

УДК 004.942

Использование метода дискретных элементов для моделирования процесса неупругого деформирования

И.В. Полищук, С.П. Бобков
ФБГОУВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: ajto@mail.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Проблема снижения энергозатрат при измельчении остается одной из актуальных задач твердотопливной энергетики, химической промышленности и смежных отраслей. Для ее решения необходимы адекватные модели отдельных составляющих процесса разрушения частиц при измельчении, в частности модели их напряженного и деформированного состояния при динамическом воздействии. Одним из современных направлений исследования и моделирования процессов в твердых телах является применение дискретных подходов. В ряде случаев дискретные модели позволяют анализировать динамические процессы в твердых телах весьма успешно и даже более корректно. Однако применение дискретного подхода к моделированию конкретных процессов требует серьезной адаптации общих принципов к описанию моделируемых объектов.

Материалы и методы: Использована модель в виде системы дискретных элементов, которые могут соединяться как идеально упругими связями, так и связями с диссипацией упругой энергии. Для анализа поведения тела использован алгоритм численного интегрирования Рунге-Кутты-Фельберга.

Результаты: Получены результаты моделирования процесса деформирования идеально и неидеально упругих твердых тел.

Выводы: Предложенный подход позволяет исследовать процесс деформирования реальных твердых тел и анализировать их напряженное состояние при динамическом воздействии.

Ключевые слова: твердое тело, деформирование, ударное нагружение, диссипация, релаксация, метод дискретных элементов.

Simulation of inelastic deformation by the discrete elements method

I.V. Polishchuk, S.P. Bobkov
Ivanovo State University of Chemistry and Technology, Ivanovo, Russian Federation
E-mail: ajto@mail.ru

Abstract

Background: Reduction in comminution energy consumption remains one of the urgent problems in solid-fuel power engineering, chemical and other industries. This problem can be solved by using adequate models of separate stages of the particle breakdown process such as models of stressed and strained modes under dynamic loads. One of the modern trends in research and simulation of the processes in solids is the use of discrete approaches, which can often be used to successfully and correctly analyze dynamic processes in solids. However, application of the discrete approach to modeling of a particular process requires serious adaptation of the general principles to the models in question.

Materials and methods: The model is presented as a system of discrete elements that can be connected to each other by both perfectly elastic links and those with elastic energy dissipation. The Runge-Kutta-Fehlberg numerical integration algorithm is used to analyze the behavior of the body.

Results: We have obtained the results of modeling of deformation of perfectly and imperfectly elastic solids.

Conclusions: The suggested approach allows us to investigate the deformation of real solids and to analyze their state of stress under dynamic loads.

Key words: solid body, deformation, impact loading, dissipation, relaxation, discrete elements method.

С развитием технологий, позволяющих проводить исследования в области микроструктуры деформируемых тел, стало возможным изучение влияния структуры материалов на их механическое поведение. Это особенно важно для решения проблемы снижения энергозатрат при измельчении, которая остается одной из актуальных в твердотопливной энергетике, химической и смежных отраслях промышленности. Для ее решения необходимы адекватные модели отдельных составляющих процесса разрушения частиц при измельчении,

в частности модели их напряженного и деформированного состояния при динамическом нагружении.

Механическое поведение материалов обычно моделируется с помощью континуальных подходов, использующих уравнения механики сплошной среды. Однако при моделировании таких явлений, как деформация тел со сложной внутренней структурой, а также с нелинейной связью между напряжениями и деформациями, более предпочтительными становятся дискретные подходы [1]. К ним отно-

сится и рассмотренный ниже метод дискретного элемента. Помимо ряда общеизвестных достоинств, присущих дискретным методам, положительной стороной использованного метода является то обстоятельство, что он может быть очень просто оптимизирован под современные параллельные вычислительные машины, поскольку является одной из разновидностей моделей клеточных автоматов [2].

Метод дискретных элементов описывает моделируемое тело как совокупность точечных масс (элементов), которые взаимодействуют друг с другом по определенным законам. Каждый такой элемент определяется рядом параметров: положением в пространстве, скоростью, массой и списком соседних элементов (элементов, с которыми взаимодействует) [3].

