

УДК 621.34: 62-50

Исследование характеристик стандартных распределений корней характеристических уравнений для электромехатронных систем позиционирования¹

С.К. Лебедев, А.Р. Колганов

ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
г. Иваново, Российская Федерация

E-mail: lebedev@drive.ispu.ru; klgn@drive.ispu.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Применение распределения корней по Бесселю для настройки динамики компонентов электромехатронных систем позиционирования на данный момент изучено недостаточно.

Материалы и методы: Анализ характеристик динамических объектов с заданными свойствами выполнен на основе методов современной теории автоматического управления с учетом требований, обусловленных областью применения. Разнообразные характеристики стандартных распределений получены с помощью средств символьной математики программного комплекса MathCAD.

Результаты: Выполнено сравнение временных и частотных характеристик основных распределений корней, чему способствовало нормирование всех полюсов распределений, включая распределение по биному Ньютона. Показаны недостатки подхода, использующего в качестве критерия быстродействия время регулирования. Приведение характеристик к заданной полосе пропускания и включение в процедуру анализа характеристики группового запаздывания динамических систем позволило четко сформулировать рекомендации по преимущественному применению распределения по Бесселю в электромехатронных системах.

Выводы: Полученные выражения характеристических полиномов, отвечающие распределению корней по Бесселю и приведенные к заданной полосе пропускания, могут использоваться при практических расчетах параметров регуляторов и наблюдателей в системах управления.

Ключевые слова: электромехатронные системы, электропривод, наблюдатель состояния, комбинированные системы, стандартные распределения, корни характеристических уравнений.

Analysis of standard distributions of secular equation roots for electromechatronic positioning systems

S.K. Lebedev, A.R. Kolganov

Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation

E-mail: lebedev@drive.ispu.ru; klgn@drive.ispu.ru

Abstract

Background: Application of Bessel root distribution to adjustment of component dynamics in electromechatronic positioning systems has not been studied sufficiently yet.

Materials and methods: The characteristics of dynamic objects with pre-determined properties have been analyzed based on the methods of the modern automatic control theory taking into account the demands of the area of application. Various standard distribution values were obtained by means of the Symbolic Math Toolbox of the program complex MathCAD.

Results: We have compared the time and frequency characteristics of the basic root distributions through normalizing all poles of distributions, including Newton binomial distribution. The study has revealed the deficiencies of the approach based on the control time as a speed criterion. Adjusting of the characteristics to the preset band pass and introduction of dynamic system group lag as an analysis parameter allowed us to formulate recommendations on primary application of Bessel distribution in electromechatronic systems.

Conclusions: The obtained expressions of characteristic polynoms responsible for Bessel root distribution and adjusted to the preset band pass can be used in practical calculations of regulators and observers in control systems.

Key words: electromechatronic systems, electric drive, state observer, combined control systems, standard distributions, secular equation roots.

Использование в электромехатронных системах функциональных элементов с модальными свойствами [1–3] (регуляторов переменных, регуляторов и наблюдателей состояния) и свойствами фильтров предполагает при-

менение стандартных форм распределения корней характеристического уравнения [4–9].

Задача синтеза электромехатронных систем предполагает использование следующих основных форм стандартных распределений:

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-00972).

– распределение корней по Бесселю, отличающееся линейностью фазочастотной характеристики, что обеспечивает постоянство группового времени запаздывания и минимального искажения сигнала, проходящего через систему;

– распределение корней по биному Ньютона, обеспечивающее монотонность временных характеристик для систем любого порядка;

– распределение корней по Баттерворту, обладающее минимальным изменением амплитудной частотной характеристики в полосе пропускания и приемлемым затуханием в полосе задержания;

– распределение корней по Баттерворту-Томпсону, стремящееся к характеристикам, средним между распределениями Бесселя и Баттерворта.

При выборе стандартного распределения первоначально производится выбор по характеру динамических процессов, а далее – по быстродействию, которое определяется во многом значением среднегеометрического корня ω_0 .

