УДК 37.523.9

Моделирование процесса теплопереноса в движущейся жидкости

А.С. Чернявская, С.П. Бобков
ФБГОУВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: mayananas@mail.ru, bsp@isuct.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Классическим подходом при решении задач теплопереноса в движущейся жидкости является использование математических моделей в виде дифференциальных уравнений в частных производных. Однако при их использовании получить аналитические решения возможно только для самых простых случаев, а численные методы не всегда обладают необходимой устойчивостью. Поэтому все большее внимание уделяется альтернативным подходам, например использование для моделирования данных процессов систем клеточных автоматов.
Материалы и методы: Предлагаемый подход использует двухмерную модель решетчатого газа, поведение которого описывается дискретным аналогом уравнения Больцмана. Созданное с использованием указанной модели программное приложение позволяет моделировать и визуализировать исследуемый процесс.
Результаты: Предложен подход и алгоритм его численной реализации, позволяющие анализировать поведение нагретой жидкости в объектах сложной геометрической формы, что затруднительно при использовании классических математических моделей.
Выводы: Показано, что результаты моделирования процессов движения нагретой жидкости, ее взаимодействия со стенками и препятствиями, имеющими иную температуру, соответствуют общепринятым представлениям о реальных процессах в движущейся жидкости.

Ключевые слова: клеточные автоматы, решетчатый газ, метод Больцмана, теплоперенос, скоростной канал, локальный тепловой источник, теплоотдача.

Simulation of heat transfer in a moving fluid

A.S. Chernyavskaya, S.P. Bobkov
Ivanovo State University of Chemistry and Technology, Ivanovo, Russian Federation
E-mail: mayananas@mail.ru, bsp@isuct.ru

Abstract

Background: A classical approach to the problems of heat transfer in a moving fluid is using mathematical models in the form of partial differential equations. However, when such models are used, analytical solutions can only be obtained in the simplest cases, and numerical methods are not always stable enough. Therefore, more and more attention is paid to alternative approaches, such as using cellular automata systems for simulation of these processes.
Materials and methods: The proposed approach employs a two-dimensional model of lattice gas, the behavior of which is described by a discrete analogue of the Boltzmann equation. Based on this model, the software application allows simulation and visualization of the process under study.
Results: The proposed approach and its numerical implementation allow us to analyze the behavior of heated fluid in objects of complex geometric shapes, which is difficult to do by classical mathematical models.
Conclusions: It is shown that the results of modeling a heated fluid motion, its interaction with the walls and obstacles of different temperature correspond to the generally accepted ideas about the real processes in a moving fluid.

Key words: cellular automata, lattice gas, Boltzmann method, heat transfer, speed channel, local heat source, heat emission.

Проблема расчета и моделирования переноса тепла в движущейся жидкости является очень важной для энергетики, поскольку данное явление лежит в основе большинства тепловых процессов – нагревания, охлаждения, конденсации и пр. Это делает моделирование процессов в движущихся жидкостях и газах очень важной прикладной задачей при исследовании энергетических систем.

Традиционное моделирование процессов тепло- и массопереноса в жидкости обычно базируется на использовании дифференциальных уравнений в частных производных. В процессе исследования эти дифференциальные уравнения приводят к дискретному виду, заменяя производные конечными разностями. Полученная система алгебраических или обыкновенных дифференциальных уравнений решается стандартными численными методами.

Традиционный подход вносит в результаты моделирования определенную погрешность, допускаемую при переходе к конечным разностям, а также при использовании численных методов. Стоит отметить, что трудоемкость использования данного подхода существенно возрастает при описании поведения среды с нелинейными границами или препятствиями, что ограничивает его применимость к реальным практическим задачам.

Идея, что интеграция микроскопических взаимодействий может приводить к тем же формам макроскопических уравнений, из которых исходит традиционное моделирование, привела к развитию дискретных подходов для моделирования теплопереноса. При этом успешно апробированы как детерминированные [1], так и стохастические [2] дискретные (ячеечные) модели. В последние годы получила распространение концепция клеточных автоматов, позволяющая рассматривать изучаемый процесс в дискретном пространстве и времени [3].

Процесс теплопереноса в движущейся жидкости можно разделить на 3 составляющих:

- перемещение тепловой энергии как следствие перемещения массы;
- тепловая диффузия между частицами жидкости;
- теплообмен между жидкостью и стенками сосуда, в котором она находится.