Связь между элементами также характеризуется рядом параметров. В случае моделирования упругой деформации такими параметрами могут быть коэффициент упругости и расстояние между элементами в расслабленном состоянии.

Таким образом, задача моделирования с использованием метода дискретных элементов сводится к вычислению силы, действующей на каждый элемент, а затем, в соответствии со вторым законом Ньютона, к вычислению нового положения элементов.

Так как при внешних воздействиях на тело оно деформируется, то элементы изменяют свое положение. Таким образом, задача моделирования процесса деформирования сводится к вычислению новых координат и скоростей элементов тела на каждом дискретном шаге моделирования [4].

Ранее [5] нами рассматривалась дискретная модель, представлявшая тело как совокупность элементов, соединенных друг с другом идеально упругими пружинами. В реальных условиях твердые тела обладают вязкостью и пластичностью. В этой связи представляется целесообразным усложнить предложенный ранее подход, введя в рассмотрение эффекты диссипации энергии при деформировании.

Рассмотрим изолированную пару соседних элементов и опишем процесс их взаимодействия между собой с учетом упругости и вязкости связи (рис. 1):



Рис. 1. Изолированная пара элементов с неидеально упругой связью

Упругая составляющая связи подчиняется закону Гука, т. е. взаимодействие пар элементов описывается следующим образом:

$$F_{ij} = \frac{E_{ij}(d_{ij} - d_{ij}^0)}{d_{ij}^0}, \quad (1)$$

где E_{ij} – параметр жесткости связи между двумя соединенными элементами i и j ; d_{ij} – расстояние между элементами в текущем состоянии; d_{ij}^0 – расстояние между элементами в исходном (недеформированном) состоянии системы [6].

Вязкая составляющая может быть описана уравнением

$$F_{ij} = c_{ij}v_{ij}, \quad (2)$$

где v_{ij} – проекция относительной скорости элементов i и j на направление связи; c_{ij} – коэффициент сопротивления [7].

На элементы также могут влиять внешние силы, например сила тяжести:

$$P_i = m_i g, \quad (3)$$

где g – ускорение свободного падения; m_i – масса элемента.

При столкновении тела с препятствием на элемент влияет сила трения о препятствие. Она может быть описана с использованием закона Амонтона–Кулона:

$$F_{si} = k_{si}N_{si}, \quad (4)$$

где k_{si} – коэффициент трения между элементом i и поверхностью s ; N_{si} – сила реакции опоры [8].

Зная все действующие на элементы силы, воспользуемся вторым законом Ньютона, чтобы определить их новые координаты и скорость:

$$m_i a_i = F(p_i, v_i, t), \quad (5)$$

где p_i – положение i -го элемента в пространстве; a_i – ускорение элемента.

Учитывая (1)–(5), получим уравнение для суммы сил, действующих на произвольный элемент:

$$m_i a_i = m_i g + k_{mi} N_{mi} + \sum_{j=1}^D \left(\frac{E_{ij}(d_{ij} - d_{ij}^0)}{d_{ij}^0} + c_{ij} v_{ij} \right), \quad (6)$$

где D – список соседних элементов.

Расстояния между элементами в уравнении (6) легко вычисляются из координат элементов. Учитывая тот факт, что ускорение есть первая производная скорости и вторая производная перемещения, получаем систему дифференциальных уравнений, решение которой позволяет вычислить скорости элементов и их новые координаты.

Для вычисления обновленного положения элементов системы был выбран метод Рунге-Кутты-Фельберга. Он имеет четвертый порядок точности, т. е. суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $O(h^4)$ с ошибкой на каждом шаге порядка $O(h^5)$. Кроме того, метод позволяет оценить ошибку и на ее основе автоматически изменить шаг [9].

С использованием описанной модели были проведены численные эксперименты с помощью специально разработанного программного комплекса. Для ускорения вычислений все векторные операции были выполнены с использованием процессорных команд AVX.

Ниже представлены результаты моделирования упругой и неупругой деформации двумерных тел различной формы и структуры при свободном падении их с высоты на неподвижное препятствие. Результаты экспериментов представлены в сравнительной форме, для того чтобы оценить влияние диссипативных процессов на поведение тела при взаимодействии с препятствием (рис. 2, 3).