Анализ систем с различными регуляторами [10, 11] показал, что следует рассмотреть характеристики распределения второго, третьего, четвертого и пятого порядков. В табл. 1 приведены значения полюсов и полиномы стандартных распределений, нормированных по $\omega_0(-3 \text{ дБ})$ – среднегеометрическому корню, соответствующему пересечению линии 3 дБ ЛАЧХ системы управления, приведенной к единичному коэффициенту усиления.

Стандартные значения распределений по Бесселю, Баттерворту и Баттерворту-Томпсону приведены в [12], нормирование корней бинома Ньютона выполнены нами для корректности сопоставления. На рис. 1 показан пример рассчитанных по данным табл. 1 нормированных переходных характеристик распределений для систем с единичным коэффициентом усиления в относительном времени: $\tau = \omega_0 t$.

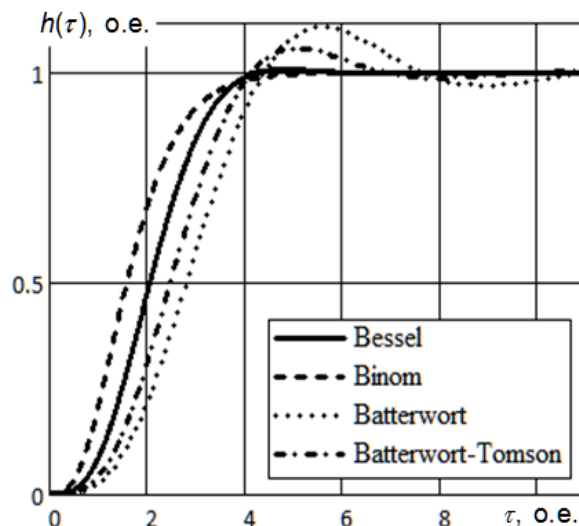


Рис. 1. Нормированные переходные характеристики ($n = 4$)

По нормированным переходным характеристикам, зная заданное время регулирования, можно определить среднегеометрический корень для расчета параметров характеристического полинома, а по нему и параметров компонентов системы позиционирования

$$\omega_0 = \frac{\tau_p}{t_p}, \quad (1)$$

где τ_p – определяемое по нормированным переходным характеристикам относительное время регулирования; t_p – время регулирования, соответствующее требованиям к динамике в системы позиционирования.

Основные параметры (перерегулирование и время регулирования) нормированных характеристик сведены в табл. 2.

Как показывает анализ данных табл. 1, определение среднегеометрического корня и параметров регуляторов по нормированным временным характеристикам и выражению (1) затруднено размытостью формулировки «время регулирования», что особенно актуально для астатических систем, где понятие ошибки регулирования отсутствует. Это затрудняет и сравнение различных форм распределения корней характеристических полиномов.

Таблица 1. Стандартные значения корней характеристических полиномов

Порядок полинома	Распределения корней			
	по Бесселю	по биному Ньютона	по Баттерворту	по Баттерворту-Томпсону
2	$s_{1,2} = -1,1016 + 0,6364j$	$s_{1,2} = -1,558$	$s_{1,2} = -0,7071 + 0,7071j$	$s_{1,2} = -0,8615 + 0,6977j$
3	$s_{1,2} = -1,0174 + 0,9992j$ $s_3 = -1,323$	$s_{1...3} = -1,965$	$s_{1,2} = -0,5 + 0,866j$ $s_3 = -1,0$	$s_{1,2} = -0,6942 + 0,9368j$ $s_3 = -1,1249$
4	$s_{1,2} = -1,3700 + 0,4102j$ $s_{3,4} = -0,9952 + 1,2571j$	$s_{1...4} = -2,304$	$s_{1,2} = -0,9239 + 0,3827j$ $s_{3,4} = -0,3827 + 0,9239j$	$s_{1,2} = -1,0858 + 0,3987j$ $s_{3,4} = -0,5543 + 1,0605j$
5	$s_{1,2} = -1,3808 + 0,7179j$ $s_{3,4} = -0,9576 + 1,4711j$ $s_5 = -1,5023$	$s_{1...5} = -2,597$	$s_{1,2} = -0,3090 + 0,9511j$ $s_{3,4} = -0,8090 + 0,5878j$ $s_5 = -1,00$	$s_{1,2} = -1,0059 + 0,6428j$ $s_{3,4} = -0,5103 + 1,1442j$ $s_5 = -1,1771$