Очевидно, что моделирование макропроцессов неразрывно связано с моделированием движения жидкости.

Первые дискретные модели, описывающие движение жидкостей и газов (HPP и FHP) симулировали поведение каждой частицы вещества (молекулы или группы молекул), движущейся по квадратной (HPP) или шестиугольной (FHP) регулярной решетке и сталкивающейся с другими частицами [4]. Основным критерием при разработке данных моделей было соблюдение законов сохранения. Макроскопические параметры, такие как плотность, скорость, момент импульса, вычисляли путем усреднения величин, получаемых на микроскопическом уровне. Очевидно, что указанные модели являются очень ресурсоемкими, и применение их на практике к реальным объемам жидкости проблематично. Положительным моментом явилось то, что уже модель FHP дала результаты, которые соответствовали классическим представлениям, а именно уравнению Навье–Стокса, что свидетельствовало о правомерности существования дискретного подхода и привело к его дальнейшему развитию.

Продолжением и развитием дискретного подхода стала модель решетчатого газа Больцмана (LBM). В основу этой модели положены совершенно иные микроскопические представления.

Предыдущие модели содержат много недостатков. Среди наиболее значимых можно отметить следующие: поведение частиц после столкновений подчиняется ограниченному числу конкретных правил; некоторые виды регулярных решеток недостаточно симметричны; в HPP и FHP моделях существует значительный статистический шум, приводящий к необходимости усреднения полученных результатов по некоторой области пространства и за несколько шагов по времени.

Чтобы преодолеть эти трудности, в LBM понятие конкретной частицы заменили плотностью распределения частиц, а столкновения описываются оператором столкновений, а не итерационными правилами.

В данной модели плоская сплошная среда разбивается на малые объемы – ячейки жидкости (газа). Количество материальных частиц в каждой ячейке характеризуется локальной плотностью ρ. Для каждой ячейки предусмотрено наличие девяти направлений (скоростных каналов), по которым могут двигаться частицы. Это сама клетка (нулевое направление) и восемь направлений в сторону соседних клеток. Такая решетка получила название D2Q9 (2 измерения, 9 соседей) [4].

Векторы c_i имеют единичную длину и задают следующие направления скоростных каналов:

$$\begin{aligned} &c_0 = (0;0);\\ &c_{1,3} = (\pm 1;0);\\ &c_{2,4} = (0;\pm 1);\\ &c_{5,6,7,8} = (\pm 1;\pm 1). \end{aligned} \qquad (1)$$

Количество частиц, движущихся по каждому из скоростных каналов i, характеризуется плотностью распределения частиц по скоростным каналам $f_i(r,t)$, где r и t – координаты ячейки потока в пространстве и времени соответственно.

Локальная плотность потока для ячейки в целом вычисляется как сумма значений плотности распределения по всем скоростным каналам:

$$\rho = \sum f(r,t). \qquad (2)$$

Сумма произведений плотности распределения потока и векторов скоростных каналов составляет плотность импульса. Разделив плотность импульса на плотность частиц, мы получим вектор локальной скорости для ячейки потока:

$$u = \frac{1}{\rho}\sum c_i f_i(r,t). \qquad (3)$$

Итерацию клеточного автомата, функционирующего по методу решетчатого газа Больцмана, можно записать следующим образом:

$$f_i(r + c_i, t+1) - f_i(r_i, t) = \Omega_i(f), \qquad (4)$$

где $\Omega_i(f)$ – оператор столкновений.

Выражение (4) является дискретным аналогом известного из статистической физики уравнения Больцмана.

Физический смысл оператора столкновений можно трактовать как релаксацию плотностей распределения к равновесному состоянию. Поэтому он вычисляется следующим образом:

$$\Omega_i(f) = \frac{-1}{\tau}\left[f_i(r,t) - f_i^{eq} r,t)\right], \qquad (5)$$

где τ – время релаксации, которое связано с вязкостью жидкости ν формулой [4]

$$\nu = \frac{\tau - 0,5}{3}. \quad (6)$$

Функция f_i^{eq} обозначает равновесное распределение частиц по скоростным каналам и зависит от локальной скорости и плотности среды. Для решетки 2D9Q ее можно вычислить по следующей формуле:

$$f_i^{eq} = W_i \rho \left(1 + 3c_i u + \frac{9}{2}(c_i u)^2 - \frac{3}{2}u^2 \right). \quad (7)$$

Данная формула является дискретным аналогом распределения Максвелла-Больцмана

$$f^{eq} = \frac{\rho}{m}\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left[\frac{-m(c-u)^2}{2k_B T}\right]. \quad (8)$$

При выводе (7) масса частиц принимается единичной, а температура измеряется в энергетических единицах.

