет место, то определяется расстояние до отрезка-препятствия в начале итерации и после.

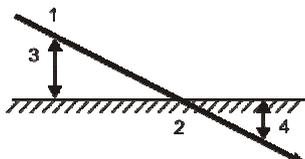


Рис. 3. Графическое представление работы априорного алгоритма обнаружения столкновения: 1 – вектор скорости элемента; 2 – препятствие; 3 – расстояние до препятствия в начале итерации; 4 – расстояние до препятствия после итерации

Далее вычисляется момент времени, в который произошло пересечение, по формуле

$$t = \frac{d_1}{(d_1 - d_2)}, \quad (7)$$

где d_1 – расстояние до препятствия в начале итерации; d_2 – расстояние до препятствия после итерации.

Таким образом, получаем момент времени столкновения с препятствием в относительных величинах к шагу моделирования по времени. В случае пересечения вектора движения элемента с поверхностью препятствия вычисленное по (7) значение находится в диапазоне от нуля до единицы. В данном случае меняем шаг моделирования, приравнявая его вычисленному по (7) значению, и пересчитываем итерацию снова. Таким образом, получаем ситуацию, когда относительный момент времени столкновения равен единице. Это значит, что элемент только касается препятствия и необходимо рассчитать скорость его отскока. Если при первоначальном расчете по формуле (7) получено значение больше единицы, считаем, что пересечения на текущей итерации не было.

Скорость отскока определяется из закона отражения

$$\vec{v} = \vec{v} - 2 \times \vec{n} \times (\vec{n} \cdot \vec{v}), \quad (8)$$

где \vec{n} – нормаль к поверхности препятствия.

В случае, если необходимо моделировать столкновение с не абсолютно упругим препятствием, пересчет скорости отскока выглядит следующим образом:

$$\vec{v} = \vec{v} - (1 + \eta) \times \vec{n} \times (\vec{n} \cdot \vec{v}), \quad (9)$$

где η – это коэффициент восстановления, который варьируется от нуля (абсолютно пластичный) до единицы (абсолютно упругий).

Как можно видеть, (8) и (9) эквивалентны в случае, если η равно единице.

Важной составляющей при моделировании столкновения элементов тела с препятствием является трение. В качестве модели был использован закон Амонтона-Кулона, устанавливающий связь между поверхностной силой трения, возникающей при относительном скольжении тела, и силой нормальной реакции, действующей на тело со стороны поверхности [7]. Таким образом, можно определить новую скорость с учетом трения, используя формулу

$$\vec{v} = \vec{v} - (1 - \mu) \times \vec{\tau} \times (\vec{\tau} \cdot \vec{v}), \quad (10)$$

где μ – коэффициент трения.

Адекватность полученной модели была проверена численными экспериментами. Ниже представлены примеры моделирования упругой деформации двумерных тел различной формы и структуры при свободном падении их на неподвижные неровные препятствия (рис. 4–6). Результаты получены с помощью специально разработанного программного приложения.

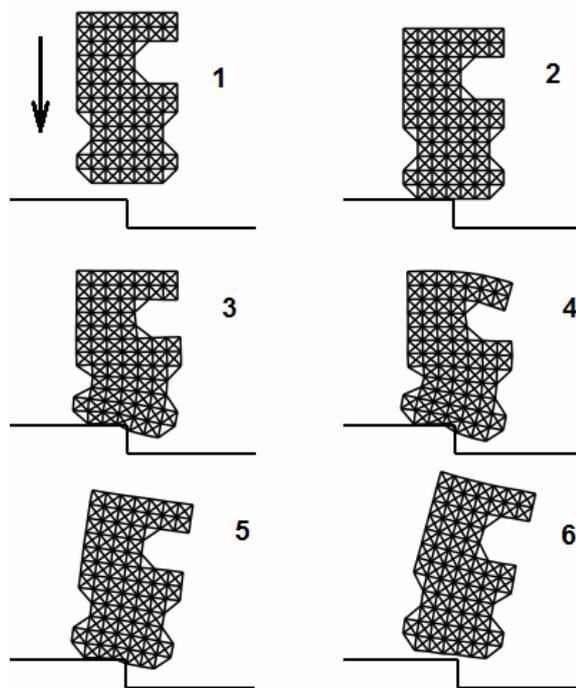


Рис. 4. Процесс упругого деформирования прямоугольного тела размера $0,08 \times 0,13$ м с дефектами структуры

При моделировании были приняты следующие основные параметры: материал тела – каучук (модуль Юнга – 10^7 Па; плотность – 1050 кг/м^3); шаг по времени – $0,05 \cdot 10^{-3}$ с; ускорение свободного падения – $9,81 \text{ м/с}^2$; скорость при столкновении – 10 м/с ; материал препятствия – гранит.

Отдельные кадры на рис. 4–6 представлены с интервалом $0,01$ с.