Таблица 2. Параметры нормированных переходных характеристик

Порядок полинома		Распределения корней			
		по Бесселю	по биному Ньютона	по Баттерворту	по Баттерворту-Томсону
2	σ , %	0,43	0	4,32	2,04
	$\tau_p(5\%)$, о.е.	2,97	3,04	2,93	2,94
	$\tau_p(2\%)$, о.е.	3,42	3,74	5,96	4,75
	$\tau_p(1\%)$, о.е.	3,66	4,26	6,59	5,88
3	σ , %	0,76	0	8,15	3,87
	$\tau_p(5\%)$, о.е.	3,27	3,2	3,83	4,28
	$\tau_p(2\%)$, о.е.	3,6	3,83	6,64	9,42
	$\tau_p(1\%)$, о.е.	3,72	4,28	9,42	6,22
4	σ , %	0,83	0	10,83	5,91
	$\tau_p(5\%)$, о.е.	3,58	3,36	6,85	5,56
	$\tau_p(2\%)$, о.е.	3,88	3,94	9,87	6,31
	$\tau_p(1\%)$, о.е.	4,03	4,36	10,43	8,49
5	σ , %	0,77	0	12,78	5,79
	$\tau_p(5\%)$, о.е.	3,86	3,52	7,66	6,04
	$\tau_p(2\%)$, о.е.	4,14	4,07	10,84	6,75
	$\tau_p(1\%)$, о.е.	4,28	4,47	13,87	8,94

Для электроприводов станков и роботов требованием по быстродействию является обеспечение полосы пропускания² [14]. Исследуем логарифмические характеристики нормированных стандартных распределений с точки зрения удовлетворения заданной полосы пропускания.

На рис. 2, 3 приведены рассчитанные логарифмические частотные характеристики (ЛАЧХ и ЛФЧХ) при относительной частоте для системы 4-го порядка:

$$\omega' = \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (2)$$

Среднегеометрический корень может быть определен по заданной полосе пропускания, используя выражения из ГОСТ 27803-91³ [10, 14]:

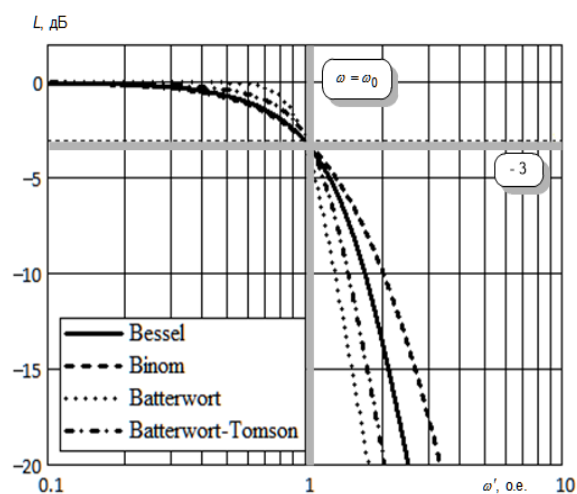
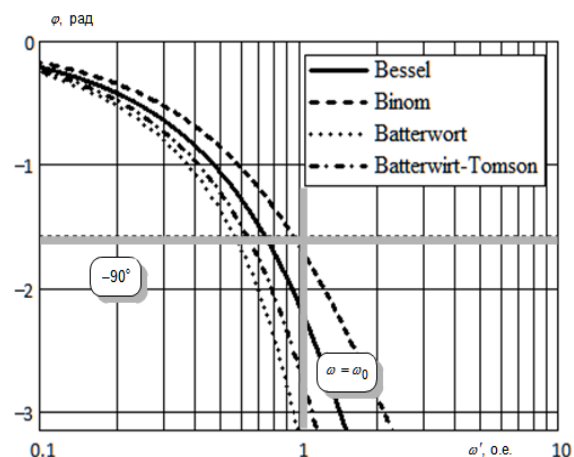
$$\omega_0 = \frac{\omega_{\text{пр}}}{\omega'_{-3\text{дБ}}(-90^\circ)}; \quad (3)$$