Коэффициенты W_i выбираются таким образом, чтобы получаемые моменты импульса соответствовали моментам импульса по распределению Максвелла-Больцмана вплоть до четвертого порядка:

$$W_0 = \frac{4}{9}; \quad W_{1,2,3,4} = \frac{1}{9}; \quad W_{5,6,7,8} = \frac{1}{36}. \quad (9)$$

Для описания поведения жидкости у стенок потока и препятствий использовался метод отражения «на полпути» от стенки. Фактически граница потока и стенки располагается между первым и вторым рядами ячеек решетки. При этом в крайнем ряду не происходит никаких столкновений и перераспределений скоростей, а попавшие туда частицы принудительно возвращаются на следующем шаге назад в поток по классическим правилам отражения, т. е.

$$\begin{cases} f_0(r,t+1) = f_0(r,t), \\ f_i(r,t+1) = f_{i+2}(r,t), \quad i = 1,2,5,6, \\ f_i(r,t+1) = f_{i\text{-}2}(r,t), \quad i = 3,4,7,8. \end{cases} \quad (10)$$

Ранее нами было показано [5], что данная модель движения вязкой жидкости дает результаты, соответствующие классическим представлениям о данном процессе.

Как и гидродинамика, процессы теплопереноса в классическом подходе описываются дифференциальными уравнениями [6]. Использование клеточных автоматов для моделирования процессов теплопереноса ранее применялось для твердых тел [7]. Возможность применения метода Больцмана для моделирования не только движения жидкости, но и тепловых процессов исследована мало, однако уже есть работы, показывающие положительные результаты для неподвижной жидкости [8].

При получении модели мы руководствовались следующими рассуждениями. Пусть каждая ячейка жидкости характеризуется количеством теплоты Q, причем данное количество теплоты распределено по скоростным каналам i. Таким образом, частицы каждого скоростного канала, перемещаясь, будут переносить некоторое количество теплоты q_i, осуществляя тем самым макропроцесс теплопереноса.

Чтобы учесть микропроцессы теплообмена между частицами внутри ячейки, введем оператор теплообмена

$$\Lambda_i(f) = \frac{1}{\tau_q}\left[q_i(r,t) - q_i^{eq}(r,t) \right], \quad (11)$$

где q^{eq} – плотность равновесного распределения количества теплоты по скоростным каналам; τ_q – температурное время релаксации.

По своему смыслу данный оператор аналогичен оператору столкновений и описывает релаксацию плотности распределения количества теплоты к равновесному состоянию.

Для выбранной нами модели движения плотность равновесного распределения будет рассчитываться следующим образом:

$$q_i^{eq} = W_i q(1 + 3c_i u), \quad (12)$$

где u – вектор скорости для данной ячейки; c_i – единичный вектор, задающий направление скоростного канала; W_i – коэффициент, принимающий значения в соответствии с (9).

Температурное время релаксации связано с теплопроводностью жидкости по следующей формуле:

$$\lambda = \frac{\tau_q - 0,5}{3}. \quad (13)$$

То есть для процессов передачи тепла теплопроводность выполняет те же функции, что и вязкость в процессах переноса массы.

Таким образом, перенос тепла за одну итерацию описывается следующей формулой:

$$q_i(r + c_i, t+1) = q_i(r,t) = \Lambda_i(f). \quad (14)$$

Для описания поведения жидкости у стенок потока и препятствий используется метод отражения «на полпути» от стенки. Фактически граница потока и стенки располагается между первым и вторым рядами ячеек. При этом в крайнем ряду не происходит никаких столкновений и перераспределений, а попавшие туда частицы принудительно возвращаются на следующем шаге назад в поток по классическим правилам отражения.