При моделировании были приняты следующие основные параметры: материал тела – каучук (модуль Юнга – $0,79 \cdot 10^7$ Па; плотность – 910 кг/м^3 ; коэффициент сопротивления – 10^3 (для неупругого деформирования) и 0 (для упругого деформирования)); шаг по времени – 0,01 с; ускорение свободного падения – $9,81 \text{ м/с}^2$; скорость при столкновении – $2,0 \text{ м/с}$; материал препятствия – гранит. Фрагменты рис. 2, 3 отстоят друг от друга по времени на 1 мс.

Анализ рис. 2, 3 показывает, что в обоих случаях вязкоупругое тело деформируется слабее и отскакивает от поверхности после

столкновения менее высоко. Безусловно, это связано с потерями энергии вследствие ее диссипации.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что предложенный подход дает результаты, согласующиеся с общепринятыми положениями. Кроме того, использованные модели позволяют легко рассчитать деформации связей внутри тела и, при необходимости, действующие механические напряжения. Последнее дает возможность перейти к моделированию процессов разрушения тел при механической нагрузке или указать на расположение наиболее напряженных участков конструкций.

Список литературы

1. Бобков С.П. Моделирование основных процессов переноса с использованием клеточных автоматов // Известия вузов. Химия и химическая технология. – 2009. – Т. 52, вып. 3. – С. 109–114.
2. Toffoli T. Cellular Automata Machines / Massachusetts Institute of Technology, 1987.
3. Psakhie S.G., Horie Y., Yu S. Movable cellular automata method for simulating materials with mesostructure // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – Tomsk, 2001. – Vol. 37. – P. 311–334.
4. Wang T.K., Chang C.S. Fracture Modeling of Concrete Using Two Different Microstructural Mechanics Approaches // Mechanics of Materials Conference. – Sao Paulo, 2011. – 14 p.

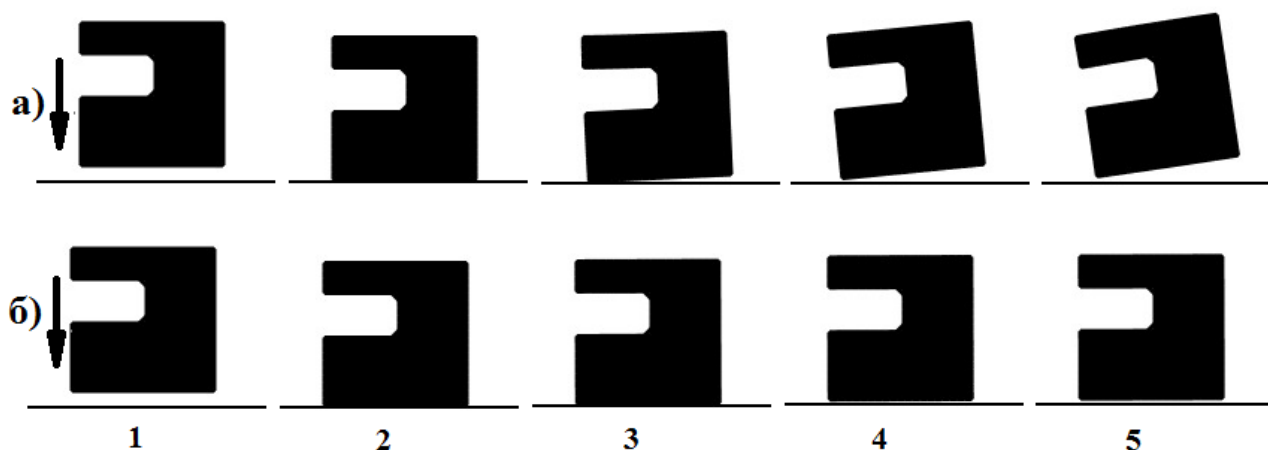


Рис. 2. Процесс упругого (а) и вязкоупругого (б) деформирования прямоугольного тела размера $0,1 \times 0,1 \text{ м}$ с дефектом структуры