$$\omega'_{\text{пр}} = \min\{\omega'_{-3\text{дБ}}; \omega'_{-90^\circ}\}, \quad (4)$$

где $\omega'_{-3\text{дБ}}$ – относительная частота, при которой ЛАЧХ пересекает линию – 3 дБ; ω'_{-90° – относительная частота, при которой ЛФЧХ пересекает линию – 90°.

² ГОСТ 27803-91. Электроприводы регулируемые для металлообрабатывающего оборудования и промышленных роботов. Технические требования. – Введ. 1992-01-01. – М.: Изд-во стандартов, 1991.

³ ГОСТ 27803-91. Электроприводы регулируемые для металлообрабатывающего оборудования и промышленных роботов. Технические требования.

Рис. 2. Нормированные ЛАЧХ ($n = 4$)Рис. 3. Нормированные ЛАЧХ ($n = 4$)

Для заданной полосы пропускания $f_{\text{пр}} = 10$ Гц имеем

$$\omega_{\text{пр}} = 2\pi f_{\text{пр}} = 62,8 \text{ рад/с}. \quad (5)$$

Параметры частотных характеристик и результаты расчетов среднегеометрического корня для стандартных распределений приведены в табл. 3.

Результаты расчетов среднегеометрического корня показывают, что нормирование по уровню – 3 дБ соответствует полосе пропускания только для систем второго порядка, для систем более высокого порядка необходимо определять полосу пропускания системы по ЛФЧХ. Рассмотрим так же такую характеристику, как время группового запаздывания, постоянство которой в полосе пропускания характеризует минимальное искажение сигналов управления [12, 13]:

$$t_z = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}. \quad (6)$$

Для всех случаев получены характеристики нормированного времени группового запаздывания (например, рис. 4).

Для оценки равномерности характеристик оценим относительное отклонение времени группового запаздывания (табл. 4):

$$\Delta t_z = \left| \frac{t_z(0,01) - t_{z\text{max}}}{t_z(0,01)} \right| 100\%, \quad (7)$$

где $t_z(0,001)$ – начальное значение времени группового запаздывания; $t_{z\text{max}}$ – максимальное отклонение.

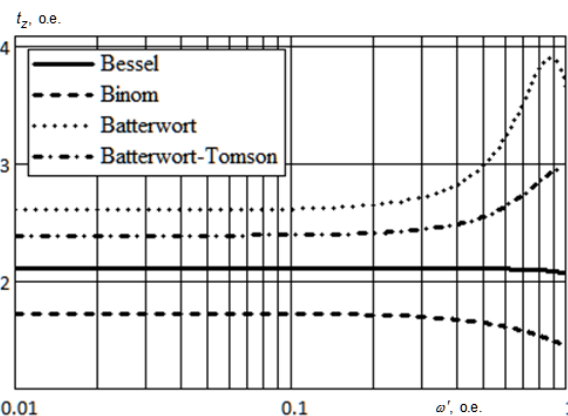


Рис. 4. Нормированное время группового запаздывания ($n = 4$)

Таблица 4. Отклонение времени группового запаздывания

Распределения корней	Порядок полинома			
	2	3	4	5
По Бесселю	19,06	6,516	1,812	0,395
По биному Ньютона	29,17	20,56	15,85	12,91
По Баттерворту	20,69	37,13	49,58	48,19
По Баттерворту-Томсону	9,27	13,91	23,40	84,09

По значениям ω_0 , соответствующим заданной полосе пропускания (табл. 3), рассчитаем переходные характеристики для оценки динамических свойств (рис. 5).