В тот момент, когда частицы «залипают» на границе, происходит теплообмен между жидкостью и стенкой по следующей формуле:

$$q_i(r_i, t+1) = q_i(r,t) - 0,5C\left[q_i(r,t) \right] - q_i^b(r,t), \quad (15)$$

где $q_i^b(r,t)$ – плотность распределения количества теплоты на стенке; C – коэффициент теплопереноса между жидкостью и веществом стенки.

Нами было создано программное приложение, позволяющее моделировать и визуализировать описанные выше процессы. Некоторые полученные с его помощью результаты представлены на рис. 1–4 (области потока с более высокой температурой на рисунках темнее;

твердые препятствия показаны светло-серым цветом).

На рис. 1 показано течение нагретой жидкости в прямой трубе.

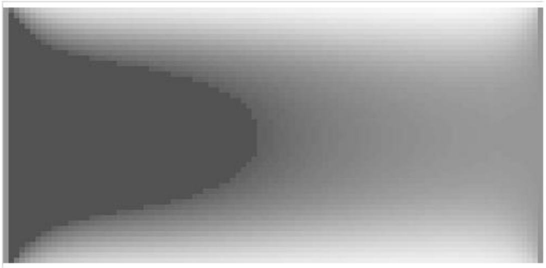

Рис. 1. Охлаждение движущейся нагретой жидкости о холодные стенки сосуда

Можно видеть, что нагретая жидкость, подаваемая с левой стороны, постепенно охлаждается от стенок. Профиль температур имеет параболическую форму.

На рис. 2 в поток было добавлено препятствие, имеющее более низкую температуру, чем протекающая жидкость.

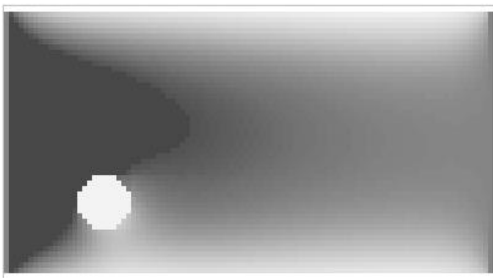

Рис. 2. Обтекание нагретой жидкостью холодного препятствия

На рис. 3 для сравнения показано обтекание нагретой жидкостью двух препятствий различной температуры. Нетрудно заметить, как верхняя часть потока быстрее охлаждается от препятствия с более низкой температурой. Тем не менее после этого препятствия наблюдается небольшая область с вихревыми потоками и, как следствие, более высокой температурой.

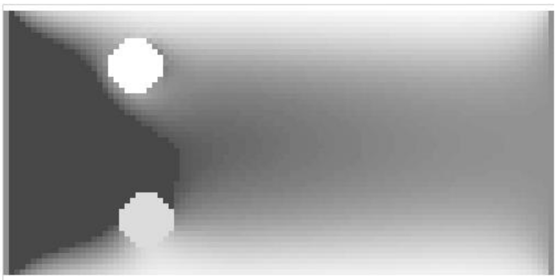

Рис. 3. Обтекание нагретой жидкостью двух препятствий различной температуры: более холодного (сверху) и более близкого по температуре к жидкости (снизу)

На рис. 4 представлен процесс протекания нагретой жидкости через щель (стенки препятствия имеют более низкую температуру): после прохождения препятствия поток жидкости имеет более низкую температуру, однако непосредственно у стенок за щелью температура жидкости высока, что связано с наличием турбулентных потоков в этой области.

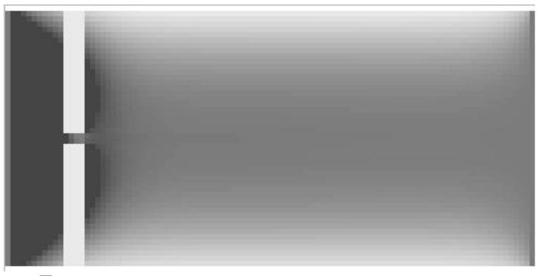

Рис. 4. Протекание нагретой жидкости через щель с холодными стенками

Стоит отметить, что в приведенных выше примерах температура препятствий и стенок является постоянной величиной. Ее изменение под влиянием температуры жидкости является задачей будущих исследований.