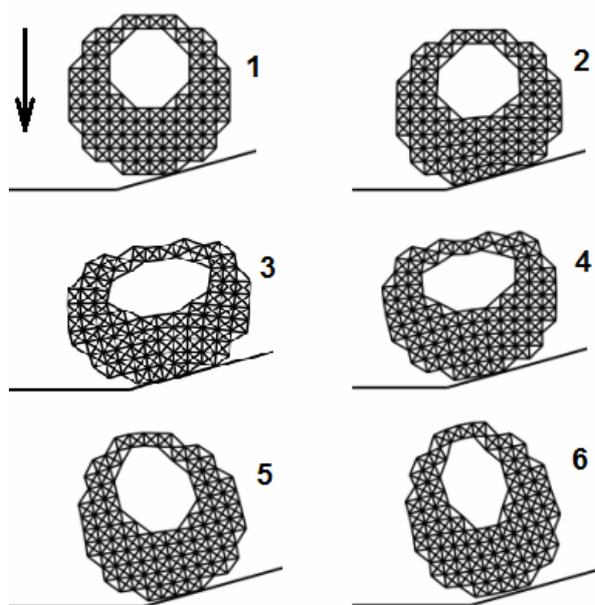


Рис. 5. Процесс упругого деформирования круглого тела радиусом 0,065 м с внутренней полостью

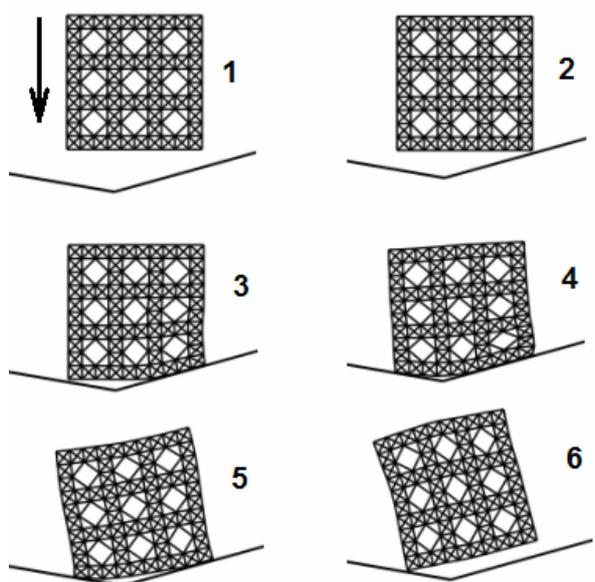


Рис. 6. Процесс упругого деформирования прямоугольного пористого тела размера 0,11×0,11 м

Заключение

Анализ результатов позволяет сделать вывод, что предложенный подход дает вполне

Бобков Сергей Петрович,
ФБГОУВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий,
e-mail: bsp@isuct.ru

Полищук Илья Викторович,
ФБГОУВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
аспирант кафедры информационных технологий,
e-mail: ajto@mail.ru

адекватные результаты и согласуется с общепринятыми положениями теории. Кроме того, при моделировании легко рассчитать деформации связей внутри тела и, при необходимости, действующие механические напряжения. Последнее дает возможность перейти к моделированию процессов разрушения тел при механической нагрузке или локализации наиболее напряженных участков конструкций.

Список литературы

1. **Бобков С.П.** Моделирование основных процессов переноса с использованием клеточных автоматов // Известия вузов. Химия и химическая технология. – 2009. – Т. 52. – Вып. 3. – С. 109–114.
2. **Toffoli T.** Cellular Automata Machines / Massachusetts Institute of Technolog. – Massachusetts, 1987.
3. **Psakhie S.G., Horie Y., Yu S.** Movable cellular automata method for simulating materials with mesostructure // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – Tomsk, 2001. – Vol. 37. – P. 311–334.
4. **Wang T.K., Chang C.S.** Fracture Modeling of Concrete Using Two Different Microstructural Mechanics Approaches // Mechanics of Materials Conference. – Sao Paulo, 2011. – 14 p.
5. **Лурье А.И.** Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
6. **Ernst Hairer, Syvert Nørsett, and Gerhard Wanner.** Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, second edition, Springer-Verlag. – Berlin, 1993.
7. **Сивухин Д.В.** Общий курс физики. Т. I. Механика. – М.: Наука, 1979. – С. 101–102.

References

1. Bobkov, S.P. Modelirovanie osnovnykh protsessov perenosa s ispol'zovaniem kletochnykh avtomatov [Simulation of the main transfer processes by using cellular automata]. *Izvestiya vuzov «Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya»*, 2009, vol. 52, issue 3, pp.109–114.
2. Toffoli, T. Cellular Automata Machines. Massachusetts, 1987.
3. Psakhie, S.G., Horie, Y., Yu, S. Movable cellular automata method for simulating materials with mesostructure. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. Tomsk, 2001, vol. 37, pp. 311–334.
4. Wang, T.K., Chang, C.S. Fracture Modeling of Concrete Using Two Different Microstructural Mechanics Approaches. *Mechanics of Materials Conference*. Sao Paulo, 2011. 14 p.
5. Lur'e, A.I. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1970. 940 p.
6. Ernst Hairer, Syvert Nørsett, Gerhard Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, second edition, Springer-Verlag. Berlin, 1993.
7. Sivukhin, D.V. *Obshchiy kurs fiziki. T. I. Mekhanika* [General course of physics. Vol. I Mechanics]. Moscow, Nauka, 1979, pp. 101–102.