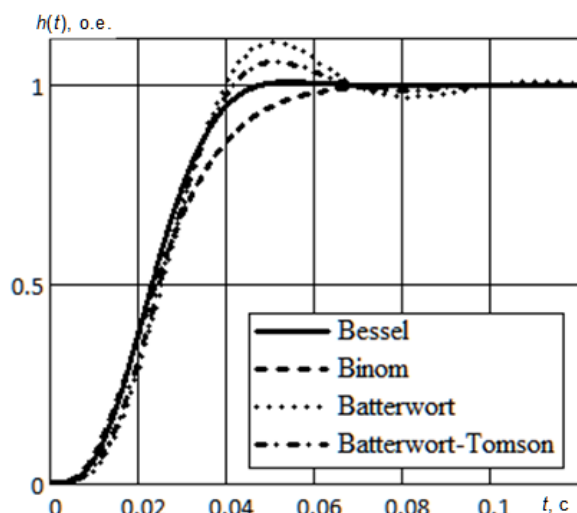
Параметры временных характеристик (перегулирование, время регулирования при 1 % отклонении) приведены в табл. 5.

Таблица 3. Параметры нормированных частотных характеристик

Порядок полинома		Распределения корней			
		по Бесселю	по биному Ньютона	по Баттерворту	по Баттерворту-Томсону
2	$\omega'_{-3\text{дБ}}$, о.е.	1	1	1	1
	ω'_{-90} , о.е.	1,27	1,56	1	1,11
	$\omega'_{\text{пр}}$, о.е.	1	1	1	1
	ω_0 , рад/с	62,8	62,8	62,8	62,8
3	$\omega'_{-3\text{дБ}}$, о.е.	1	1	1	1
	ω'_{-90} , о.е.	0,9	1,134	0,71	0,78
	$\omega'_{\text{пр}}$, о.е.	0,90	1	0,71	0,78
	ω_0 , рад/с	69,78	62,8	88,45	80,53
4	$\omega'_{-3\text{дБ}}$, о.е.	1	1	1	1
	ω'_{-90} , о.е.	0,74	0,95	0,57	0,63
	$\omega'_{\text{пр}}$, о.е.	0,74	0,95	0,57	0,63
	ω_0 , рад/с	84,96	66,11	110,18	99,41
5	$\omega'_{-3\text{дБ}}$, о.е.	1	1	1	1
	ω'_{-90} , о.е.	0,65	0,84	0,47	0,53
	$\omega'_{\text{пр}}$, о.е.	0,65	0,84	0,47	0,53
	ω_0 , рад/с	96,62	74,76	133,62	118,49

Таблица 5. Параметры переходных характеристик, приведенных к заданной полосе пропускания

Порядок полинома		Распределения корней			
		по Бесселю	по биному Ньютона	по Баттерворту	по Баттерворту-Томсону
2	σ , %	0,43,	0	4,3	2,1
	$t_{p(1\%)}$, с	0,058	0,068	0,052	0,054
0,0543	σ , %	0,75	0	8,15	3,88
	$t_{p(1\%)}$, с	0,0542	0,0681	0,1065	0,0773
4	σ , %	0,83	0	11,08	10,59
	$t_{p(1\%)}$, с	0,0453	0,066	0,0946	0,0853
5	σ , %	0,77	0	12,78	5,76
	$t_{p(1\%)}$, с	0,0443	0,0597	0,037	0,039

Рис. 5. Переходные характеристики, приведенные к заданной полосе пропускания ($n = 4$)

Исследования подтверждают справедливость того, что в качестве критерия настройки динамики приняты требования стандарта для электроприводов станков и роботов к полосе пропускания, а не время регулирования, которое, как критерий, имеет неопределенность с точки зрения ошибки регулирования.