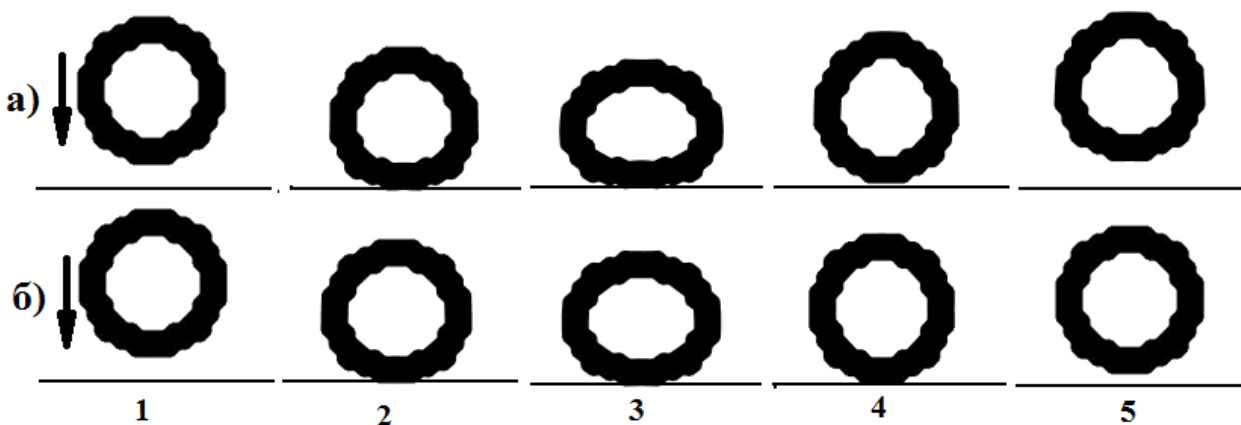


Рис. 3. Процесс упругого (а) и вязкоупругого (б) деформирования круглого тела диаметром $0,1 \text{ м}$ с внутренней полостью

5. **Бобков С.П., Полищук И.В.** Исследование процесса упругого деформирования с использованием метода дискретных элементов // Вестник ИГЭУ. – 2014. – Вып. 5. – С. 50–54.

6. **Лурье А.И.** Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.

7. **Бленд Д.** Нелинейная динамическая теория упругости. – М.: Мир, 1972. – 184 с.

8. **Сивухин Д.В.** Общий курс физики. – М.: Наука, 1979. – Т. I. Механика. – С. 101–102.

9. **Ernst Hairer, Syvert Nørsett, Gerhard Wanner.** Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. Second edition. Springer-Verlag. – Berlin, 1993.

References

1. Bobkov, S.P. Modelirovanie osnovnykh protsessov perenosa s ispol'zovaniem kletochnykh avtomatov [Simulation of the main transfer processes by using cellular automata]. *Izvestiya vuzov «Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya»*, 2009, vol. 52, issue 3, pp.109–114.

2. Toffoli, T. Cellular Automata Machines. Massachusetts, 1987.

3. Psakhie, S.G., Horie, Y., Yu, S. Movable cellular automata method for simulating materials with mesostructure. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. Tomsk, 2001, vol. 37, pp. 311–334.

4. Wang, T.K., Chang, C.S. Fracture Modeling of Concrete Using Two Different Microstructural Mechanics Approaches. *Mechanics of Materials Conference*. Sao Paulo, 2011. 14 p.

5. Bobkov, S.P., Polishchuk, I.V. Issledovanie protsessu uprugogo deformirovaniya s ispol'zovaniem metoda diskretnykh elementov [Research into elastic deformation by the discrete element method]. *Vestnik IGEU*, 2014, no. 2, pp. 50–54.

6. Lur'e, A.I. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1970. 940 p.

7. Blend, D. Nelineynaya dinamicheskaya teoriya uprugosti [Nonlinear dynamic elasticity]. Moscow, Mir, 1972. 184 p.

8. Sivukhin, D.V. *Obshchiy kurs fiziki. T. I. Mekhanika* [General course of physics. Vol. I Mechanics]. Moscow, Nauka, 1979, pp. 101–102.

9. Ernst Hairer, Syvert Norsett, Gerhard Wanner. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, second edition, Springer-Verlag. Berlin, 1993.

Полищук Илья Викторович,
ФБГОУВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
аспирант кафедры информационных технологий,
e-mail: ajto@mail.ru

Бобков Сергей Петрович,
ФБГОУВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»,
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой информационных технологий,
e-mail: bsp@isuct.ru