В ходе компьютерного моделирования были получены результаты, совпадающие с теоретическими представлениями о реальных процессах теплопереноса в движущейся жидкости. Это доказывает возможности применения дискретных подходов и, в частности, метода решетчатого газа Больцмана для исследования данных процессов. Преимущества практического применения предложенного метода, с одной стороны, заключаются в отсутствии необходимости проведения реального физического эксперимента. Кроме того, описанный подход позволяет изучать поведение жидкости в объектах сложной геометрической формы, что затруднительно при использовании классических математических моделей.

Список литературы

1. **Бобков С.П., Войтко Ю.В.** Использование систем клеточных автоматов для моделирования нелинейных задач теплопроводности // Известия вузов. Химия и хим. технол. – 2009. – Т. 52, вып. 11. – С. 126–128.

2. **Моделирование** теплового состояния поперечного сечения трубопровода при промерзании теплоизоляции / В.Е. Мизонов, Н.Н. Елин, А.В. Попелышко, В.А. Мыльников // Вестник ИГЭУ. – 2013. – Вып. 2. – С. 67–70.

3. **Toffoli T.** Cellular Automata Machines. – Massachusetts Institute of Technolog, 1987.

4. **Dieter A. Wolf-Gladrow**. Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models: An Introduction / editors: A. Dold, Heidelberg,F. Takens, Groningen, B. Teissier. – Paris, 2005.

5. **Чернявская А.С., Бобков С.П**. Применение дискретных методов для моделирования течения жидкости // Известия вузов. Химия и хим. технол. – 2013. – Т. 56, вып. 3. – С. 92–95.

6. **Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.** Математические модели термомеханики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

7. **Бобков С.П.** Моделирование основных процессов переноса с использованием клеточных автоматов // Известия вузов. Химия и хим. технол. – 2009. – Т. 52, вып. 3. – С. 109–114.

8. **Ehsan Fattahi, Mousa Farhadi, Kurosh Sedighi, Hasan Nemati**. Lattice Boltzmann simulation of natural convection heat transfer in nanofluids // International Journal of Thermal Sciences 52. – 2012. – С. 137–144.

References

1. Bobkov, S.P., Voytko, Yu.V. Ispol'zovanie sistem kletochnykh avtomatov dlya modelirovaniya nelineynykh zadach teploprovodnosti [Using cellular automata systems in modeling nonlinear heat conduction problems]. *Izvestiya vuzov «Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya»*, 2009, vol. 52, issue 11, pp. 126–128.
2. Mizonov, V.E., Elin, N.N., Popelyshko, A.V., Myl'nikov, V.A. Modelirovanie teplovogo sostoyaniya poperechnogo secheniya truboprovoda pri promerzanii teploizolyatsii [Modeling of thermal state of pipeline cross-section under heat insulation frost penetration]. *Vestnik IGEU*, 2013, issue 2, pp. 67–70.
3. Toffoli, T. Cellular Automata Machines. Massachusetts Institute of Technolog, 1987.
4. Dieter, A. Wolf-Gladrow. Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models: An Introduction. Paris, 2005.
5. Chernyavskaya, A.S., Bobkov, S.P. Primenenie diskretnykh metodov dlya modelirovaniya techeniya zhidkosti [Discrete method in modeling fluid flows]. *Izvestiya vuzov «Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya»*, 2013, vol. 56, issue 3, pp. 92–95.
6. Zarubin, B.C., Kuvyrkin, G.N. *Matematicheskie modeli termomekhaniki* [Mathematical models of thermomechanics]. Moscow, FIZMATLIT, 2002.
7. Bobkov, S.P. Modelirovanie osnovnykh protsessov perenosa s ispol'zovaniem kletochnykh avtomatov [Modeling of basic transfer processes by cellular automata]. *Izvestiya vuzov «Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya»*, 2009, vol. 52, issue 3, pp. 109–114.
8. Ehsan Fattahi, Mousa Farhadi, Kurosh Sedighi, Hasan Nemati. Lattice Boltzmann simulation of natural convection heat transfer in nanofluids. International Journal of Thermal Sciences 52, 2012, pp. 137–144.

Чернявская Анастасия Сергеевна,
ФБГОУВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
аспирант кафедры информационных технологий,
e-mail: mayananas@mail.ru

Бобков Сергей Петрович,
ФБГОУВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой информационных технологий,
e-mail: bsp@isuct.ru