Анализ результатов показывает, что максимальные результаты по монотонности и быстродействию при порядках систем от второго до пятого показывает распределение Бесселя. В случае жестких требований к отсутствию перегулирования при синтезе систем позиционирования следует выбирать распределение по биному Ньютона, это распределение незначительно проигрывает Бесселю только в быстродействии.

Что же касается характеристики группового времени запаздывания, максимальные результаты по ширине зоны постоянства в полосе пропускания и минимальное относительное отклонение при рассмотренных порядках системы позиционирования имеет распределение Бесселя.

Таким образом, настройка динамики электромехатронных систем позиционирования на распределение корней по Бесселю не только дает преимущества перед другими распределениями по быстродействию и монотон-

ности, но и обладает уникальными свойствами, обеспечивающими минимальные искажения при реализации сигналов управления перемещением исполнительного органа системы.

Для удобства применения распределения по Бесселю перейдем от нормированных характеристических полиномов к абсолютным характеристическим полиномам, приведенным к заданной полосе пропускания:

$$\bullet n = 2; \omega_0 = \omega_{пр};$$

$$A(s) = s^2 + 2,2032\omega_0 s + 1,6185\omega_0^2; \quad (8)$$

$$\bullet n = 3; \omega_0 = \omega_{пр}/0,9;$$

$$A(s) = s^3 + 3,417\omega_0 s^2 + 4,8665\omega_0^2 s + 2,771\omega_0^3; \quad (9)$$

$$\bullet n = 4; \omega_0 = \omega_{пр}/0,74;$$

$$A(s) = s^4 + 4,7304\omega_0 s^3 + 10,069\omega_0^2 s^2 + 11,114\omega_0^3 s + 5,2575\omega_0^4; \quad (10)$$

$$\bullet n = 5; \omega_0 = \omega_{пр}/0,65;$$

$$A(s) = s^5 + 6,1791\omega_0 s^4 + 17,818\omega_0^2 s^3 + 29,361\omega_0^3 s^2 + 21,214\omega_0^4 s + 11,211\omega_0^5. \quad (11)$$

Список литературы

1. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. – М.: Машиностроение, 1976. – 184 с.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971. – 400 с.
3. Тютюков В.В. Развитие теории модального управления для решения задач автоматизации технологических объектов: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.06: защищена 03.03.06: утв. 15.09.06. – Иваново, 2006. – 233 с.
4. Колганов А.Р., Лебедев С.К., Гнездов Н.Е. Современные методы управления в электромехатронных системах. Разработка, реализация, применение / ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2012. – 256 с.
5. Егоров В.Н., Шестаков В.М. Динамика систем электропривода. – Л.: Энергоатомиздат, 1983. – 216 с.
6. Башарин А.В., Новиков В.А., Соколовский Г.Г. Управление электроприводами: учеб. пособие для вузов. – Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1982. – 392 с.
7. Терехов В.М., Осипов А.И. Системы управления электроприводов. – М.: Изд. центр «Академия», 2005. – 304 с.
8. Анхимюк В.Л., Опейко О.Ф. Проектирование систем автоматического управления электроприводами. – Минск: Выш. шк., 1986. – 143 с.
9. Михайлов О.П. Динамика электромеханического привода металлорежущих станков. – М.: Машиностроение, 1989. – 224 с.
10. Глазунов В.Ф., Лебедев С.К., Гнездов Н.Е. Многосвязные электромехатронные системы с нежесткой ме-

ханикой / ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В. И. Ленина». – Иваново, 2013. – 224 с.

11. Лебедев С.К., Коротков А.А. Алгоритмы синтеза наблюдателей нагрузки электропривода // Вестник ИГЭУ. – 2009. – Вып. 3. – С. 5–8.

12. Мошиц Г., Хорн П. Проектирование активных фильтров. – М.: Мир, 1984. – 320 с.

13. Лустенберг Г. Е. Активные фильтры: метод. указания к курсовому проекту. – Иркутск: Иркут. гос. техн. ун-т, 2000. – 72 с.

14. Лебедев С.К., Гнездов Н.Е., Коротков А.А. Выбор параметров стандартных распределений при синтезе электроприводов // Вестник ИГЭУ. – 2008. – Вып. 3. – С. 14–16.

References

1. Kuzovkov, N.T. *Modal'noe upravlenie i nablyudayushchie ustroystva* [Modal control and observers]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1976. 184 p.

2. Kalman, R., Falb, P., Arbib, M. *Ocherki po matematicheskoy teorii sistem* [Essays on mathematical theory of systems]. Moscow, Mir, 1971. 400 p.

3. Tyutikov, V.V. *Razvitiye teorii modal'nogo upravleniya dlya resheniya zadach avtomatizatsii tekhnologicheskikh ob'ektov*. Diss. d-ra tekhn. nauk [Development of modal control theory for solving problems of technological object automation. Dr. tech. sci. diss.]. Ivanovo, 2006. 233 p.

4. Kolganov, A.R., Lebedev, S.K., Gnezdov, N.E. *Sovremennyye metody upravleniya v elektromekhatronnykh sistemakh. Razrabotka, realizatsiya, primeneniye* [Modern control methods in electromechatronic systems. Development, realization, application]. Ivanovo, 2012. 256 p.

5. Egorov, V.N., Shestakov, V.M. *Dinamika sistem elektropriroda* [Electric drive dynamics]. Leningrad, Energoatomizdat, 1983. 216 p.

6. Basharin, A.V., Novikov, V.A., Sokolovskiy, G.G. *Upravlenie elektroprirodami* [Electric drive control: university study guide]. Leningrad, Energoizdat. Leningradskoe otdeleniye, 1982. 392 p.

7. Terekhov, V.M., Osipov, A.I. *Sistemy upravleniya elektroprirodami* [Electric drive control systems]. Moscow, Izdatel'skiy tsentr «Akademiya», 2005. 304 p.

8. Ankhimuk, V.L., Opeyko, O.F. *Proektirovaniye sistem avtomaticheskogo upravleniya elektroprirodami* [Design of electric drive automatic control systems]. Minsk, Vysheyschaya shkola, 1986. 143 p.

9. Mikhaylov, O.P. *Dinamika elektromekhanicheskogo priroda metallorazreshchikh stankov* [Dynamics of electromechanic drive of metal-cutting machine tools]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1989. 224 p.

10. Glazunov, V.F., Lebedev, S.K., Gnezdov, N.E. *Mnogosvyaznyye elektromekhatronnyye sistemy s nezhestkoy mekhanikoy* [Multivariable electromechatronic soft mechanics systems]. Ivanovo, 2013. 224 p.

11. Lebedev, S.K., Korotkov, A.A. Algoritmy sinteza nablyudateley nagruzki elektropriroda [Algorithms of synthesis of electric drive load observers]. *Vestnik IGEU*, 2009, issue 3, pp. 5–8.

12. Moshits, G., Khorn, P. *Proektirovaniye aktivnykh fil'trov* [Active filter design]. Moscow, Mir, 1984. 320 p.

13. Lustenberg G.E. *Aktivnye fil'try* [Active filters: a course project guide]. Irkutsk, 2000. 72 p.

14. Lebedev, S.K., Gnezdov, N.E., Korotkov, A.A. Vybor parametrov standartnykh raspredeleniy pri sinteze elektroprirodov [Selection of standard distribution parameters for electric drive synthesis]. *Vestnik IGEU*, 2008, issue 3, pp. 14–16.

Лебедев Сергей Константинович,

ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат технических наук, доцент кафедры электропривода и автоматизации промышленных установок,
телефон (4932) 26-97-09,
e-mail: lebedev@drive.ispu.ru

Колганов Алексей Руфимович,

ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой электропривода и автоматизации промышленных установок,
телефон (4932) 26-97-09,
e-mail: klgn@drive.ispu.ru